L. gr.
0
252

– 30 kr d 24/7 46.

EUKLIDS
ELEMENTE

DAS ERSTE BIS ZUM SECHSTEN,

ſammt dem

EILFTEN UND ZWOELFTEN BUCHE.

Aufs Neue aus dem Griechiſchen überſezt

von

JOHANN KARL FRIEDRICH HAUFF.

La doctrine des ces livres eſt à l'égard du reſte de la Géometrie, ce que la connoiſſance des lettres eſt à la lecture et à l'écriture.

MONTUCLA.

Marburg

in der neuen Academiſchen Buchhandlung.

1797.

Dr. Haupt.

BIBLIOTHECA
CIVITATIS
HARENBERGENSIS.

Vorrede.

Was ich hier von diesem Buche zu sagen habe, glaube ich nicht vollständiger und in keiner bessern Ordnung vortragen zu können, als, wenn ich an jede Klasse der Leser, die ich für das Buch erwarten kann, mich besonders wende, und ihr das für sie dienliche davon sage. Ich werde dabey diese Klassen nach der zu vermuthenden Anzahl ihrer Mitglieder ordnen.

I. *An studirende Jünglinge.*

Jünglinge meines teutschen Vaterlandes, denen ihre Geistesbildung eine wahre Angelegenheit ist, an Euch ist diese Anrede gerichtet! — Mit dem grossen Haufen derer, die auf Universitäten täglich sechs bis acht Stunden Vorlesungen ohne Plan und Ordnung durch einander hören, um so in zwey bis drey Jahren einen Pack von Heften zusammen zu schreiben, der sie in den Stand seze, bey der bevorstehenden Prüfung einige elementarische Fragen aus dieser oder jener Brodwissenschaft nothdürftig zu beantworten, habe ich hier nichts zu thun; Sie ent-

ehren die Wiſſenſchaften durch die Art, wie ſie ſie treiben, haben vom Werthe der Wahrheit keine Vorſtellung, und für das, was ich hier ſagen werde, keinen Sinn. —

Euch übergebe ich hier, in eurer Mutterſprache, *das Buch der Bücher*, das Buch das die Elemente, d. h. die *erſte Grundlage alles menſchlichen Wiſſens* enthält, alſo die *wahre Wiſſenſchaftslehre.* Daſs es dies ſey, ſagt Euch ſchon der Titel des *Buchs*: *Elemente* (ϛοιχεια) und des Urhebers: *Verfaſſer der Elemente* (ϛοιχειωτης), den beyde ſchlechthin und ohne Beyſaz im ganzen Alterthume führen; Dies ſagt Euch ferner die Geſchichte des Buchs, die Euch lehrt, daſs es ſeit mehr, als *zweytauſend* Jahren das *Lehrbuch für die Welt* geweſen, d. h. in die Sprachen aller cultivirten Nationen überſezt, von den gröſsten Köpfen aller mit der ausgezeichnetſten Achtung beehrt, allen, denen es um gründliche Wiſſenſchaft zu thun war, mit dem angelegentlichſten Eifer empfohlen, und von ihnen mit dem glücklichſten Erfolge gebraucht worden ſey; Dies ſagt Euch endlich am überzeugendſten die genauere Bekanntſchaft und Beſchäftigung mit dem Buche ſelbſt, die das Urtheil bald rechtfertigen wird, daſs wir in Rückſicht auf *Syſtem* und *Methode* überall nichts gleich Vollkommenes aufzuweiſen haben. Denn daſs es nur in dieſem Sinne, alſo nicht in *materialer*, ſondern blos in *formaler* Bedeutung des Worts genommen ſey, wenn ich behaupte, die Elemente enthalten *die erſte Grundlage alles menſch-*

lichen

lichen Wissens, lehrt schon eine flüchtige Ansicht des Buchs, welche zeigt, daſs es in Ansehung der Materie sich blos auf die Geometrie einschränke.

Aber auch selbst in dieser Bedeutung möchte doch meine Behauptung noch Einem oder dem Andern übertrieben scheinen. Es wird mir also obliegen sie zu rechtfertigen.

Wir *wissen* eigentlich nur das, wovon wir wissentschaftliche Erkenntniſs haben. *Wissenschaftliche Erkenntniß*, oder *Wissenschaft* aber ist eine systematische, d. h. nach Principien geordnete Verbindung von Kenntnissen zu einem Ganzen. Der Inbegriff der Regeln, die man bey der Anlage und Aufführung eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes, d. h. bey der Anordnung eines Zusammenhangs von Gründen und Folgen der Erkenntniſs zu beobachten hat, macht dasjenige aus, was man *systematische* oder *wissenschaftliche Methode* nennt. Nun sehen es zwar die Lehrer der Logik für ein Stück ihres Berufs an, ihren Schülern jene Regeln beyzubringen, und sie zu dieser Methode anzuführen; aber wenn sie nicht selbst beym Euklides in die Schule gegangen sind, so sind sie darin *blinde Leiter*. Denn nur von Ihm, oder von Niemand, lernt man das Wesen der wissenschaftlichen Methode kennen, nur Er, oder Niemand, hat alle Forderungen derselben in ihrem ganzen Umfange, und nach aller Strenge erfüllt. Wieferne also Euklids Elemente das vollkomm-

kommenste Muster der wissenschaftlichen Methode enthalten, und wieferne man ohne sie diese gar nicht kennen lernen, ohne diese aber überall keine Wissenschaft zu Stande bringen kann, soferne ist man berechtiget, zu behaupten, diese Elemente enthalten *die erste formale Grundlage alles menschlichen Wissens.* Man kann zwar sehr gut und kurz sagen, das Wesen der wissenschaftlichen Methode bestehe darin, *alles*, *was man vorträgt*, *aus unbestreitbaren Gründen durch Beyfall erzwingende Schlüsse darzuthun*; wollte man aber weiter gehen und behaupten, so etwas müsste sich auch wohl ohne Euklids Hülfe bewerkstelligen lassen, so würde man darin gar sehr irren. Verstehen kann man wohl, was jene Worte sagen wollen, aber damit noch nicht sogleich leisten, was sie fordern. Der Weg vom *Verstehen Können*, bis zum *Ausführen Können* ist um ein Beträchtliches weiter, als die meisten Menschen glauben. „*Wie man es anzugreiffen habe*, *um etwas zu Stande zu bringen*, *lernt man nur von dem*, *der selbst es zu Stande gebracht hat*“ (Quid sit faciendum, á faciente discendum) hat schon Seneca behauptet, und die Erfahrung aller Zeiten hat die Wahrheit dieser Behauptung bestättiget. Um auch durch Eure eigene Erfahrung Euch davon zu überzeugen, so gehet einmal hin, und vergleichet ein Stück der Dogmatik, des Natur- Staats- oder Kirchenrechts, der Semiotik oder Pathologie, der Metaphysik oder Moral mit irgend einem Stücke der Elemente, vergleichet insbesondere das, was die Lehrer der nur

ge-

genannten Wissenschaften Euch für Beweise ausgeben, mit einem Beweise des Euklides! Und doch wollen alle diese Leute auch Lehrer von *Wissenschaften* seyn, wollen alle auch auf eine *wissenschaftliche Methode* Ansprüche machen! *)

Lasset Euch nicht irre machen durch das Vorgeben: „Euklides habe uns zwar ein *vollkommenes* Muster der *mathematischen* Methode aufgestellt, diese aber lasse sich in andern Wissenschaften nicht nachahmen.“ Dies ist lächerlich. Was die mathemathische Methode eigenthümliches hat, besteht lediglich in den Constructionen ihrer Gegenstände, worin es freylich der Mathematik keine andere Wissenschaft nachthun kann, was aber auch noch keinem Vernünftigen eingefallen ist, von einer andern zu fordern, und deren auch in der oben beygebrachten Bestimmung des Wesens der wissenschaftlichen Methode mit keinem Worte erwähnt

*) Um solcher willen, die mich nicht kennen, bemerke ich bey dieser Stelle, dass ich weit entfernt sey, der Mathematik auf Kosten der übrigen Wissenschaften eine Lobrede halten, oder den Werth der leztern, an und für sich betrachtet, in Vergleichung mit dem der erstern herabsezen zu wollen. Ich schäze jede nach ihrem wahren Werthe für die Menschheit richtig und unbefangen; und meine Absicht ist hier nur darauf gerichtet, zu zeigen, wie weit die übrigen an *wissenschaftlicher Vollkommenheit* noch hinter der Mathematik zurück stehen.

wähn*t* ist. Unter dieser Bestimmung also *kann* und *soll* die mathematische Methode allen andern Wissenschaften zum Muster dienen, oder unter dieser Bestimmung ist sie mit der allgemeinen wissenschaftlichen Methode ganz einerley.

Ihr Jünglinge also, die ihr den Vorsaz gefasst habt, irgend eine Wissenschaft Euch so zu eigen zu machen, dass sie in der Thath ein durch eigene Kraftanwendung erworbenes Eigenthum, nicht blos ein aus dem Hefte Eures Lehrers — dessen Geist mit dem Daseyn von diesem oft ebensowenig in einer Causalverbindung steht, als der des Unwissendsten unter seinen Schulern – erborgter Besiz für Euch sey, kommet zu allererst her zum Euklides, und lernet von Ihm, was Wissenschaft, lernet von Ihm, was wissenschaftliche Methode, lernet von Ihm, was ein wissenschaftlicher Beweis, lernet von Ihm, was eine erwiesene Wahrheit sey! Und wenn Ihr, nach fortgesezter ernstlicher Beschäftigung mit seinen Elementen, bey einiger Anfmerksamkeit auf Euch selbst, gewahr werdet, wie Ihr da die Wahrheit überall gleichsam mit Händen greiffen, die gegriffene vesthalten, und die vestgehaltene nöthigen könnt, Euch zu der versteckten zu führen, so wisset, dass es der Geist des Vaters der Geometrie ist, dessen Wehen Euch dann umgiebt, wisset, dass dies der Geist der Wahrheit ist, der Euch in alle Wahrheit, so weit sie für den menshlichen Verstand zugänglich ist, leiten, und Eurem Geiste Kraft geben wird, zu besiegen die Hinder-

dernisse, die Euch bey der Erforschung derselben aufstossen mögen, der endlich Euren ausdaurenden Fleiss durch Erhöhung Eurer Denkkraft, durch Schärfung Eures Unterscheidungs-Verm gens, durch Verfeinerung Eures Sinns für Wahrheit, und durch Ertheilung einer Fertigkeit in feiner Zergliederung und scharfer Bestimmung der Begriffe, in glücklicher Verbindung mehrerer Begriffe zu neuen Säzen, in richtiger Absonderung der einfachsten und ersten Säze in Eurer Erkenntniss von den zusammengesezteren, in geschickter Zusammenstellung mehrerer Säze nach der Stufenfolge ihrer Abhängigkeit von einander, in Ableitung wichtiger Folgen aus fruchtbaren Säzen, in Bildung richtiger Schlüsse und bündiger Beweise, in Zusammensezung und Ueberschauung langer Schlussreihen, in Aussonderung der wesentlichen und zur Auflösung zureichenden Bestimmungsstücke der Aufgaben aus einer Menge, oft sehr verwickelter, ausserwesentlicher Bestimmungen, in Zusammenreihung und Verknüpfung einer Kette von Gründen und Folgen in ein Ganzes der Erkenntniss so belohnen wird, dass Ihr den Gewinn, den Ihr davon auf Euer ganzes Leben zu jeder andern Art von wissenschaftlicher Beschäftigung mitbringen werdet, nie genug werdet schäzen können.

Seyd ihr nun begierig zu erfahren, wie Ihr es anzugreiffen habt, um von dem Studium des Euklides die eben erwähnten Vortheile zu ziehen, so ist mein Rath folgender:

I. Le-

I. Leset das Buch in der Ordnung, vom Anfange bis zum Ende, ohne etwas zu überspringen, durch. Aber leset nicht so, wie jener Candidat der Theologie der, weil er einmal vom Euklides und seiner Methode, besonders von seinen Beweisen, viel rühmliches gehört hatte, in der löblichen Absicht, auf seine Dogmatik, wo er hin und wieder Bündigkeit in den Beweisen vermisst haben soll, eine erspriessliche Anwendung davon zu machen, den heroischen Entschluss fasste, die Elemente innerhalb einer gewissen Zeit durchzulesen, und sich zu dem Ende ein tägliches Pensum von drey Blättern ansezte, die er jeden Abend vor Schlafengehen so weglass, wie man etwa eine Zeitung liesst, und wenn er damit fertig war, die Ecke des lezten Blatts brach und einschlug, um zu bemerken, wo er den folgenden Abend fortzufahren hätte; sondern

II. Leset mit solchem Ernste und solcher Aufmerksamkeit, dass ihr euch nicht das Geringste entgehen lasset, in der vesten Ueberzeugung, dass hier nicht das Geringste anzutreffen sey, wovon nicht irgend etwas des Nachfolgenden so abhängig wäre, dass es, ohne jenes vorauszusezen, nicht richtig verstanden, oder bewerkstelliget werden könne.

III. Unterscheidet dabey sorgfältig die verschiedenen Theile, woraus ein jeder Saz besteht, und die theils durch die verschiedene Schrift, theils durch die bey allen auf einerley

Art

Art gebrauchten Formeln: *es ſey etc. ſo behaupte ich etc. Demnach iſt etc.* leicht von einander zu unterſcheiden ſind.

IV. Leſet aber nicht blos, ſondern durchdenket auch das Geleſene ſo lange, bis Ihr nicht nur jeden einzelnen Saz richtig gefaſst habt, ſondern auch, was die Hauptſache iſt, den Zuſammenhang deſſelben mit allen ſeinen Gründen, ſo wie er in dem Beweiſe dargelegt wird, deutlich und vollſtändig einſehet.

V. Um Euch davon zu verſichern, ſo verſuchet es, nach verſchloſſenem Buche, den Beweis auf dem Papiere oder der Tafel, nachdem Ihr vorher die Figur darauf gezeichnet habt, zu wiederholen. Könnet ihr ihn ſo durchführen, ſo ſeyd Ihr nun erſt Eurer Sache gewiſs. Bleibet ihr aber darin ſtecken, ſo verſuchet erſt, ob Ihr nicht etwa durch eigenes Nachdenken, die Lücke, die Euch aufhält, auszufüllen vermöget. Gelingt Euch dies, ſo iſt es deſto beſſer, wo aber nicht, ſo ziehet Euer Buch wieder zu Rathe, erwäget noch einmal genau, was im Saze ausgeſagt, oder verlangt wird, zerleget alsdann die ganze Schluſskette des Beweiſes in ihre Glieder, die einzelnen Schlüſſe, unterſuchet ſorgfältig, welche Theile derſelben jeder von den früher vorgetragenen Säzen, auf welche Ihr dabey verwieſen werdet, begründe, was für ein Moment alſo jeder derſelben in dem ganzen Beweiſe habe, und worin dieſes Moment liege. Und wenn Ihr damit zu Ende ſeyd, ſo durch-

durchlauffet noch einmal schnell die ganze Gedankenfolge des Beweises; alsdann schliesset Euer Buch und wiederholet Euren Versuch, der Euch nun nicht leicht mehr fehlschlagen wird.

VI. Bey diesen Wiederholungen wird Euch der Gebrauch der Zeichen, deren die neueren Mathematiker zur kurzen Darstellung ihrer Schlüsse sich bedienen, und die ich zu diesem Behufe in eine Tafel gebracht und dieser Vorrede angehängt habe, eine beträchtliche Erleichterung verschaffen. Denn diese gewähren, ausser dem Vortheile der Kürze, auch dadurch eine desto leichtere Uebersicht des Ganzen, dass sie die einzelnen Ruhepläze so viel deutlicher ins Auge fallen lassen. Um ein Beyspiel davon zu geben, seze ich die Darstellung des Beweises vom neunten Saze im zweyten Buche vermittelst dieser Zeichen hieher.

Saz.

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2.$$

Beweis.

I. AC = CE (n. d. Constr.), folglich (1, 5. S.)
EAC = AEC.
Aber ACE = R (n. d. Constr.) (folglich 1, 32. S.)
EAC + AEC = R und mithin

$$\left.\begin{array}{l}\text{sowohl EAC}\\ \text{als AEC}\end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}\text{ R. Ebenso auch}$$

so-

$\left.\begin{array}{l}\text{ſowohl } CEB\\ \text{als } CBE\end{array}\right\} = \frac{1}{2}R$, folglich

$\left.\begin{array}{l}AEC + CEB\\ AEB\end{array}\right\} = R$

II. $ECB = R$ (n. d. Conſtr.)
$EGF = ECB$ (1, 29. S.) folglich

$EGF = R$, und mithin (1, 32. S.)
$GEF + EFG = R$
Aber GEF (einerley mit CEB) $= \frac{1}{2}R$ (No. I.)
folglich auch

$EFG = \frac{1}{2}R$. Demnach
$GEF = EFG$, und mithin (1, 6. S.)
$EG = FG$

III. $ECB = R$ (n. d. Conſtr.), folglich (1, 29. S.)
$FDB = R$, und mithin (1, 32. S.)
$DBF + BFD = R$.
Aber DBF (einerley mit CBE) $= \frac{1}{2}R$ (No. I.)
folglich auch

$BFD = \frac{1}{2}R$. Demnach
$DBF = BFD$, und mithin (1, 6. S.)
$DF = DB$

IV. $AC = CE$ (n. d. Conſtr.) folglich auch
$\overline{AC}^2 = \overline{CE}^2$, und mithin
$\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = 2 \times \overline{AC}^2$.
Aber $\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2$ (1, 47. S.) folglich auch

$\overline{AE}^2 = 2 \times \overline{AC}^2$

V.

V. EG = GF (No. II.) folglich auch

$\overline{EG}^2 = \overline{GF}^2$; und mithin

$\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 = 2 \times \overline{GF}^2$

Aber $\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 = \overline{EF}^2$ (1, 47. S.) folglich auch

$\overline{EF}^2 = 2 \times \overline{GF}^2$

Aber GF = CD, (1, 34. S.) folglich auch

$\overline{GF}^2 = \overline{CD}^2$, und mithin

$\overline{EF}^2 = 2 \times \overline{CD}^2$

So weit die Vorbereitungen! Werden nun dieſe einzeln erwieſenen Hülfsſäze geſchickt mit einander verbunden, und taugliche Subſtitutionen am gehörigen Orte angebracht, ſo kommt man vollends ſchnell auf den zu beweiſenden Saz wie folgt:

$\overline{AE}^2 = 2 \times \overline{AC}^2$ (No. IV.)

$\overline{EF}^2 = 2 \times \overline{CD}^2$ (No. V.) folglich

$\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$

Aber $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2$ (1, 47. S.) folglich

$\overline{AF}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$

Aber $\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$ (1, 47. S.) folglich

$\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = 2 \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$.

Aber DF = DB (No. III.) folglich

$\overline{DF}^2 = \overline{DB}^2$ und mithin

$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$, w. z. e. w.

VII.

VII. Aber ſelbſt dann, wenn Ihr die Beweiſe der Säze vermittelſt der eben beſchriebenen Abkürzungen ohne Anſtoſs wiederholen könnet, könnte doch Euer Gedächtniſs, wenn dies ſehr treu und glücklich wäre, zu viel Antheil daran haben. Und dies darf nicht ſeyn, Es darf kein Saz mit ſeinem Beweiſe eher ein Depoſitum Eures Gedächtniſſes werden, als Ihr ihn für ein Product Eures Verſtandes erkannt habt. Denn ihr ſollt hier nicht ein Syſtem Euch hiſtoriſch bekannt machen, dem vielleicht ein Paar Duzende anderer ganz oder zum Theil entgegengeſezt ſind, wie Ihr etwa in der Geſchichte der Philoſophie oder in der Kirchengeſchichte thut, ſondern ihr ſollt Euch das *eine*, *nothwendige* und *unwandelbare* Syſtem des menſchlichen Verſtandes über dieſen Gegenſtand ſo zu eigen machen, daſs Ihr es, im ganzen Umfange des Worts, als ein durch Eure Kraft erzeugtes Geiſtes-Eigenthum betrachten könnet. Dazu aber wird ſchlechterdings erfordert, daſs Ihr aus Eurem Buche blos die Materialien zu dem Syſteme und die Art der Zuſammenſezung entlehnet, dieſe Zuſammenſezung aber alsdann ſelbſt bewerkſtelliget. Hieraus folgt alſo, daſs ihr die Beweiſe *aus ihren Gründen*, nicht *aus dem Gedächtniſſe*, müſſet wiederholen können. Daſs ihr aber dies könnet, davon werdet Ihr nur dann Gewiſsheit haben, wenn Euch jene Gründe unabhängig von den Geſezen, denen dieſes Seelenvermögen unterworfen iſt, zu Gebote ſtehen. Zu dem Ende müſſet Ihr ſie alſo öfter, nach längeren Zwiſchenzeiten, in anderer Ordnung und

Ver-

Verbindung wiederholen, und, was noch beſſer iſt, ſelbſt andere Beweiſe zu finden verſuchen.

VIII. Was die Aufgaben insbeſondere betrift, ſo werdet Ihr Euch auſſerdem in Auflöſung derſelben fleiſsig üben müſſen, und Ihr werdet wohl thun, ſie auch auf mancherley Art abzuändern. Ebenſo wird es auch eine nüzliche Uebung ſeyn, bey den Wiederholungen der Lehrſäze und ihrer Beweiſe in den dazu gehörigen Figuren nach und nach alles abzuändern, was an ihnen willkührlich iſt.

Auf ſolche Art, hoffe ich, werdet Ihr ohne fremde Hülfe mit dem gröſsten Theile der Elemente, in eine ſehr vertraute Bekanntſchaft kommen können. Ich ſage mit dem *gröſsten Theile*, weil etwa das fünfte Buch, und was von den folgenden auf dieſem beruhet, eine Ausnahme davon leiden möchte. Was Euch aber in dieſem oder den übrigen Büchern von Dunkelheiten oder Schwierigkeiten zurückbleiben mag, das verſpreche ich in einem vollſtändigen Commentare aufzuhellen und zu heben, den ich, ſo bald meine Amtsgeſchäfte, und meine übrigen, theils angefangenen, theils verſprochenen, Nebenarbeiten es erlauben werden, nachzuliefern gedenke. Uebrigens machen die hier überſezten Bücher zuſammen ein Ganzes aus, das von den andern völlig unabhängig iſt.

II. *An*

II. *An die Schul- und Privatlehrer.*

Diesen kann ich zwar die Elemente aus den im ersten Abschnitte ausführlich beygebrachten Gründen, als das vorzüglichste Lehrbuch empfehlen; aber ich muss sie bitten, sich erst selbst recht vertraut mit dem Euklides zu machen, ehe sie andere bey ihm einführen wollen, und ich muss sie beschwören, andern durchaus nichts vorzutragen, was sie nicht selbst vollkommen verstehen. Denn der Schaden, den sie dadurch stiften können, ist unübersehbar groß. Wenn sie aber jene Bedingungen erfüllt haben, und beym Vortrage der Geometrie nach den Elementen so zu Werke gehen wollen, dass sie ihren Schülern jeden Saz erst deutlich vorsagen, alsdann durch die Figur an der Tafel erläutern, dabey die Bedingung von der Aussage genau unterscheiden, hierauf den Beweis so führen, dass sie ihn zwar in Worten hersagen, aber in den allgemeinen Zeichen anschreiben, endlich den Saz wiederholen, dann aber alles auslöschen, und nun durch einen ihrer Schüler, bald diesen, bald jenen, wiederholen lassen, wo dieser etwa stecken bleiben sollte, nachhelfen, und nicht eher weiter gehen, als bis alles richtig gefasst und durchgeführt ist, so kann ich ihnen für den Erfolg bürgen. Privatlehrern wird dieses Verfahren durch die geringere Anzahl ihrer Zöglinge um soviel leichter. Freylich wird es dabey, besonders im Anfange, etwas langsam gehen. Aber die Langsamkeit der ersten Fortschritte wird durch die Leichtigkeit und Sicherheit des

ganzen folgenden Ganges mehr, als blos ersezt. „In principiis diu haerendum"! ist ein Grundgesez bey allem Studiren, das man nie ungestraft übertreten kann. Die *ersten Gründe* sind überall das schwerste. Diese für leicht zu nehmen, und, aus Begierde, schneller vorwärts zu kommen, darüber flüchtig hinwegzueilen, ist eine zwar gewöhnliche, aber höchst nachtheilige Täuschung, die sich allemal dadurch bestraft, dass man sich bald genöthiget sieht, wieder auf die ersten Gründe zurückzugehen, um sich darinn zu orientiren, und dies beym weitern Verfolge fast eben so oft wiederholen muss, als sie auf eine neue Art combinirt werden sollen, um zu einem neuen Resultate zu führen. Daraus entspringt dann bey den meisten eine oder die andere der beyden verderblichen Folgen, entweder, dass ihnen durch das öftere Wiederkäuen der nämlichen Sache die Wissenschaft verleidet wird, oder, dass sie die Hoffnung ganz aufgeben, mit einer Wissenschaft jemals vertraut zu werden, von welcher sie durch alle ihre Bemühungen keine zusammenhangende Kenntniss erlangen, und in welcher sie, ohne Anstoss, keinen Schritt vorwärts machen können.

Noch muss ich diese Klasse meiner Leser vor einem Wahne gewisser Leute, die sich Pädagogen nennen, aber freylich schon dadurch einen ziemlich sichern Maasstab zur Beurtheilung des Werths ihrer ganzen Pädagogik

gik hergeben, warnen, vor dem Wahne nämlich, als wären junge Leute unter ſechzehn Jahren zur Geometrie noch nicht reif. Es würde mir leicht ſeyn, die Nichtigkeit dieſes Wahns unwiderſprechlich darzuthun. Da mich aber dieſes hier etwas zu weit führen würde, und da ich die gegründete Hoffnung habe, daſs, zum Glücke für die Wiſſenſchaften, die Anzahl dieſer Leute eben nicht groſs ſey, ſo begnüge ich mich damit, mich diesfalls auf meine eigene Erfahrung zu berufen, die mich berechtigt zu verſichern, daſs ich ehedem ſelbſt jungen Leuten von zehn bis zwölf Jahren die Geometrie nach dem Euklides mit dem beſten Erfolge vorgetragen habe.

III. *An die Freunde und Verehrer der Alten.*

Diese brauche ich wohl nicht erst mit vielen Worten auf den Werth eines Buchs aufmerksam zu machen, das sich seit mehr als zweytausend Jahren in dem Range eines *Lehrbuchs für die Welt* behauptet hat, und diesen auch so lange nicht verlieren wird, als noch Völker vorhanden seyn werden, bey welchen gründliche Kenntnisse etwas gelten. Es genügt mir also ihnen zu sagen, dass ich ihnen hier von diesem *einzigen* Buche eine fast durchgehends *buchstäblich getreue* Uebersezung gebe, die ihnen in jeder andern Hinsicht, die der Sprache ausgenommen, die Stelle des Originals vertreten kann.

Sie werden ohne Zweifel mit mir darüber einig seyn, dass man nur aus einer solchen Uebersezung den Geist des Originals vollständig kennen und beurtheilen lernen könne, und deswegen mein Unternehmen, auch nur in Rücksicht auf ihre Zwecke betrachtet, nicht für unnüz halten.

IV. *An*

IV. *An die Kunſtrichter.*

Dieſe hoffe ich zu befriedigen, wenn ich ihnen folgende Fragen beantworte:

1) Warum ich überhaupt die Elemente aufs neue überſezt habe?

2) Wie ich dabey im Ganzen zu Werke gegangen ſey?

3) Warum ich *ſo* verfahren ſey?

4) Was für eine Ausgabe des griechiſchen Texts ich dabey zum Grunde gelegt?

5) Was für andere ich damit verglichen?

6) Welche Ueberſezungen ich dabey zu Rathe gezogen?

7) Was für Abänderungen ich mir erlaubt habe?

8) Warum ich nur dieſe Bücher und nicht auch die übrigen überſezt liefere?

9) Was ich in dem Commentare zu geben gedenke?

10) Warum ich nicht wenigſtens die Hauptſache davon gleich in den Text dieſer Ueberſezung aufgenommen habe?

Bey der Beantwortung dieſer Fragen folge ich der Ordnung, in welcher ſie hier ſtehen.

Was

Was mich überhaupt zu dem Entschlusse, die Elemente aufs neue zu übersezen, bestimmte, war der Mangel an einer Uebersezung, von der man sagen könnte, dass sie in jeder Hinsicht, die der Sprache ausgenommen, das Original, als ein ganz gleichgiltiges Surrogat ersezen könne. Dass die besten der gewöhnlichen Handausgaben, namentlich die *Bärmännische* und *Lorenzische*, diese Eigenschaft nicht haben, wird zwar schon aus einer flüchtigen Vergleichung klar: soll aber in dem Folgenden umständlicher gezeigt werden. Eben dieser Umstand bestimmte dann auch zugleich den Weg, den ich bey meiner Arbeit im Ganzen einzuschlagen hatte, er bestimmte mich nämlich, *gerade eine solche*, d. h eine fast durchgehends *buchstäblich getreue* Uebersezung des Griechischen Texts zu liefern, wobey ich eben so, wie dieser, alle Säze und ihre Verbindungen *blos durch Worte*, ohne irgend ein anderes Zeichen zur Abkürzung zu gebrauchen, ausdrückte. Warum ich aber eine solche Uebersezung für nöthig hielt, davon liegt der Grund in einer Bemerkung, die ich sehr oft zu machen Gelegenheit hatte, dass nämlich bey jungen Leuten, auch von vorzüglichen Fähigkeiten, die sich über Dunkelkeit und Unbrauchbarkeit der Bärmännischen oder Lorenzischen Ausgabe der Elemente, und namentlich über Unverständlichkeit dieses oder jenes Beweises in denselben, beklagten, alle Dunkelheit verschwand, und einer vollkommenen Evidenz den Plaz einräumte, sobald ich ihnen den unverständlichen Beweis, so, wie er

im

im griechischen Texte sich findet, ausführlich *mit Worten* darlegte. Die Gründe dieser Erscheinung liegen zu nahe, als daſs man sie verfehlen könnte. Die meisten Wissenschaften weiſs man jezt so leicht vorzutragen, daſs junge Leute, auch von mittelmäſsigen Fähigkeiten, jede Zeile, so wie sie sie gelesen haben, auch ziemlich verstehen, d. h. sich vorstellen, was die Worte sagen wollen, oder wenigstens Etwas bey den Worten denken können; daran werden sie also gewöhnt — bey einigen werden sie jezt, leider! auf eine noch unglücklichere Weise daran gewöhnt, von allem, was sie lesen, *Nichts* zu verstehen, — bey jedem Saze nach einem Grunde zu fragen, daran werden sie in der Regel sonst nirgends gewöhnt. Diese Disposition bringen sie also auch zur Geometrie mit, womit sie, gewöhnlich nicht, wie sie sollten, den Anfang machen. Sie lesen also auch hier Zeile für Zeile, und das um desto flüchtiger, je schneller die durch allgemeine Zeichen ausgedrückten Säze sich lesen lassen, und glauben alles zu verstehen, wenn sie die Glieder eines jeden Sazes so mit einander verbinden, wie die Bedeutung der Zeichen es fordert, ohne sich um die Berufungen zu bekümmern, die neben den Säzen in Parenthesen stehen. Da nun diese Berufungen den Grund von der Verbindung des Subjects und Prädicats im Saze angeben, so können sie von der Nothwendigkeit dieser Verbindung bey keinem der einzelnen Säze ein deutliches Bewuſstseyn haben, es kann also auch keiner derselben in ihrem Gedächtnisse haften. Wenn nun gegen dem

Ende des Beweiſes zu mehrere Gröſſen, deren Gleichheit im vorigen erwieſen worden, mit einander verwechſelt, und auf mancherley Art verbunden werden, ſo kommen ſie zulezt auf einmal zu einem Reſultate, das wie ein Zauberbild vor ihnen ſteht, und von dem ſie nicht einſehen, von wannen es komme, oder wie es mit den Prämiſſen zuſammenhange, und durch ſie begründet werde. Der Saz bleibt ihnen alſo, wiefern er ein erwieſener Saz ſeyn ſoll, unverſtändlich. Gegen dieſen Fehler der Flüchtigkeit und Eilfertigkeit, der ſich bey den beſten Köpfen am häufigſten findet, giebt es nun kein beſſeres Verwahrungsmittel, als die *Langſamkeit des Gangs*, die von Euklids Art, alle ſeine Schlüſſe, der ganzen Länge nach, ohne irgend ein Zeichen der Abkürzung, blos mit Worten auszudrücken, und auf die früher vorgetragenen Säze, ſo oft ſie bey einem Beweiſe als Prämiſſen gebraucht werden, durch ausdrückliche Wiederholung derſelben ſich zu berufen, eine nothwendige Folge iſt. Auf dieſem Wege kann auch der Flüchtigſte nur *mit Weile eilen*, und dadurch wird er genöthiget, das Gegenwärtige mit den genauen Beſtimmungen, die die Worte ausdrücken, ſich vorzuſtellen, und des Vergangenen, ſo weit es jedesmal nöthig iſt, ſich deutlich zu erinnern. Und ſo wird er nirgends über Dunkelheit, nirgends über Mangel an Zuſammenhange klagen können, ſondern die Verknüpfung aller Glieder der ganzen Schluſskette eines Beweiſes vom erſten bis auf das lezte wird klar vor ſeinen Augen liegen, ſo klar, als ob er alles, was darin

in enthalten iſt, mit Händen gegriffen hätte. Hat er es aber einmal ſo weit gebracht, hat er ſich einmal auf dieſem längeren und mühſameren Wege durch einen verwickelten Beweis durchgearbeitet, ſo muſs es ihm das gröſste Vergnügen ſeyn, ſolchen vermittelſt der allgemeinen Zeichen ſich ins Kurze zuſammenzuziehen, und ſo noch einmal zu durchlauffen. Wie muſs er ſich nicht freuen, einen Saz wie z. B. der 12te oder 13te des zweyten Buchs, der in ſeinem Texte *acht* volle Zeilen einnimmt, durch *eine einzige* Zeile:

$(\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \times AC \times AD$, oder

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \times BC \times BD)$ ausdrücken zu können! In dieſer Form kann er nun Saz und Beweis gewiſſermaſſen als *ſeine eigene Erfindung* betrachten, und dadurch ſieht er ſeinen Fleiſs belohnt, und wird zu weiteren Fortſchritten ermuntert. Und ſo wird dieſer Gang nicht minder nüzlich für ihn werden, als er ihm angenehm ſeyn muſs. Auf dem umgekehrten Wege verhält ſich alles ganz anders. Er wird viel öfter die Figur mit ſeinem Buchſtaben und Zeichen vergleichen, viel öfter nach dem zurückgelegten Theile des Wegs ſich umſehen, viel öfter ſich aufs neue orientiren müſſen, und doch nie eine gleiche Evidenz erreichen. Auch wird er, wenn er einmal den kürzeren Weg, den er auf ſolche Art, eben nicht ſehr reizend finden konnte, durchloffen hat, nicht leicht geneigt ſeyn, jezt erſt den längeren, dem Scheine nach, noch beſchwerlicheren, einzuſchlagen.

Wie

Wie aber dieser langsamere Gang für die Flüchtigkeit des fähigen Kopfs einen wohlthätigen Zaum abgiebt, so wirkt er auf die Trägheit des minder fähigen als ein reizender Sporn. Dieser wird, nämlich durch die diesem Gange eigenthümliche Vestigkeit und Sicherheit, durch die im Ganzen desselben so sichtbar herrschende Analogie am Leitfaden der systematischen Einheit, Anfangs fast ohne sein Mitwirken, ein Stück weit so fortgezogen, dass er beym Zurückblicken, wenn er nicht eigentlich dumm und völlig unfähig ist, das was er schon gethan hat, mit Verwunderung über den glücklichen Fortgang betrachten, und sich selbst in der Stille gestehen muss, dass er sich das nicht zugetrauet hätte. Dadurch aber muss sein Muth belebt, und sein Selbstvertrauen angefacht werden, dass er sich nun zusammennimmt, und den vesten Entschluss fasst, auf einem so sichern, so geebneten Wege weiter vorwärts zu dringen, dann aber auch alle seine Kräfte aufbietet, um an der Ausführung dieses Entschlusses mit beharrlichem Fleisse zu arbeiten. Auf dem umgekehrten Wege verhält sich auch hier alles umgekehrt. Der Träge und Unfähige wird gleich auf der ersten Strecke den ihm aufstossenden Schwierigkeiten erliegen, und Muth und Hoffnung, hier jemals etwas namhaftes auszurichten, ganz und auf immer aufgeben. Aus diesen Gründen ist also der Gang, den Euklides selbst genommen hat, im Durchschnitte für alle der angemessenste.

Noch

Noch ein Grund, warum ich diese Art des Vortrags der abgekürzten Darstellung vermittelst der Zeichen vorgezogen habe, ist der, weil ich, wie gleich zu Anfange des ersten Abschnitts bemerkt worden ist, die Elemente in einen weitern Wirkungskreis versezt, nicht blos für angehende Mathematiker bestimmt, sondern als die *wahre Wissenschaftslehre*, d. h. als das einzige allgemeine Vorbereitungsmittel auf jede Art wissenschaftlicher Beschäftigung angesehen und gebraucht wissen möchte. Diese Absicht aber stehet bey der abgekürzten Darstellung durch die allgemeinen Zeichen nicht zu erreichen. Denn in dieser Form wird das Buch von jedem Nicht-Mathematiker, als etwas blos für den Mathematiker gehöriges, blos diesen interessirendes, mit Gleichgültigkeit angesehen, wird nie ein Gegenstand seiner Aufmerksamkeit werden, und das unter dem scheinbaren Vorwande, als ob dem Buche schon durch seine Form die bestimmten Gränzen seines Wirkungsraumes in so ferne abgesteckt wären, wie ferne Beweise von dieser Form, wegen der Verschiedenheit der Gegenstände, in keiner andern Wissenschaft sich nachahmen oder anwenden liessen. Der angehende Rechtsgelehrte z. B. könnte mit einigem Scheine sagen: „Was helfen mir dergleichen Demonstrationen für meine Praxis, da die Deductionen, die man von mir verlangt, durchaus nichts mit ihnen gemein haben?“ Dies fällt bey dieser Art des Vortrags weg. Denn ich kann ihm antworten: „allerdings werden sie dir viel helfen, denn deine Deductionen

ctionen müſſen, wenn ſie etwas taugen ſollen, ganz die Form dieſer Demonſtrationen haben, müſſen, wie dieſe, aus Beyfall erzwingenden Schlüſſen beſtehen, die, wenn nicht aus unbeſtreitbaren, doch aus unumſtöſslichen Gründen gezogen ſind. Mag dann immerhin *der* Unterſchied zwiſchen beyden bleiben, daſs, während die längſte Demonſtration in den Elementen ſechs Seiten einnimmt, die kürzeſte Deduction vielleicht in eben ſo vielen Bogen enthalten iſt; da er ja doch, wenigſtens *für den Practicanten*, ſeinen Nuzen hat."

Und ſo, glaube ich, wäre mein Verfahren im Ganzen gerechtfertiget.

Die Ausgabe, die ich bey meiner Ueberſezung zum Grunde legte, iſt, wie man mit Rechte erwarten kann, die *Gregoryſche*: ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ. *Euclidis quae ſuperſunt omnia, ex recenſione* Dav. Gregorii etc. *Oxoniae* 1703. *fol.* Damit habe ich verglichen die Baſeler Ausgabe: ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ. ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥΣΕΙΩΝ. Εἰς τȣ αὐτȣ τον πρωτον ἐξηγηματων Προκλȣ βιβλ. δ. *Adjecta praefatiuncula, in qua de diſciplinis mathematicis non nihil. Baſileae apud* Jo. Hervagium. 1533. fol.

Von den vielen Ueberſezungen, die ich vor mir hatte, ſind die vorzüglichſten:

a) *lateiniſche*:

die von Clavius, Rom, 1589. 2 Bde. 8.

die

die von Barrow, London. 1685. 12.
die von Bärmann, Leipzig. 1743. 8.

b) *französische.*

die von Dechales. Paris 1683. 8.
die von Rohault, *a la Haye* 1690. 8.
die von Ozanam. Paris 1693. 8.

c) *deutsche*

die von Herrn Lorenz. Halle 1781. gr. 8.

Abänderungen habe ich, Druckfehler und andere Kleinigkeiten abgerechnet, mir keine erlaubt, ausser der einzigen, dass ich den ersten Saz des zehnten Buchs dem zweyten Saze des zwölften, bey dessen Beweise er zum erstenmale gebraucht wird, als einen Lehnsaz angehängt habe; weil ich ihm sonst keine schicklichere Stelle anzuweisen wusste. Dies ist zwar in so ferne eine Abweichung von der Gewohnheit des Euklides, als der erwähnte Saz in der Folge auch noch bey andern Beweisen gebraucht wird, was sonst bey den Lehnsäzen nicht der Fall ist, indessen glaube ich doch sie verantworten zu können.

Dass ich nur die sechs ersten Bücher sammt dem eilften und zwölften, mit Ausschliessung der übrigen übersezt habe, geschah aus keiner andern Ursache, als, weil ich versichert bin, dass die übrigen fast niemand mehr liesst; und eine neue Uebersezung ihnen nicht mehrere Leser verschaffen würde, weil sie, wegen der

in

in diesem Theile ganz veränderten Gestalt der neueren Mathematik für den grössten Theil der Studirenden wirklich entbehrlich sind, die wenigen aber, deren Beruf es fordert, sie auch zu kennen, sie entweder in den bereits vorhandenen Uebersezungen, oder in dem griechischen Texte selbst lesen können.

Die wichtigsten Gegenstände des oben versprochenen Commentars werden folgende seyn: Zuerst eine allgemeine Einleitung in das System des Euklides, mit ausführlicher Erläuterung seiner Methode, dann Berichtigungen des Textes, Ergänzungen, die in der Folge vorausgesezt werden, Erläuterungen, Analysen verwickelter Beweise, Einschaltungen von Säzen, die im Systeme des Euklides nicht gerade nöthig, aber doch für sich merkwürdig sind, weil sie entweder zur Vervollständigung von Euklids Untersuchungen beytragen, oder sonst in Beziehung auf Theorie oder Anwendung der Geometrie fruchtbar sind, Beyspiele von wichtigen Anwendungen der merkwürdigsten Säze, praktische Auflösungen der Aufgaben, und endlich Ergänzungen des Euklidischen Systems aus den Entdeckungen der späteren Geometer.

Dass ich nicht, wenigstens die Ausführung der wichtigsten dieser Gegenstände, gleich in den Text dieser Uebersezung eingerükt habe, geschahe deswegen, weil es in der Vollständigkeit, die ich mir dabey vorgesezt hatte, sich nicht thun liess, ohne das Buch mehr zu vergrössern, als aus andern Gründen räthlich war.

Noch

Noch muſs ich hier einen Fehler anzeigen, den ich bey der Durchſicht der erſten Hälfte des Abdrucks bemerkte. Es kommt nämlich etlichemal der Ausdruck vor: ein Parallelogramm *ergänzen*, wo es heiſsen ſollte: ein Parallelogramm *vollenden*. Nun ſind zwar die Bedeutungen der Worte: *ergänzen* und *vollenden* an und für ſich betrachtet, wenig unterſchieden, weil aber der Ausdruck: *Ergänzung eines Parallelogramms* beym Euklid in der Folge ſeine *eigene* Bedeutung hat, ſo erkläre ich jene Verwechſelung für ein Verſehen.

Marburg
den 8ten März 1797.

JOHANN KARL FRIEDRICH HAUFF,
Profeſſor der Mathematik und Phyſik.

TAFEL
der mathematischen Zeichen.

Begriff	*Zeichen.*	*Gebrauch.*
Gleichheit	$=$	$A = B$, d. i. die Grösse A ist der B gleich.
Ungleichheit	$\neq$	$A \neq B$, d. i. A und B sind ungleich.
Aehnlichkeit.	$\backsim$	$A \backsim B$, d. i. die A ist der B ähnlich.
Congruenz.	$\cong$	$A \cong B$, d. i. die A ist der B congruent.
Das Grössere.	$>$	$A > B$, d. i. die A ist grösser als die B.
Das Kleinere.	$<$	$A < B$, d. i. die A ist kleiner, als die B.
Addition.	$+$	$A + B$, d. i. A und B zusammen.
Subtraction.	$-$	$A - B$, d. i. A weniger B.
Multiplication	$\times$ oder (.)	$A \times B$, oder A.B, d. i. A multiplicirt mit B.
Division.	——	$\frac{A}{B}$ d. i. A dividirt durch B.
Rechter Winkel.	R.	$ABC = R$, d. i. A B C ist ein rechter Winkel.
Stumpfer Winkel.	$> R$	$ABC > R$, d. i. A B C ist ein stumpfer Winkel.
Spizer Winkel.	$< R$	$ABC < R$, d. i. A B C ist ein spizer Winkel.
Parallelismus.	$\#$	AB $\#$ CD, d. i. die A B ist der C D parallel.
Quadrat.	$\overline{}^q$ oder $\overline{}^2$	$\overline{AB}^q$, d. i. das Quadrat von A B.
Würfel.	$\overline{}^c$ oder $\overline{}^3$	$\overline{AB}^c$, d. i. der Würfel von A B.
Verhältniss.	(:)	A : B, d. i. A verhält sich zu B
Zweymal höheres Verhältniss.	$\overline{}^2 : \overline{}^2$	$\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, d. i. das zweymal höhere Verhältniss der Grösse A B zu der C D.
Dreymal höheres Verhältniss.	$\overline{}^3 : \overline{}^3$	$\overline{AB}^3 : \overline{CD}^3$, d. i. das dreymal höhere Verhältniss der Grösse A B zu der C D.
Rechteck aus zwey Linien.	$- \times -$	$AB \times CD$, d. i das Rechteck aus A B und C D.

EU-

EUKLIDS ELEMENTE.

ERSTES BUCH.

Erklärungen.

1. Ein Punkt ist, was keine Theile hat.
2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.
3. Die Gränzen der Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie ist eine solche, die gegen alle in ihr befindlichen Punkte einerley Lage hat.
5. Eine Fläche ist was nur Länge und Breite hat.
6. Die Gränzen der Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die gegen alle in ihr befindlichen Linien einerley Lage hat.
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweyer Linien gegeneinander, die in einer Ebene einander berühren, ohne in *einer* geraden Linie zu liegen.
9. Wenn die Linien, welche den Winkel einschliessen, gerade Linien sind, so heisst der Winkel ein geradelinigter.
10. Wenn eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, daſs sie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht, so ist jeder der gleichen Winkel, ein *rechter*, und die solchergestalt aufgestellte gerade Linie, heisst auf der andern *lothrecht*.

11. Ein *stumpfer* Winkel heiſst ein ſolcher, der gröſser, als ein rechter, iſt.

12. Ein *ſpizer* aber ein ſolcher, der kleiner, als ein rechter, iſt.

13. Die *Gränze* iſt das Aeuſſerſte eines Dings.

14. Eine *Figur* iſt, was in eine oder einige Gränzen eingeſchloſſen iſt.

15. Ein *Kreis* iſt eine von einer einzigen Linie, welche der *Umkreis* (die *Peripherie*) heiſst, ſo eingeſchloſſene Figur, daſs alle von einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte an den Umkreis gehende gerade Linien einander gleich ſind.

16. Dieſer Punkt heiſst des Kreiſes *Mittelpunkt*.

17. Der *Durchmeſſer* des Kreiſes, iſt eine durch den Mittelpunct gehende, nnd zu beyden Seiten durch den Umkreis begränzte gerade Linie, welche auch den Kreis halbirt.

18. Ein *Halbkreis* iſt eine von dem Durchmeſſer und dem durch dieſen abgeſchnittenen Kreisbogen eingeſchloſſene Figur.

19. Ein *Abſchnitt* des Kreiſes iſt, was zwiſchen einer geraden Linie und einem Kreisbogen eingeſchloſſen iſt.

20. *Geradlinigte* Figuren ſind ſolche, welche von geraden Linien eingeſchloſſen ſind.

21. *Dreyſeitige*, welche von dreyen

22. *Vierſeitige*, welche von vieren

23. *Vielſeitige*, welche von mehr, als vier, geraden Linien eingeſchloſſen ſind.

24. Von den dreyſeitigen Figuren iſt diejenige ein *gleichſeitiges Dreyeck*, welche drey gleiche Seiten hat.

25. Ein *gleichſchenklichtes* diejenige, welche nur zwey gleiche Seiten hat.

26. Ein

26. Ein *ungleichseitiges* diejenige, welche drey ungleiche Seiten hat.

27. Ferner ist von den dreyseitigen Figuren diejenige ein *rechtwinklichtes* Dreyeck, welche einen rechten Winkel,

28. Diejenige ein *stumpfwinklichtes*, welche einen stumpfen,

29. Diejenige ein *spizwinklichtes*, welche drey spize Winkel hat.

30. Von den vierseitigen Figuren, ist diejenige ein *Quadrat*, welche gleichseitig und rechtwinklicht ist.

31. Ein *länglichtes Viereck*, (*Rechteck*) welche zwar rechtwinklicht aber nicht gleichseitig ist.

32. Ein *Rhombus* (eine *Raute*) welche zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklicht ist.

33. Eine *Rhomboide*, in welcher die entgegengesezten Seiten und Winkel einander gleich sind, die aber weder gleichseitig noch rechtwinklicht ist.

34. Die übrigen vierseitigen Figuren, ausser den bisherigen, heissen *Trapezien*.

35. *Parallele* Linien sind solche gerade Linien, die in einerley Ebene liegen, und, so weit man sie nach beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Forderungen.

1. Von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine begränzte gerade Linie stetig in gerader Richtung zu verlängern.

3. Aus jedem Mittelpunkte und mit jeder Weite einen Kreis zu beschreiben.

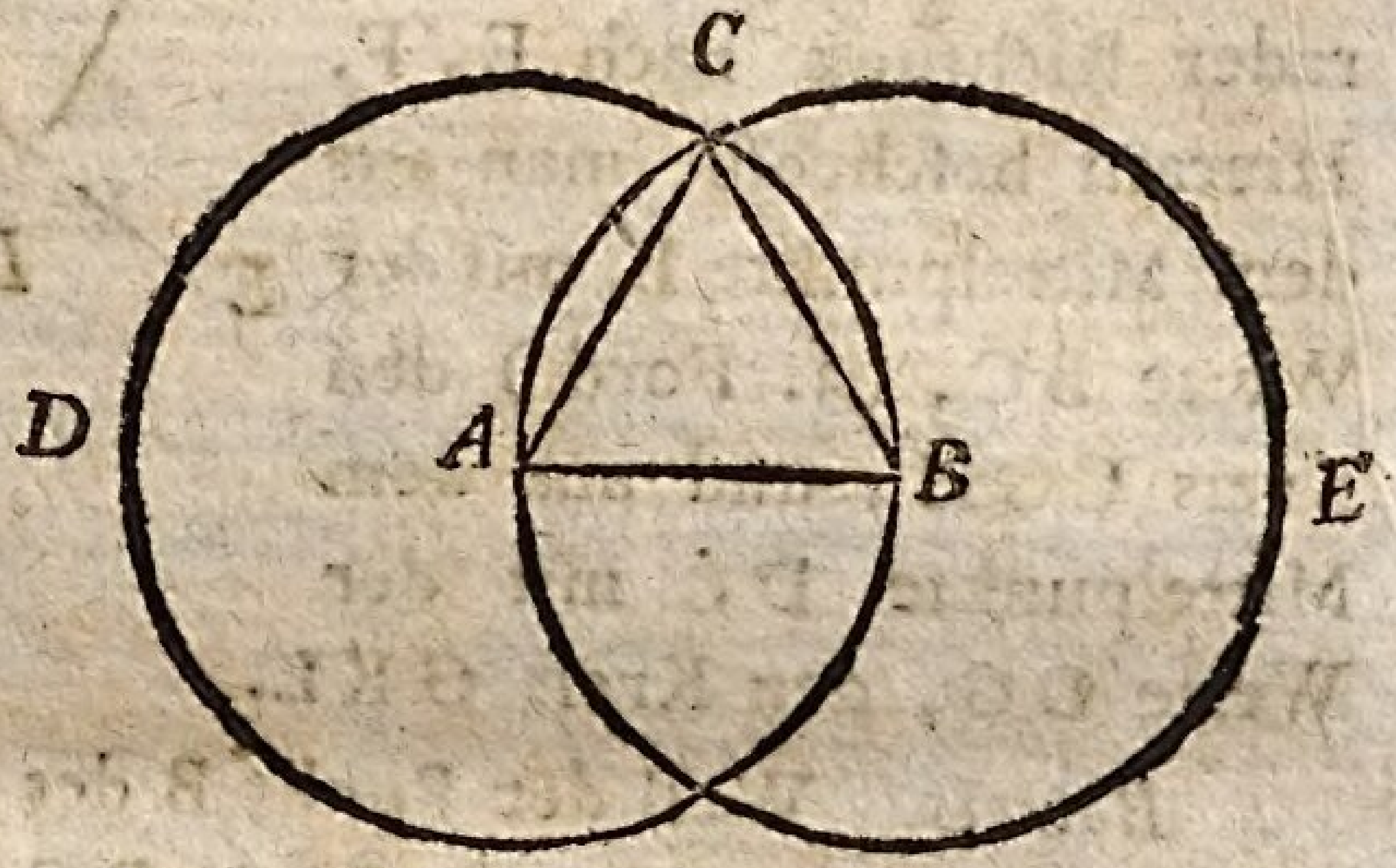
Grundsäze.

1. Dinge, die *einem* dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.
2. Wenn man zu gleichem gleiches hinzusezt, so sind die Ganzen gleich.
3. Wenn man von gleichem gleiches wegnimmt, so sind die Reste gleich.
4. Wenn man zu ungleichem gleiches hinzusezt, so sind die Ganzen ungleich.
5. Wenn man von ungleichem gleiches wegnimmt, so sind die Reste ungleich.
6. Die Doppelten von *einem* dritten sind einander gleich.
7. Die Hälften von *einem* dritten sind einander gleich.
8. Dinge, die einander decken, sind einander gleich.
9. Das Ganze ist grösser als sein Theil.
10. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
11. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass die beyden innern, an einerley Seite der schneidenden liegenden, Winkel kleiner als zwey rechte sind, so treffen die beyden geraden Linien, wenn man sie so weit, als nöthig ist, verlängert, an eben der Seite zusammen, an welcher die Winkel liegen, die kleiner als zwey rechte sind.
12. Zwey gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

1. Saz.

Aufgabe. Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Es sey AB eine gegebene begränzte gerade Linie, und man soll auf derselben ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben.



Auflösung. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte A, mit der Weite AB (3. Ford.) einen Kreis BCD, und aus dem Mittelpunkte B mit der Weite BA einen Kreis ACE, alsdann ziehe man von dem Punkte C, in welchem die beyden Kreise einander schneiden, nach den Punkten A und B die Linien CA, CB.

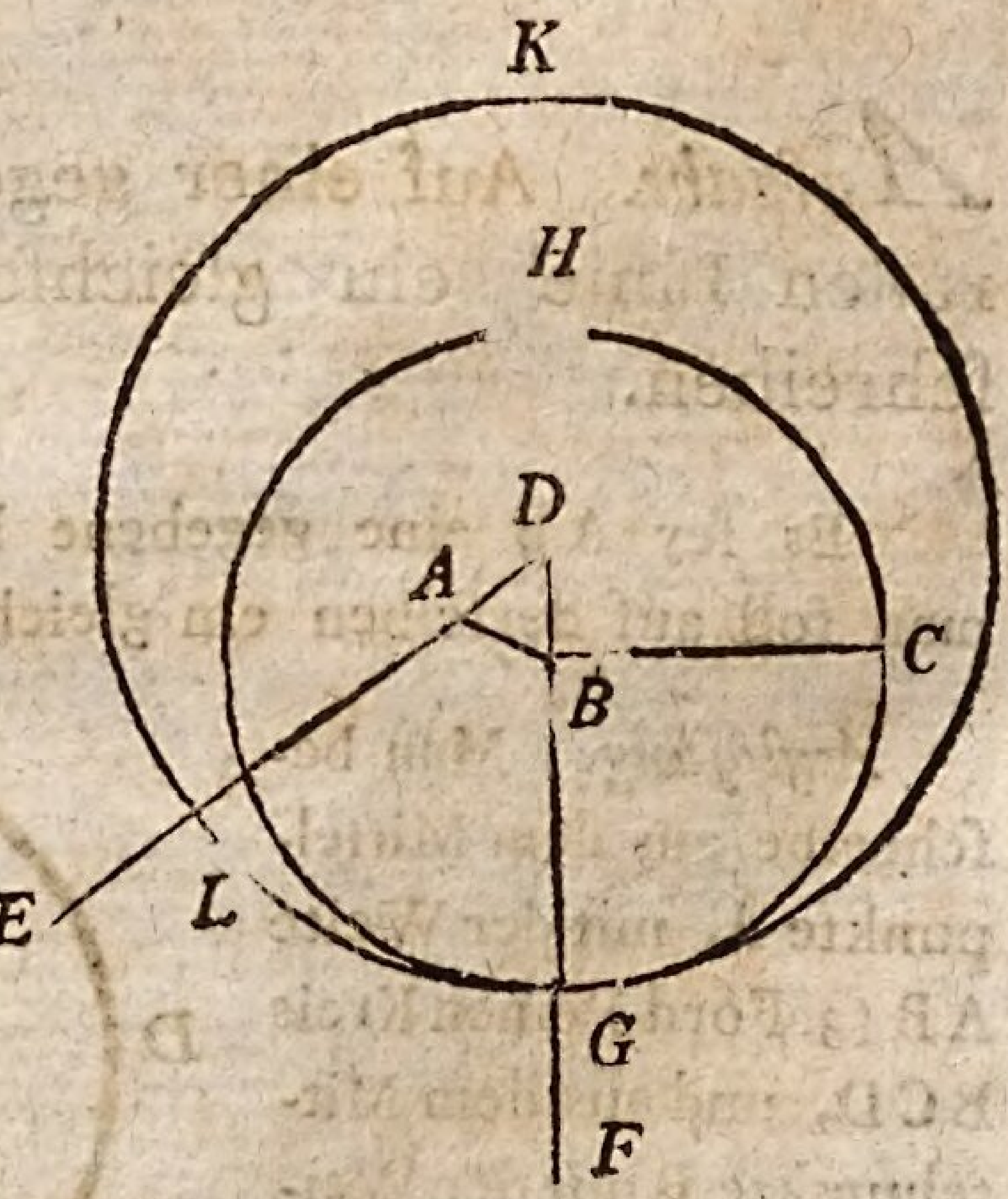
Beweis. Weil der Punkt A des Kreises CDB Mittelpunkt ist, so ist die Linie AC (15 Erkl.) der Linie AB gleich. Ferner, weil der Punkt B des Kreises CAE Mittelpunkt ist, so ist die Linie BC der BA gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die Linie AC der AB gleich sey; folglich sind die beyden CA, CB der dritten AB gleich. Dinge aber, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich; folglich ist auch die Linie CA der CB gleich, und mithin sind die drey Linien AC, AB, BC einander gleich. Demnach ist (24 Erkl.) das Dreyeck ABC gleichseitig, auch ist es auf der gegebenen begränzten geraden Linie AB beschrieben, was zu verrichten war.

2. *Saz.*

Aufgabe. An einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ſezen, die einer gegebenen geraden Linie gleich ſey.

Es ſey der gegebene Punkt A, die gegebene gerade Linie BC, und man ſoll an den Punkt A eine der BC gleiche gerade Linie ſezen.

Auflöſung. Man ziehe (1. Ford.) von dem Punkte A an den Punkt B die Linie AB, beſchreibe (1 Saz) auf derſelben das gleichſeitige Dreyeck DAB, und verlängere die Linien DA, DB in gerader Richtung nach E, F. Hierauf beſchreibe man aus dem Mittelpunkte B, mit der Weite BC, (3. Ford.) den Kreis CGH, und aus dem Mittelpunkte D, mit der Weite DG, den Kreis GKL.



Beweis. Weil der Punkt B des Kreiſes CGH Mittelpunkt iſt, ſo iſt (15. Erkl.) die Linie BC der BG gleich. Ferner, weil der Punkt D des Kreiſes GKL Mittelpunkt iſt, ſo iſt die Linie DL der DG gleich. Von dieſen aber iſt das Stück DA dem DB gleich, folglich iſt (3. Grundſ.) auch der Reſt AL dem Reſte BG gleich. Es iſt aber gezeigt worden, daſs der Linie BG die BC gleich ſey. Die beyden Linien AC, BC alſo ſind der dritten BG gleich. Dinge aber die einem dritten gleich ſind, ſind einander ſelbſt gleich; folglich iſt auch die Linie AL der BC gleich. Demnach iſt an den gegebenen Punkt A eine der gegebenen BC gleiche gerade Linie AL geſezt worden. w. z. v. w.

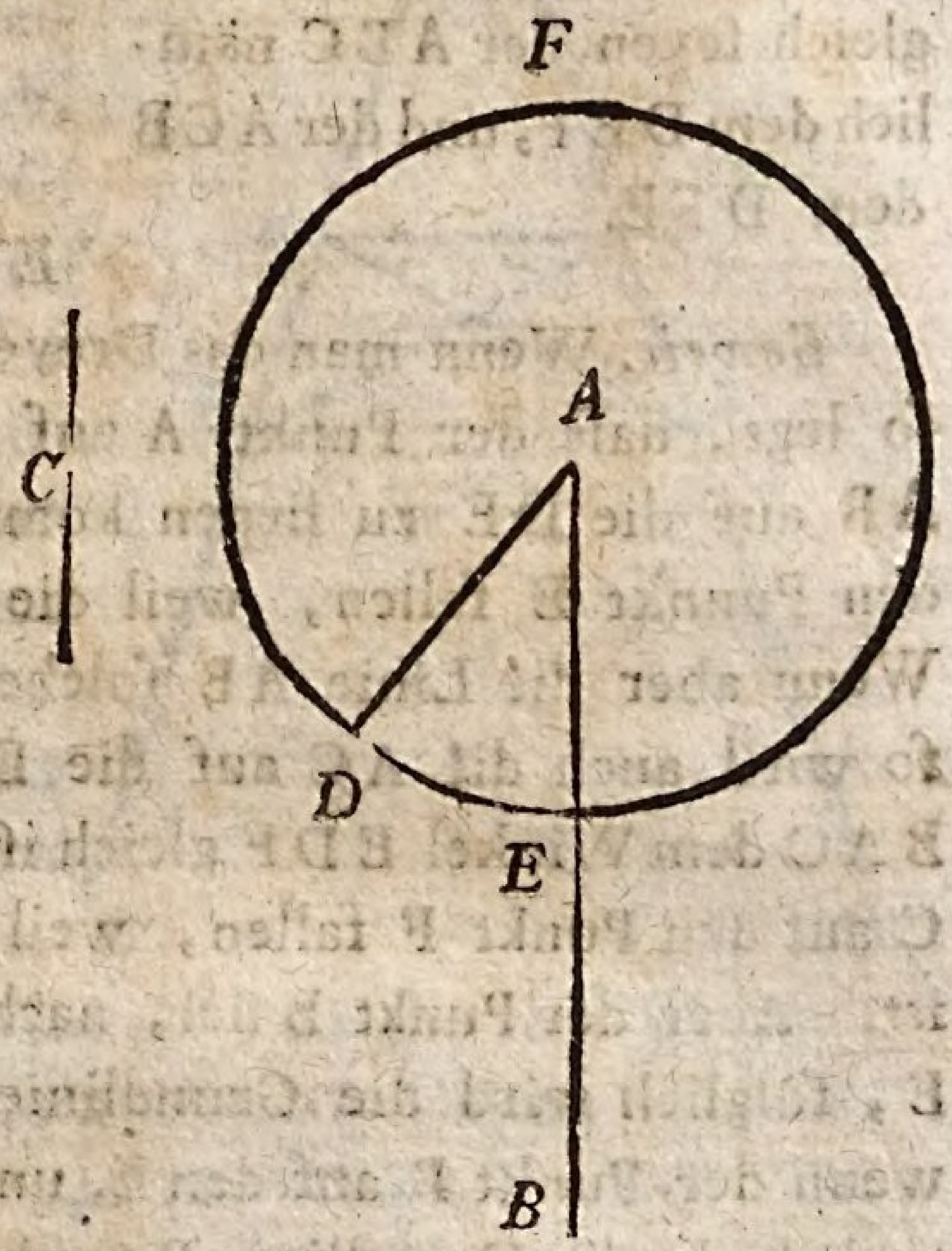
3. *Saz.*

Aufgabe. Wenn zwey ungleiche gerade Linien gegeben ſind, von der gröſſern ein der kleinern gleiches Stück abzuſchneiden.

Es

Es seyen die zwey gegebenen ungleichen geraden Linien AB, C und zwar sey AB die grössere, und man soll von der grössern AB ein der kleinern C gleiches Stück abschneiden.

Auflösung. Man seze an den Punkt A eine der C gleiche Linie AD (2. Saz) und beschreibe aus dem Mittelpunkte A mit der Weite AD den Kreis DEF (3. Ford.)



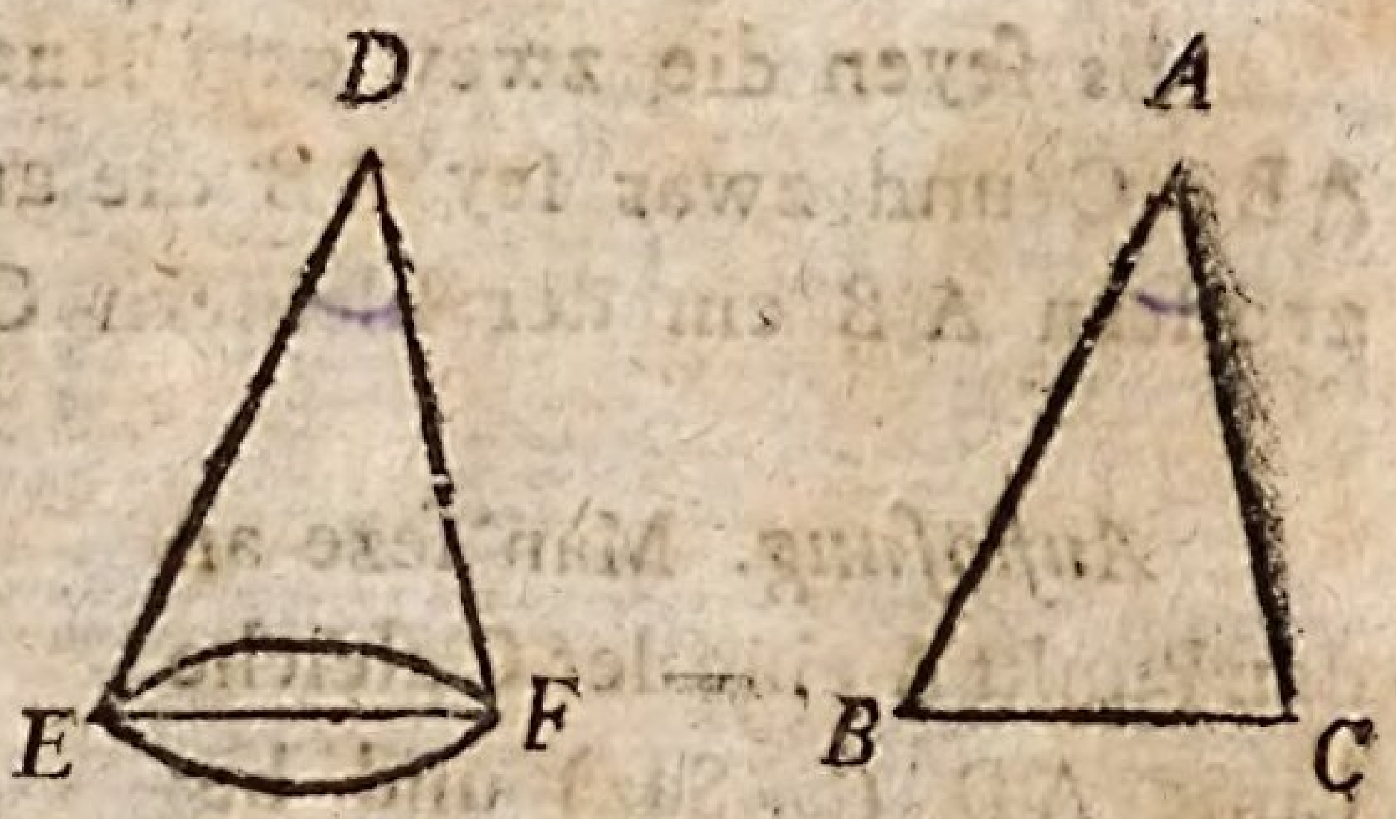
Beweis. Weil der Punkt A des Kreises DEF Mittelpunkt ist, so ist die Linie AE der AD gleich; folglich sind die beyden AE, C der dritten AD gleich; mithin ist auch die Linie AE der C gleich. Demnach ist, da zwey ungleiche gerade Linien AB, C gegeben waren, von der grössern AB ein der kleinern C gleiches Stück AE abgeschnitten worden. w. z. v. w.

4. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten und die von ihnen eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, so ist auch die Grundlinie des einen der Grundlinie des andern gleich und die ganzen Dreyecke, wie auch die übrigen Winkel beyder, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, sind einander gleich.

Es seyen in den zwey Dreyecken ABC, DEF, die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF stückweise gleich, die AB nämlich der DE und die AC der DF, auch sey der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich, so behaupte ich, dass auch die Grundlinie BC der Grundlinie EF, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke DEF gleich sey, wie auch, dass die übrigen Winkel der beyden

Drey-



Dreyecke, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander stückweise gleich seyen, der A B C nämlich dem D E F, und der A C B dem D F E.

Beweis. Wenn man das Dreyeck A B C auf das Dreyeck D E F, so legt, daſs der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AB auf die DE zu liegen kommt, so wird der Punkt B auf den Punnkt E fallen, weil die Linie AB der DE gleich ist. Wenn aber die Linie AB solchergestalt auf die DE paſst, so so wird auch die AC auf die DF passen, weil der Winkel B A C dem Winkel E D F gleich ist. Daher wird auch der Punkt C auf den Punkt F fallen, weil die Linie AC der DF gleich ist. Aber der Punkt B fiel, nach dem vorigen, auf den Punkt E, folglich wird die Grundlinie BC die EF decken. Denn wenn der Punkt B auf den E, und der Punkt C auf den F fiele, und doch die Grundlinie B C die EF nicht deckte, so müſsten zwey gerade Linien einen Raum einschlieſsen, welches (12. Grundſ.) unmöglich ist. Es wird also die Grundlinie B C die EF decken, und ihr gleich seyn, folglich wird auch das ganze Dreyeck ABC das ganze Dreyeck DEF decken und ihm gleich seyn, und mithin werden auch die übrigen Winkel beyder einander decken, und stückweise gleich seyn, der ABC nämlich dem DEF, und der ACB dem DFE.

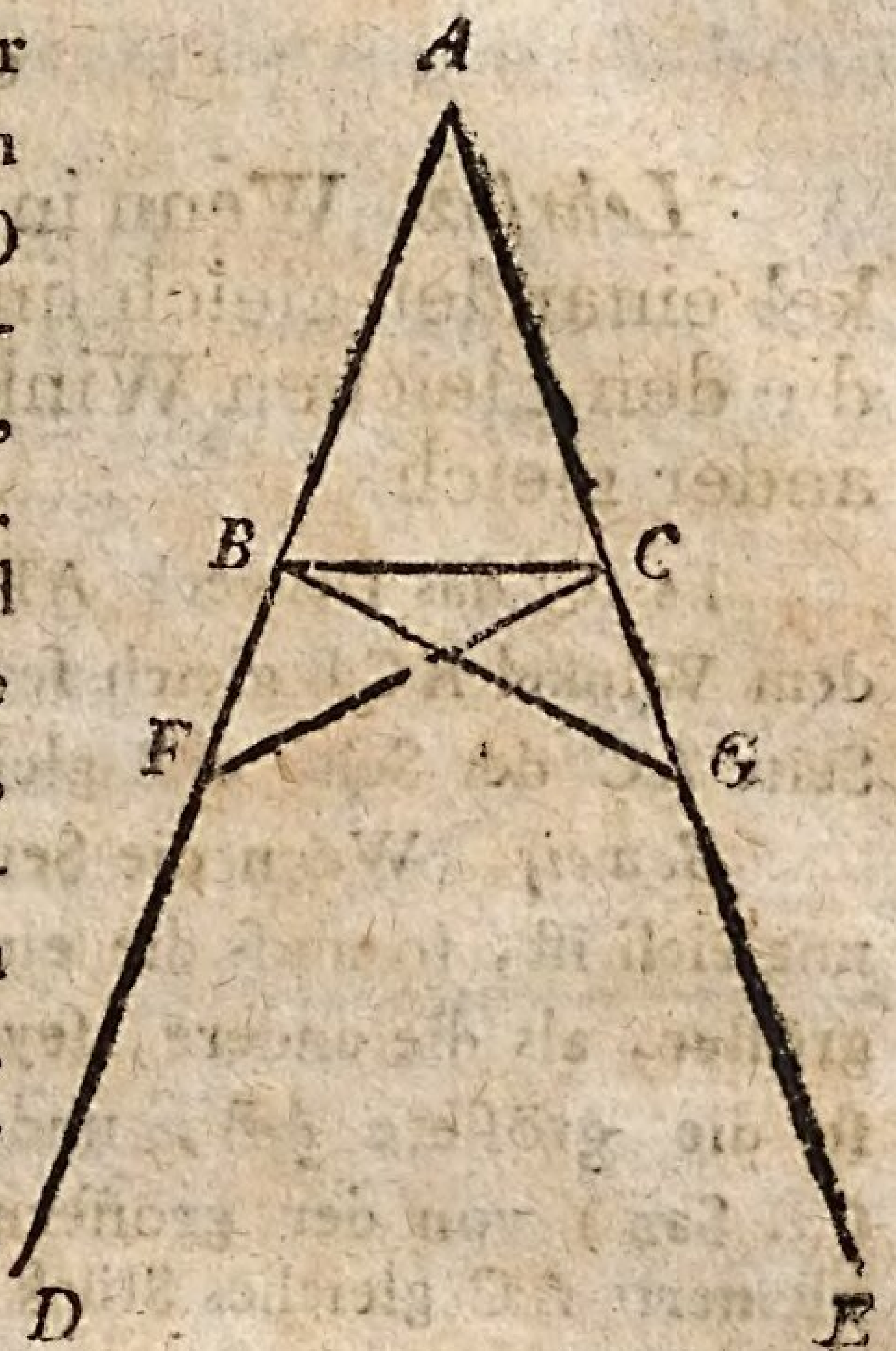
Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. wie zu erweisen war.

5. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichschenklichten Dreyecken sind die Winkel an der Grundlinie, und, wenn man die gleichen Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Es sey ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck, worin die Seite A B der A C gleich sey, und man seze (2. Ford.) an die AB, AC die BD, CE in gerader Richtung so behaupte ich, daſs der Winkel ABC dem Winkel ACB, und der Winkel CBD dem Winkel BCE gleich sey.

Be-



Beweis. Man nehme in der Linie BD nach Belieben einen Punkt F an, schneide (3 Saz.) von der grössern AE, ein der kleinern AF gleiches Stück AG ab, und ziehe die Linien CF, BG.

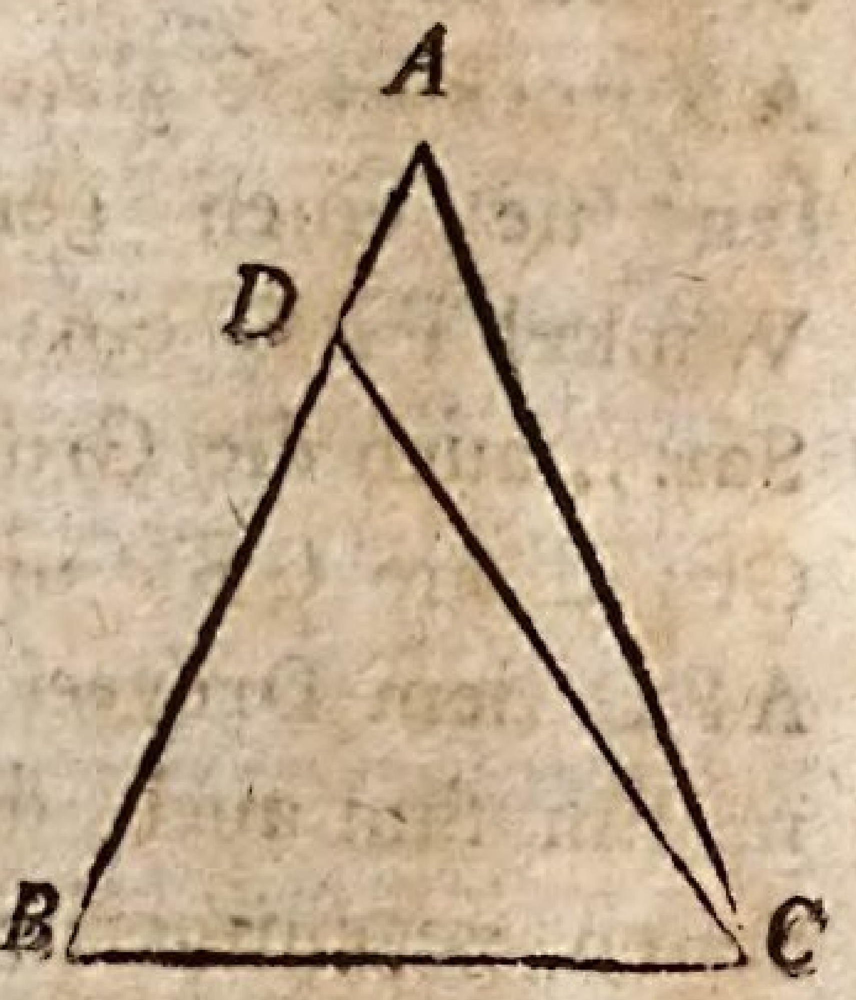
Weil nun die AF der AG und die AB der AC gleich ist, so sind die beyden AF, AC den beyden AG, AB stückweise gleich, auch schliessen sie einen gemeinschaftlichen Winkel FAG ein; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie FC der Grundlinie GB, und das Dreyeck AFC dem Dreyecke AGB gleich, mithin sind auch die übrigen Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander stückweise gleich, nämlich der Winkel ACF dem ABG, und der Winkel AFC dem AGB. Da ferner die ganze Linie AF der ganzen AG, und das Stück AB dem Stücke AC gleich ist, so ist auch (3 Grundſ.) der Rest BF dem Reste CG gleich. Es ist aber auch gezeigt worden, daſs die CF der BG gleich sey. Demnach sind die beyden BF, FC den beyden CG, BG stückweise gleich, auch ist der Winkel BFC dem Winkel CGB gleich, und beyde haben die BC zur gemeinschaftlichen Grundlinie; folglich ist (4. Saz) das ganze Dreyeck BFC dem ganzen Dreyecke CGB gleich, auch die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, sind einander stückweise gleich; Demnach ist der Winkel FBC dem Winkel GCB, und der Winkel BCF dem Winkel CBG gleich. Da nun gezeigt worden ist, daſs der ganze Winkel ABG dem ganzen Winkel ACF, und das Stück CBG dem Stücke BCF gleich sey, so ist (3 Grundſ.) auch der Rest ABC dem Reste ACB gleich, und diese sind die Winkel an der Grundlinie des Dreyecks ABC. Es ist aber auch gezeigt worden, daſs der Winkel FBC dem Winkel GCB gleich sey, und diese sind die Winkel unter der Grundlinie.

Demnach sind in gleichschenklichten Dreyecken u. s. w. W. z. e. w.

6 Saz.

Lehrſaz. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich ſind, ſo ſind auch die Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich.

Es ſey das Dreyeck ABC, in welchem der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich ſey, ſo behaupte ich, daſs auch die Seite AC der Seite AB gleich ſey.



Beweis. Wenn die Seite AB der AC ungleich iſt, ſo muſs die eine von beyden gröſſer, als die andere, ſeyn. Es ſey alſo die gröſſere AB, und man ſcheide (3. Saz) von der gröſſern AB ein der kleinern AC gleiches Stück DB ab, und ziehe die DC.

Weil nun die DB der AC gleich, und BC gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden DB, BC den beyden AC, CB ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel DBC dem Winkel ACB gleich; folglich iſt (4. Saz.) auch die Grundlinie DC der Grundlinie AB, und das Dreyeck ABC dem Dreyecke DCB, das heiſst das gröſſere dem kleinern, gleich, welches ungereimt iſt. Es iſt alſo die AB der AC nicht ungleich, folglich gleich.

Wenn demnach u. ſ. w. w. z. e. w.

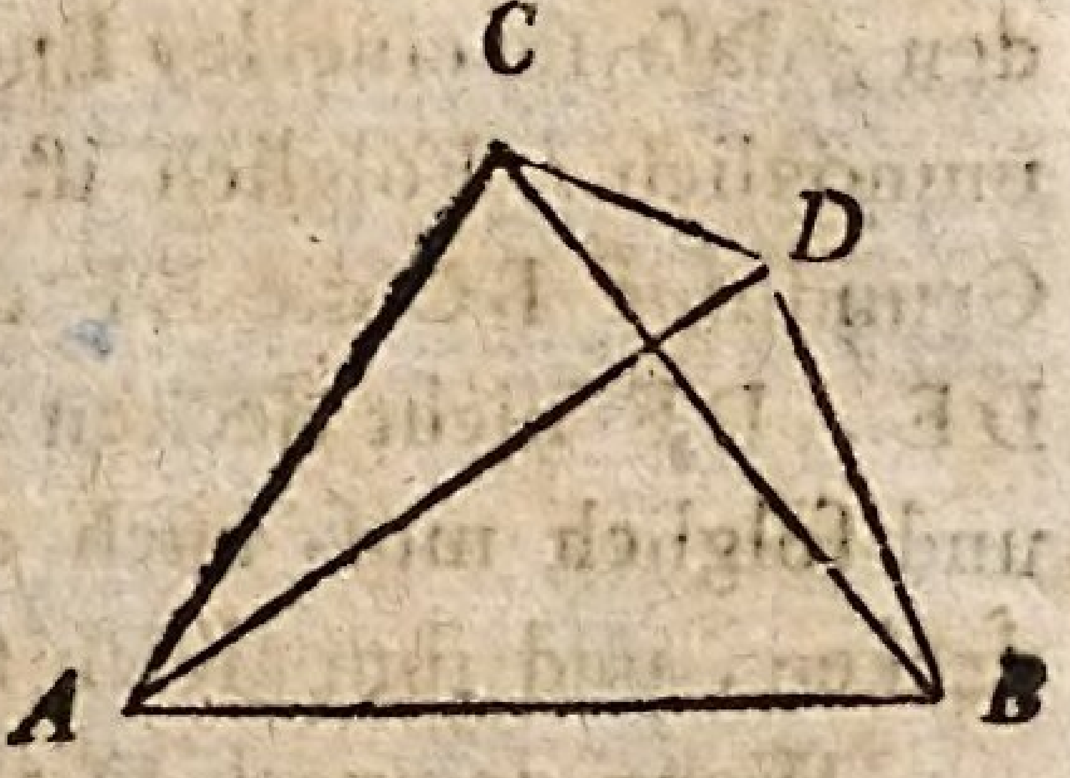
7. Saz.

Lehrſaz. Auf der nämlichen geraden Linie können nicht in verſchiedenen Punkten auf einerley Seite zwey Paare einander ſtückweiſe gleicher gerader Linien ſo aufgeſtellt werden, daſs ſie einerley Endpunkte hätten.

Es ſeyen, die Möglichkeit angenommen, auf der nämlichen geraden Linie AB in zwey verſchiedenen Punkten C, D an einerley Seite CD zwey Paare einander ſtückweiſe gleicher gerader Linien AC, CB und AD, DB, ſo aufgeſtellt, daſs ſie einerley Endpunkte A, B haben, die CA nämlich ſey der DA gleich, und habe mit ihr einerley Endpunkt A, und

die CB sey der DB gleich, und habe mit ihr einerley Endpunkt B, so ziehe man die CD.

Da nun die AC der AD gleich ist, so ist (5. Saz.) der Winkel ACD dem Winkel ADC gleich. Demnach ist der Winkel ADC grösser, als der DCB, und folglich ist noch vielmehr der Winkel CDB grösser, als der Winkel DCB. Da ferner die CB der DB gleich ist, so ist der Winkel CDB dem Winkel DCB gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass er auch viel grösser sey, als dieser, welches unmöglich ist.

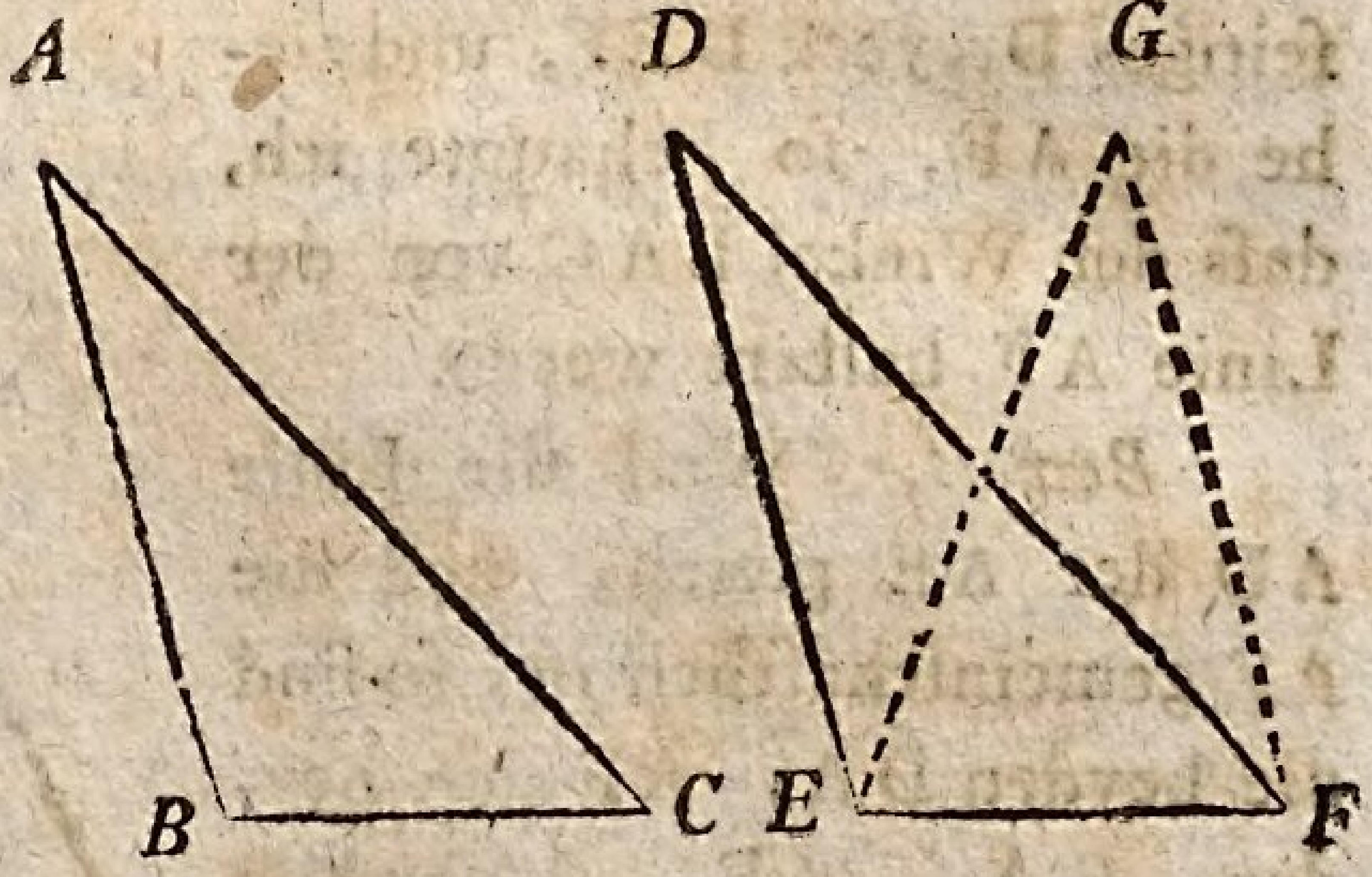


Demnach können u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

Lehrsaz Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, und es ist auch die Grundlinie des einen der Grundlinie des andern gleich, so ist auch in beyden der Winkel, der von den gleichen Seiten eingeschlossen wird, gleich.

Es seyen zwey Dreyecke ABC, DEF in welchen die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF stückweise gleich seyen, die AB nämlich der DE, und die AC der DF, auch sey die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich, so behaupte ich, dass auch der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich sey.



Beweis. Wenn man das Dreyeck ABC über das Dreyeck DEF so legt, dass der Punkt B auf den Punkt E, und die Linie BC auf die EF zu liegen kommt, so wird auch der Punct C auf den Punkt F fallen, weil die BC der EF gleich ist. Wenn aber solchergestalt die BC die EF deckt, so werden auch die BA, AC die ED, DF decken. Denn wenn zwar die Grundlinie AC die

Grund-

Grundlinie EF deckte, aber die Seiten BA, AC die Seiten ED, DF nicht deckten, sondern von ihnen abwichen, wie die EG, GF, so könnten auf der nämlichen geraden Linie in verschiedenen Punkten auf einerley Seite derselben zwey Paare einander stückweise gleicher gerader Linien so aufgestellt werden, dass sie einerley Endpunkte hätten. Dies ist aber (7. Saz) unmöglich. Folglich ist es auch unmöglich, dass, wenn die Grundlinie BC die EF deckt, die Seiten BA, AC die Seiten DE, DF nicht decken sollten. Sie müssen sie also decken, und folglich muss auch der Winkel BAC den Winkel EDF decken, und ihm gleich seyn.

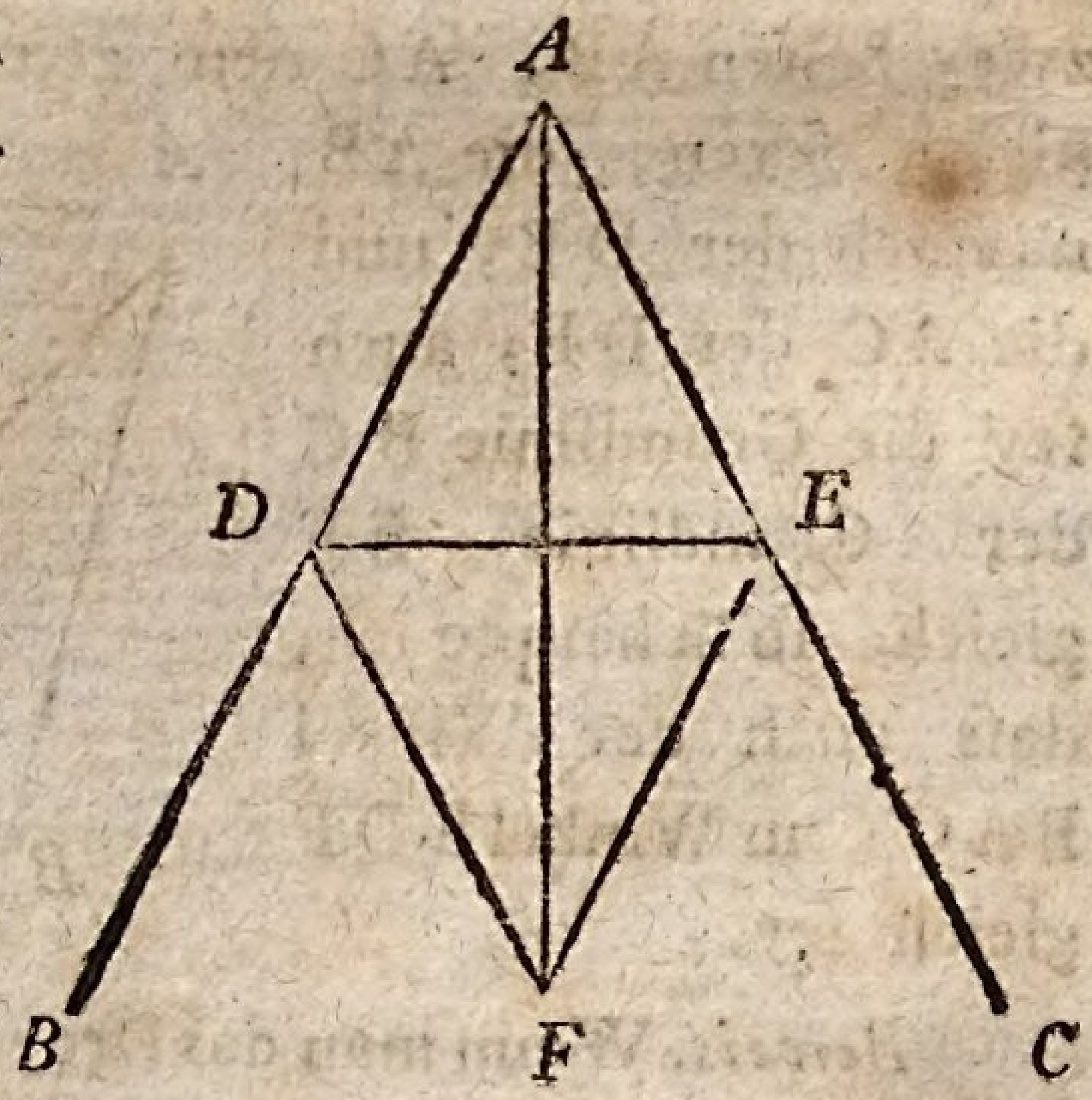
Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

9. *Saz.*

Aufgabe. Einen gegebenen geradlinigten Winkel zu halbiren.

Es sey der gegebene geradlinigte Winkel BAC, und man soll diesen halbiren.

Auflösung. Man nehme auf der Linie AB nach Belieben einen Punct D an, schneide (3. Saz.) von der Linie AC ein der AD gleiches Stück AE ab, und ziehe die DE. Hierauf beschreibe man (1. Saz) auf der DE ein gleichseitiges Dreyeck DEF, und ziehe die AF, so behaupte ich, dass der Winkel BAC von der Linie AF halbirt werde.



Beweis. Weil die Linie AD der AE gleich, und die AF gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DA, AF den beyden EA, AF stückweise gleich, auch ist die Grundlinie DF der Grundlinie EF gleich folglich ist auch (8 Saz) der Winckel DAF dem Winkel EAF gleich. Und mithin wird der gegebene geradlinigte Winkel BAC von der Linie AF halbirt; w. z. v. w.

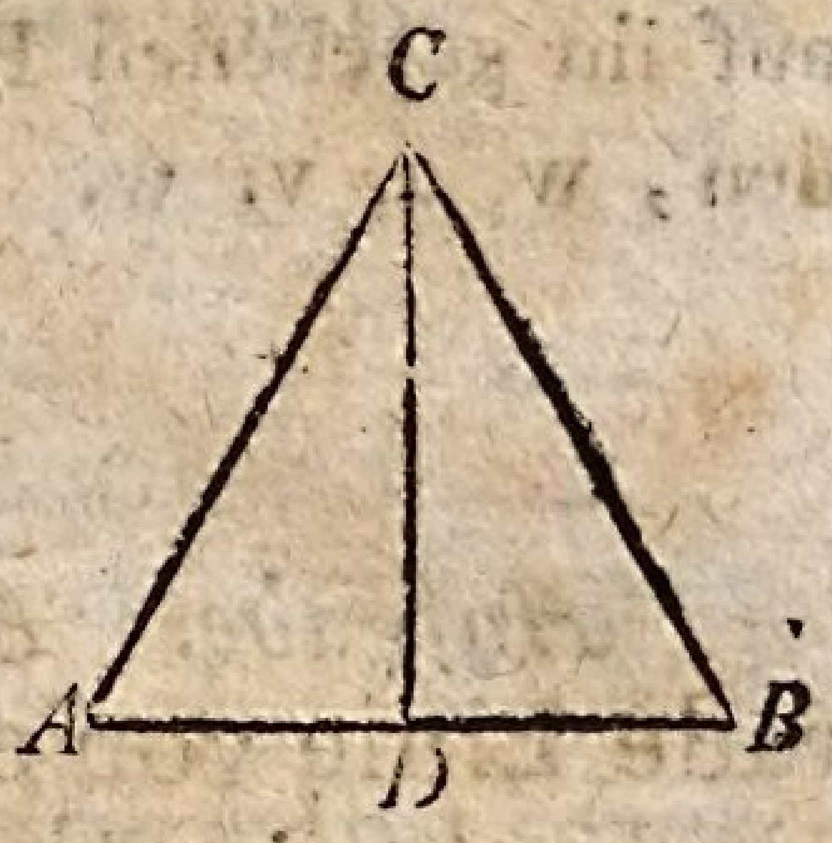
10. *Saz.*

10. *Saz.*

Aufgabe. Eine gegebene begränzte gerade Linie zu halbiren.

Es sey die gegebene begränzte gerade Linie A B, und man soll diese halbiren.

Auflösung. Man errichte (1. Saz) auf derselben ein gleichseitiges Dreyeck A B C, und halbire (9. Saz) den Winkel A C B durch die Linie C D, so behaupte ich, dass die gerade Linie A B in dem Punkte D halbirt werde.



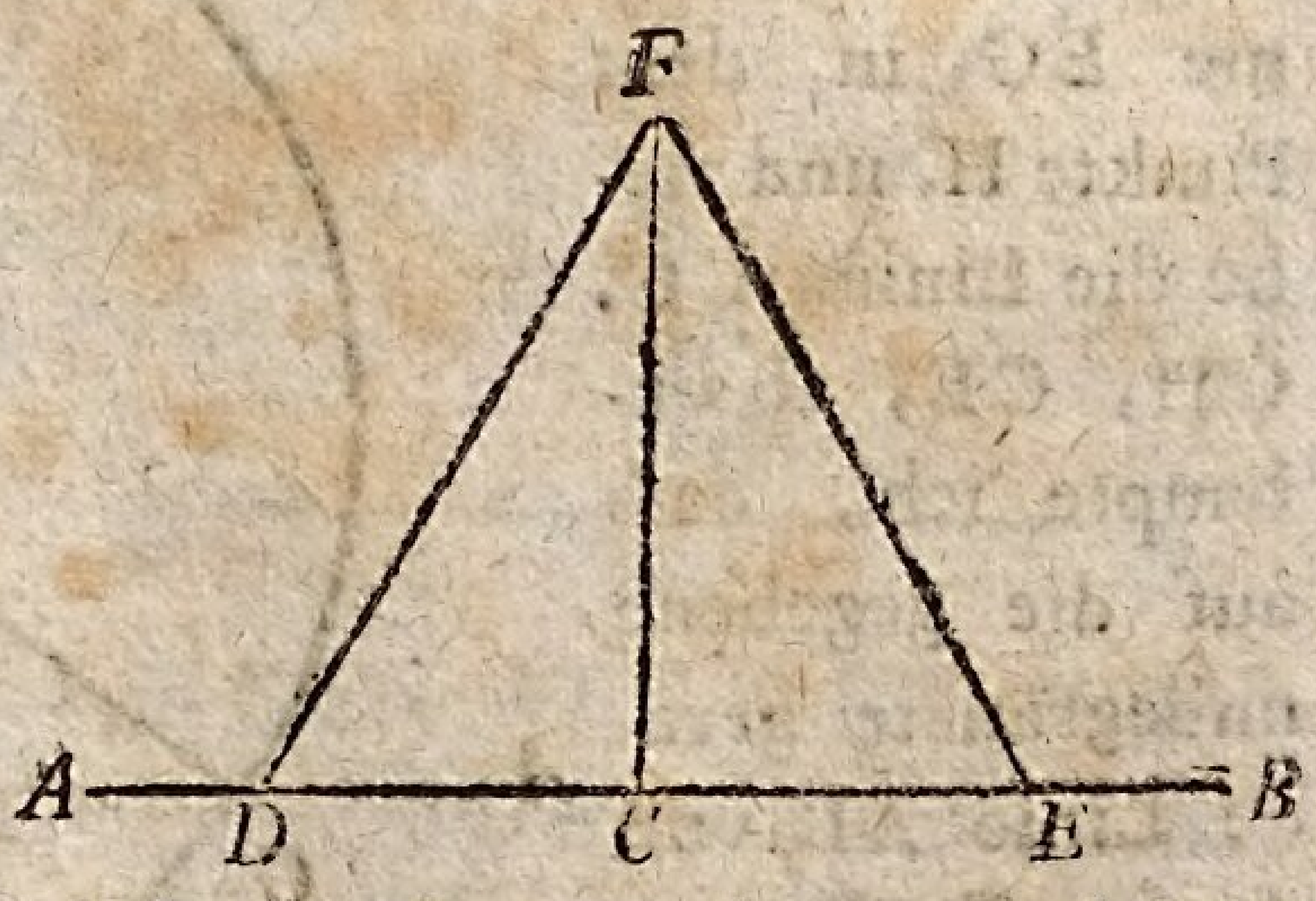
Beweis. Weil die Linie A C der C B gleich, und die C D gemeinschaftlich ist, so sind die beyden A C, C D den beyden B C, C D stückweise gleich, auch ist der Winkel A C D dem Winkel B C D gleich; folglich ist auch (4. Saz) die Grundlinie A D der Grundlinie B D gleich; Und mithin ist die gegebene begränzte gerade Linie A B in dem Punkte D halbirt. w. z. v. w.

11. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie, in einem auf ihr gegebenen Punkte, ein Loth aufzurichten.

Es sey die gerade Linie A B, und in derselben der Punkt C gegeben, und man soll in dem Punkte C ein Loth auf der A B aufrichten.

Auflösung. Man nehme in der Linie A C nach Belieben einen Punkt D an, und mache (3. Saz) die C E der C D gleich. Hierauf errichte man auf der D E (1. Saz) ein gleichseitiges Dreyeck F D E, und ziehe die F C, so behaupte ich, dass die F C in dem gegebenen Punkte C auf der gegebenen geraden Linie A B lothrecht errichtet sey.



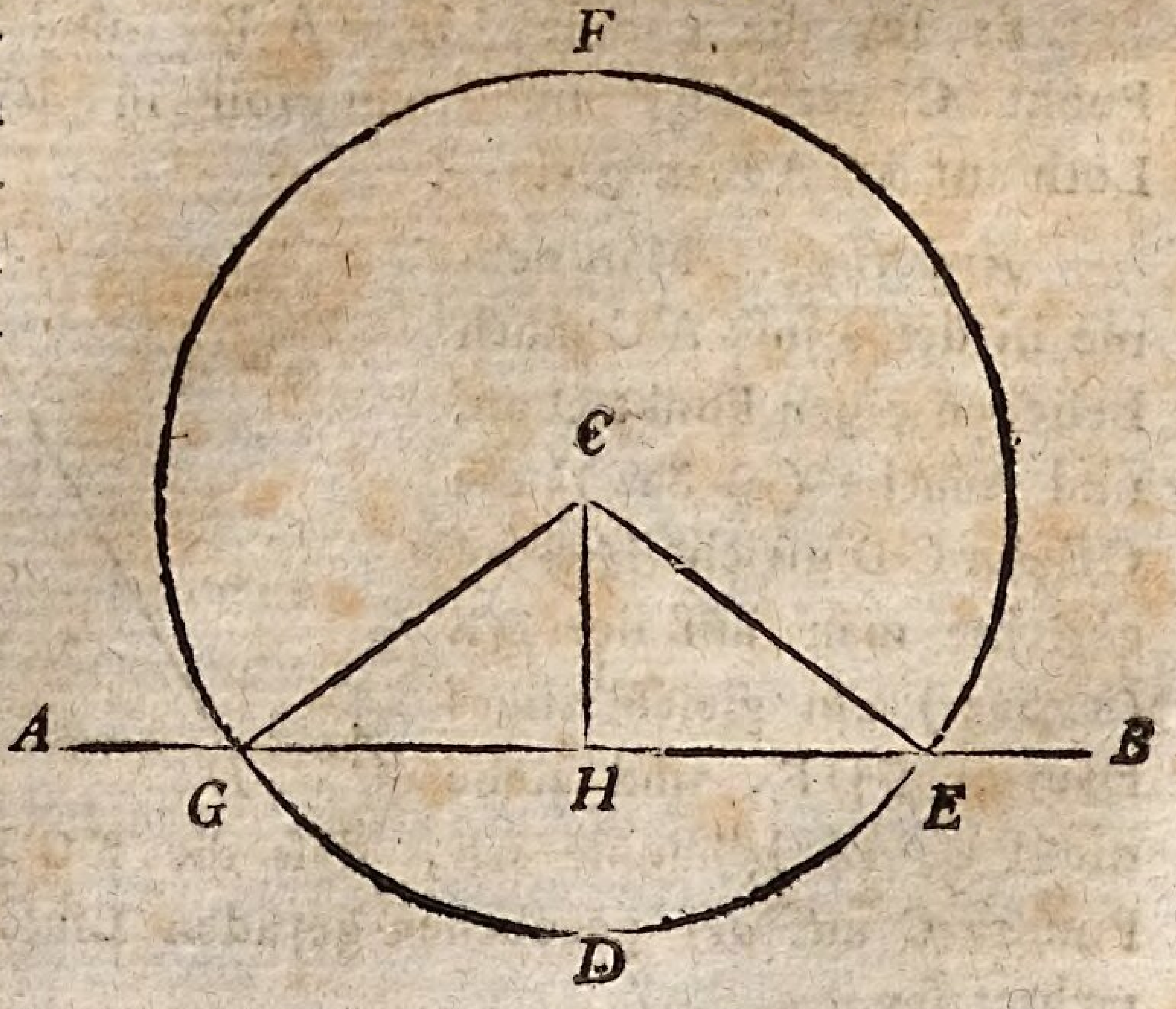
Beweis. Weil die Linie CD der CE gleich, und die FC gemeinſchaftlich iſt; ſo ſind die beyden DC, CF den beyden EC, FC ſtückweiſe gleich, auch iſt die Grundlinie DF der Grundlinie EF gleich; folglich iſt (8. Saz) auch der Winkel DCF dem Winkel ECF gleich, und dieſe Winkel ſind Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern ſo aufgeſtellt iſt, daſs ſie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht, ſo iſt (10. Erkl.) jeder der gleichen Winkel ein rechter. Folglich iſt jeder der beyden Winkel DCF, FCE ein rechter. Demnach iſt auf der gegebenen geraden Linie AB, in dem auf ihr gegebenen Punkte C, die FC lothrecht errichtet worden, w. z. v. w.

12. *Saz.*

Aufgabe. Auf eine gegebene unbegränzte gerade Linie von einem auſſer ihr gegebenen Punkte ein Loth zu fällen.

Es ſey die gegebene unbegränzte gerade Linie AB, und der gegebene, auſſer ihr befindliche, Punkt C, und man ſoll auf die gegebene unbegränzte gerade Linie AB, von dem auſſer ihr gegebenen Punkte C, ein Loth fällen.

Auflöſung. Man nehme auf der andern Seite der Linie AB nach Belieben einen Punkt D an, und beſchreibe aus dem Mittelpunkte C, und mit der Weite CD, (3. Ford.) einen Kreis EFG. Hierauf halbire man (10. Saz.) die Linie EG in dem Punkte H, und ziehe die Linien CG, CH, CE, ſo behaupte ich, daſs auf die gegebene unbegränzte gerade Linie AB von dem auſſer ihr gegebenen Punkte C das Loth CH gefällt worden ſey.



Be-

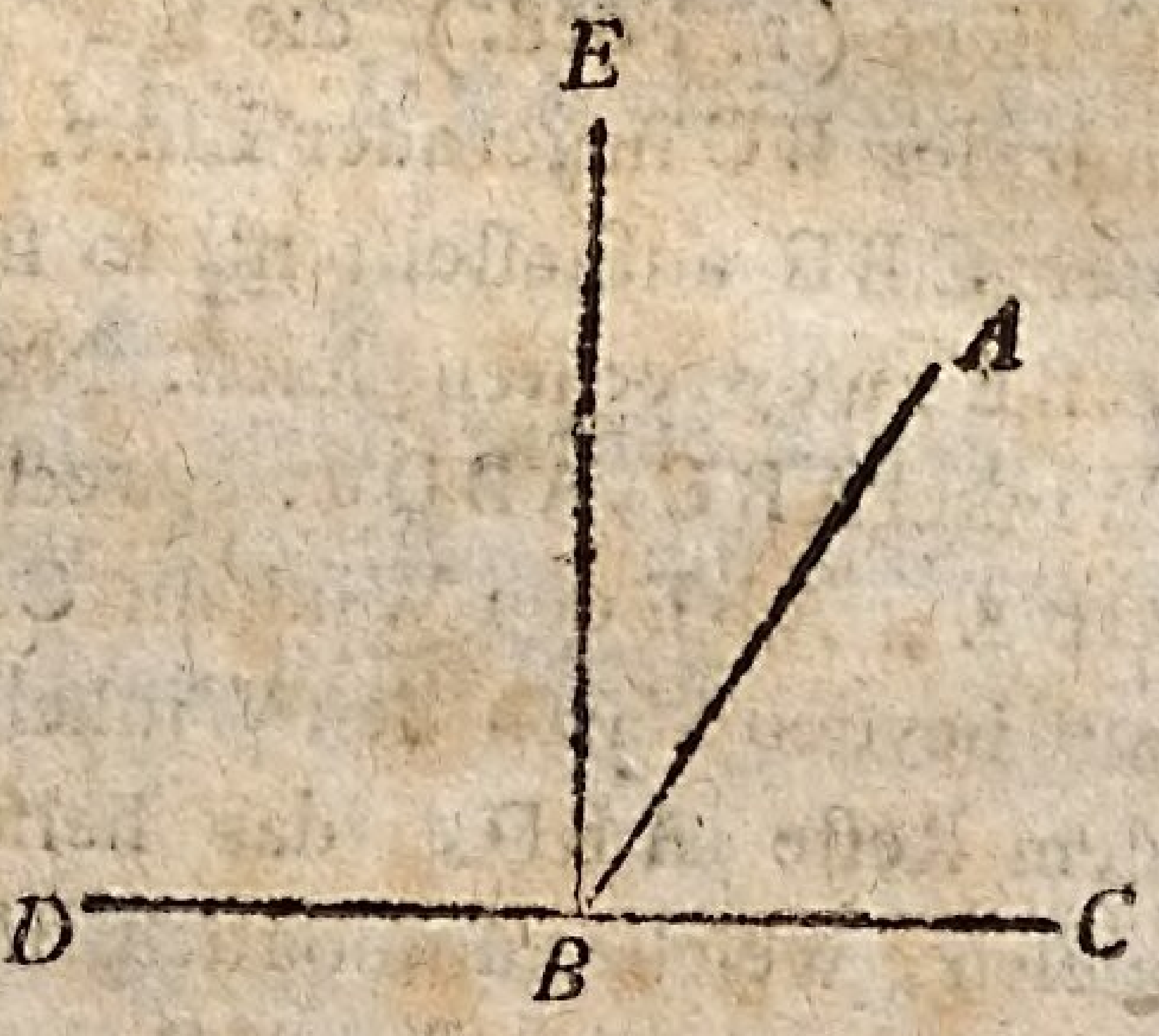
Beweis, Weil die Linie GH der HE gleich, die HC aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden GH, HC den beyden EH, HC stückweise gleich; auch ist (15. Erkl.) die Grundlinie CG der Grundlinie CE gleich; folglich ist (8. Saz.) auch der Winkel CHG dem Winkel EHC gleich, und diese Winkel sind Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht, so ist jeder der gleichen Winkel ein rechter, und die solchergestalt aufgestellte Linie heisst auf der andern lothrecht. Demnach ist, auf die gegebene unbegränzte gerade Linie AB von dem ausser derselben gegebenen Punkte C das Loth CH gefällt worden, w. z. v. w.

13. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie mit ihr Winkel macht, so sind diese Winkel entweder selbst zwey rechte, oder zwey rechten gleich.

Es sey die gerade Linie AB auf der CD so aufgestellt, dass sie mit ihr die Winkel CBA, ABD mache, so behaupte ich, dass diese Winkel entweder selbst zwey rechte, oder zwey rechten gleich seyen.

Beweis. Denn wenn der Winkel CBA dem Winkel ABD gleich ist, so sind (10. Erkl.) beyde rechte. Ist aber dies nicht, so errichte man (11. Saz.) in dem Punkte B auf die Linie DC die EB lothrecht, so sind die Winkel CBE, EBD zwey rechte. Da nun der Winkel CBE den beyden CBA, ABE gleich ist, so sind, wenn man auf beyden Seiten, den Winkel EBD hinzusezt, die Winkel CBE, EBD den drey Winkeln CBA, ABE, EBD gleich.



Da ferner der Winkel DBA den beyden DBE, EBA gleich ist, so sind, wenn man auf beyden Seiten den Winkel ABC hinzusezt, die Winkel DBA, ABC den drey Winkeln DBE, EBA, ABC gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die Winkel CBE, EBD den

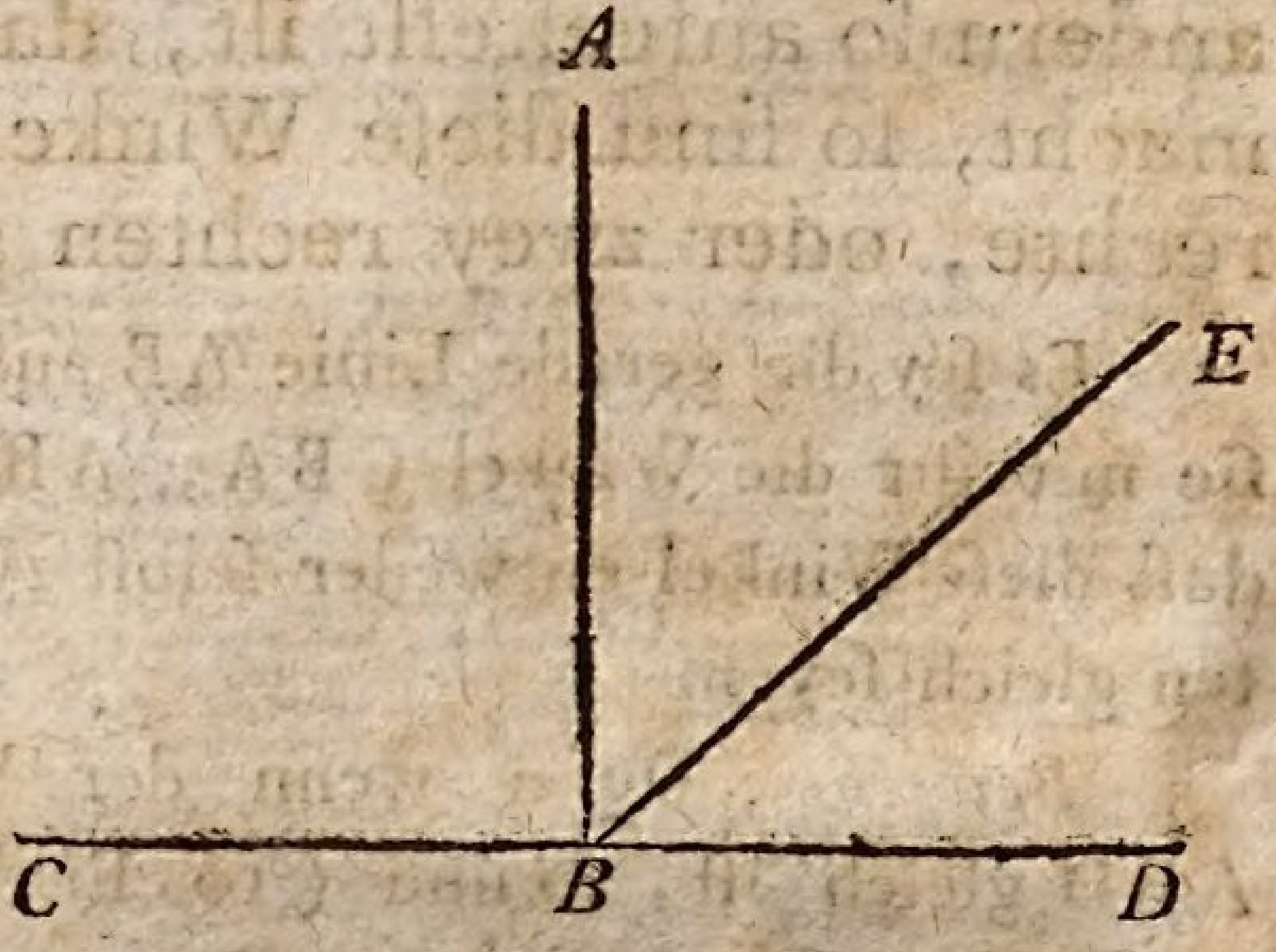
den nämlichen dreyen gleich seyen. Dinge aber die *einem* dritten gleich sind, sind einander selbst gleich. Folglich sind die Winkel CBE, EBD den Winkeln DBA, ABC gleich. Aber die Winkel CBE, EBD sind zwey rechte; folglich sind auch die Winkel DBA, ABC zwey rechten gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn mit einer geraden Linie in einem Punkte derselben zwey andere gerade Linien, die nicht nach einerley Seite zu liegen, Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich sind, so liegen die beyden geraden Linien in *einer* geraden Linie an einander.

Mit der geraden Linie AB in dem Punkte B derselben machen die beyden geraden Linien BC, BD die nicht nach einerley Seite zu liegen, die Nebenwinkel ABC, ABD zwey rechten gleich, so behaupte ich, dass die gerade Linie BD mit der CB in *einer* geraden Linie liege.



Beweis. Denn wenn nicht die BD mit der BC in *einer* geraden Linie liegt, so liege (2. Ford.) die BE mit der BC in gerader Linie. Weil nun die gerade Linie AB auf der CBE aufgestellt ist, so sind (13. Saz.) die Winkel ABC, ABE zwey rechten gleich. Nach der Vorausfezung aber sind die Winkel ABC, ABD zwey rechten gleich; folglich sind die Winkel CBA, ABE den Winkeln CBA, ABD gleich. Man nehme auf beyden Seiten den Winkel ABC weg, so ist der Rest ABE dem Reste ABD, das heisst, der kleinere dem grössern, gleich, welches unmöglich ist. Folglich liegt die gerade Linie BE nicht mit der BC in *einer* geraden Linie. Auf eben diese Art kann dies aber von jeder andern geraden Linie, ausser der BD, gezeigt werden; Folglich liegt die BD mit der CB in gerader Linie.

Wenn demnach u. s. w. w. e. z. w.

15. *Saz.*

15. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien einander schneiden, so machen sie die Scheitelwinkel einander gleich.

Die beyden geraden Linien AB, CD schneiden einander in dem Punkt E, so behaupte ich, dass der Winkel AEC dem Winkel DEB, und der Winkel CEB dem Winkel AED gleich sey.

Beweis. Weil die gerade Linie AE auf der CD aufgestellt ist, und mit ihr die Winkel CEA, AED macht, so sind (13. Saz) die Winkel CEA, AED zwey rechten gleich. Weil ferner die gerade Linie DE auf der AB aufgestellt ist und mit ihr die Winkel AED, DEB macht, so sind (13. Saz) die Winkel AED, DEB zwey rechten gleich. Es ist aber



gezeigt worden, dass die Winkel CEA, AED zwey rechten gleich seyen; Folglich sind die Winkel CEA, AED den Winkeln AED, DEB gleich. Man nehme auf beyden Seiten den gemeinschaftlichen Winkel AED weg, so ist der Rest CEA dem Reste BED gleich. Auf eben die Art aber kann auch gezeigt werden, dass die Winkel CEB, DEA einander gleich seyen.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn gerade Linien, so viel ihrer seyn mögen, einander schneiden, die Winkel an dem Durchschnittspunkte vier rechten gleich seyen.

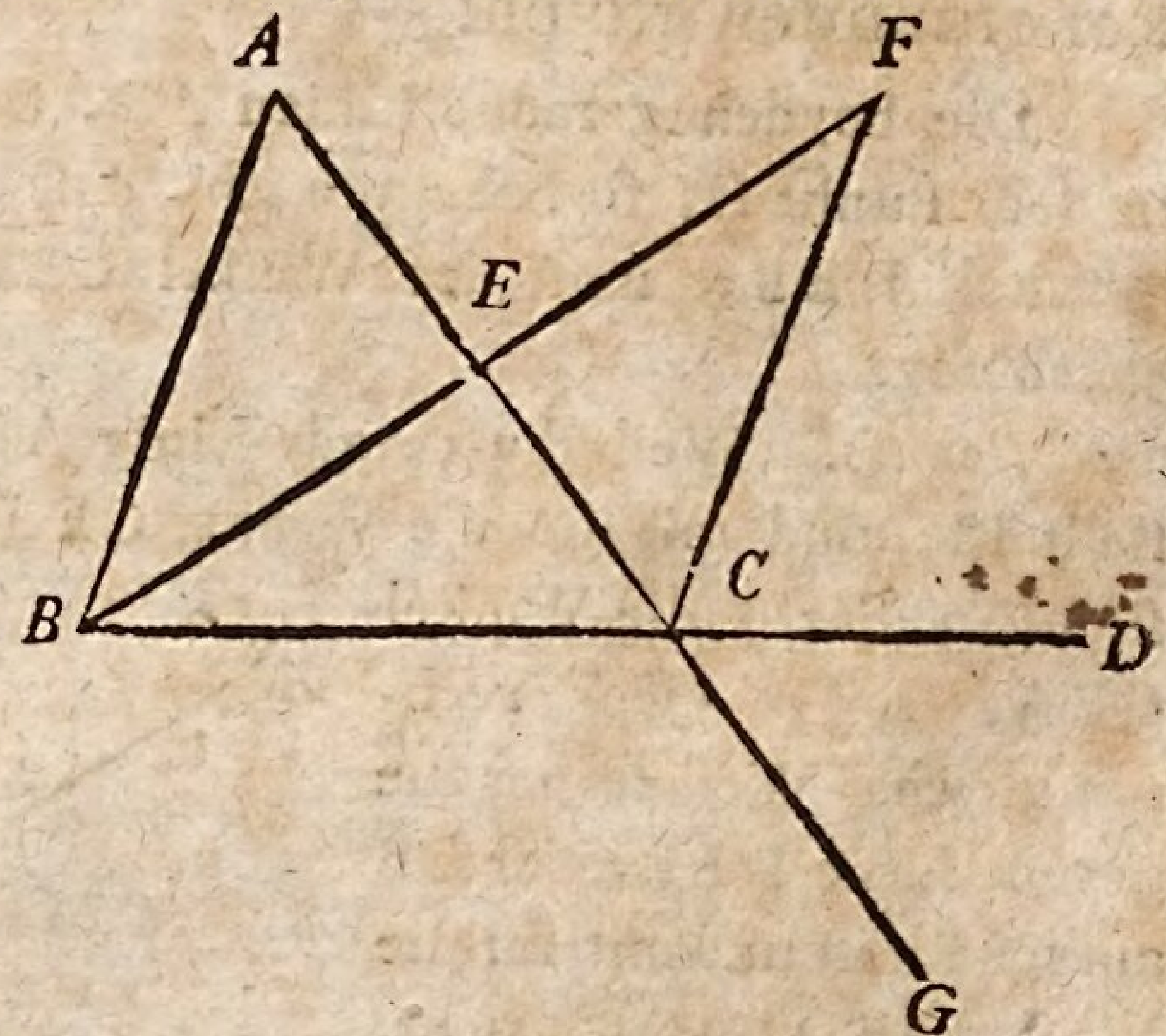
16. *Saz.*

Lehrsaz. An jedem Dreyecke ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der äussere Winkel grösser, als jeder seiner innern Gegenwinkel.

Es sey das Dreyeck ABC, und man verlängere eine seiner Seiten, die BC, bis nach D, so behaupte ich, dass der äusse-

re Winkel ACD gröſſer ſey, als jeder ſeiner innern Gegenwinkel CBA, BAC.

Beweis. Man halbire (10. Saz.) die AC in dem Punkte E, ziehe hierauf die BE, und verlängere ſie bis nach F, ſo daſs die EF der EB gleich wird, alsdann ziehe man die FC, und verlängere die AC bis nach G.



Da nun die AE der EC, und die BE der EF gleich iſt, ſo ſind die beyden AE, EB den deyden CE, EF ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel AEB dem Winkel FEC (15. Saz.) gleich, denn ſie ſind Scheitelwinkel; folglich iſt (4. Saz.) auch die Grundlinie AB der Grundlinie FC, und das ganze Dreyeck ABE dem ganzen Dreyecke FEC gleich, auch ſind in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, einander ſtückweiſe gleich; Folglich iſt der Winkel BAE dem Winkel ECF gleich. Aber (9. Grundſ) iſt der Winkel ECD gröſſer, als der Winkel ECF; folglich iſt auch der Winkel ACD gröſſer, als der Winkel BAE. Auf eben die Art kann nun, wenn man die Linie BC halbirt, gezeigt werden, daſs auch der Winkel BCG, das iſt (15. Saz.) der Winkel ACD, gröſſer ſey, als der Winkel ABC.

Demnach iſt an jedem Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

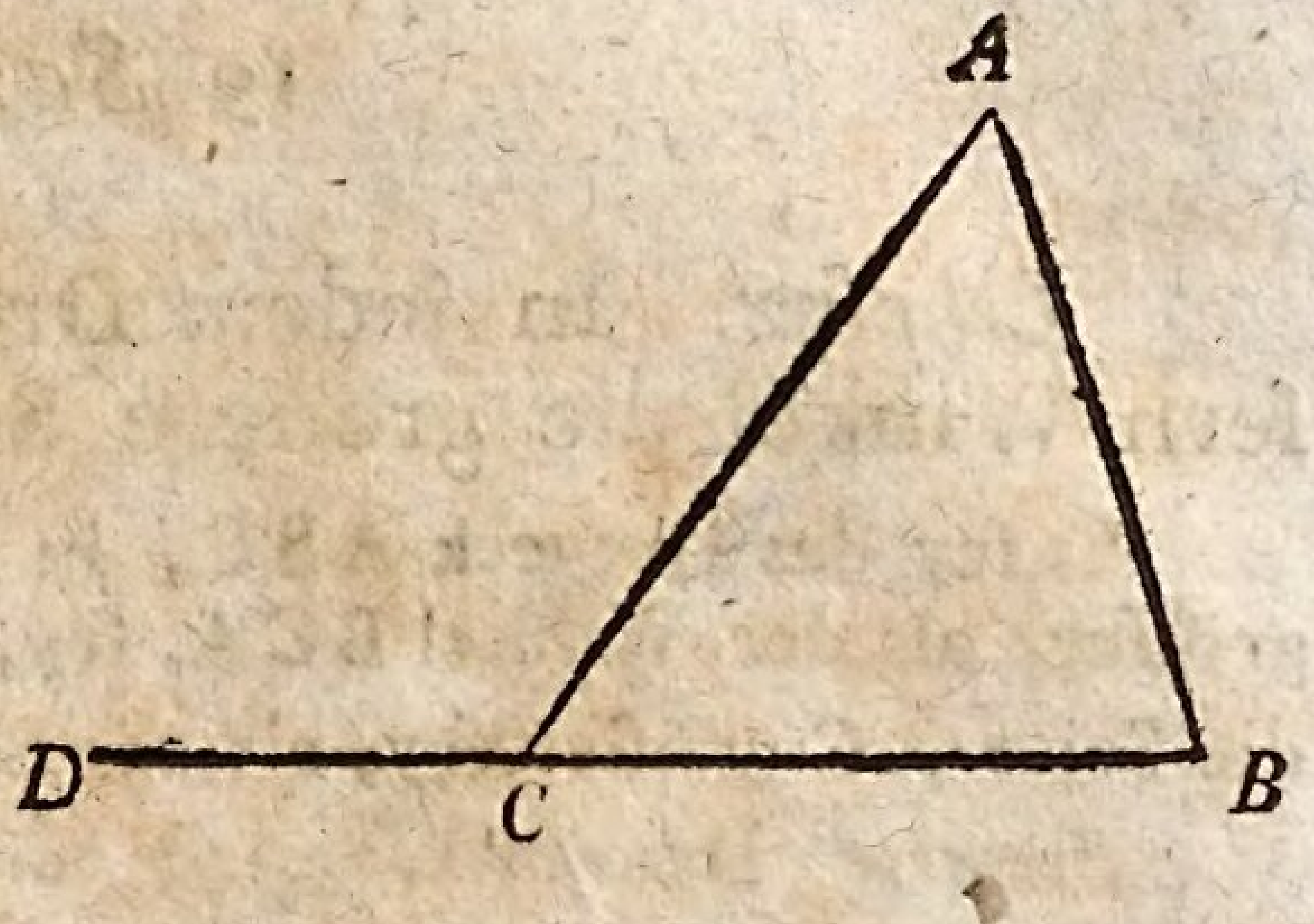
17. *Saz.*

Lehrſaz. In jedem Dreyecke ſind jede zwey Winkel zuſammen kleiner, als zwey rechte.

Es ſey das Dreyeck ABC, ſo behaupte ich, daſs jede zwey Winkel des Dreyecks ABC zuſammen kleiner ſeyen, als zwey rechte.

Be-

Beweis. Man verlängere (2. Ford.) die Seite B C nach D. Da nun A C D ein äuſſerer Winkel des Dreyecks A B C iſt, ſo iſt er (16. Saz.) gröſſer, als ſein innerer Gegenwinkel A B C. Man ſeze zu beyden den Winkel A C B hinzu, ſo ſind die Winkel A C D, A C B gröſſer, als die Winkel A B C, B C A. Aber die Winkel A C D, A C B ſind (13. Saz.) zwey rechten gleich; Folglich ſind die Winkel A B C, B C A kleiner, als zwey rechte. Eben ſo kann auch gezeigt werden, daſs die Winkel B A C, A C B, wie auch die Winkel C A B, A B C kleiner, als zwey rechte, ſeyen.

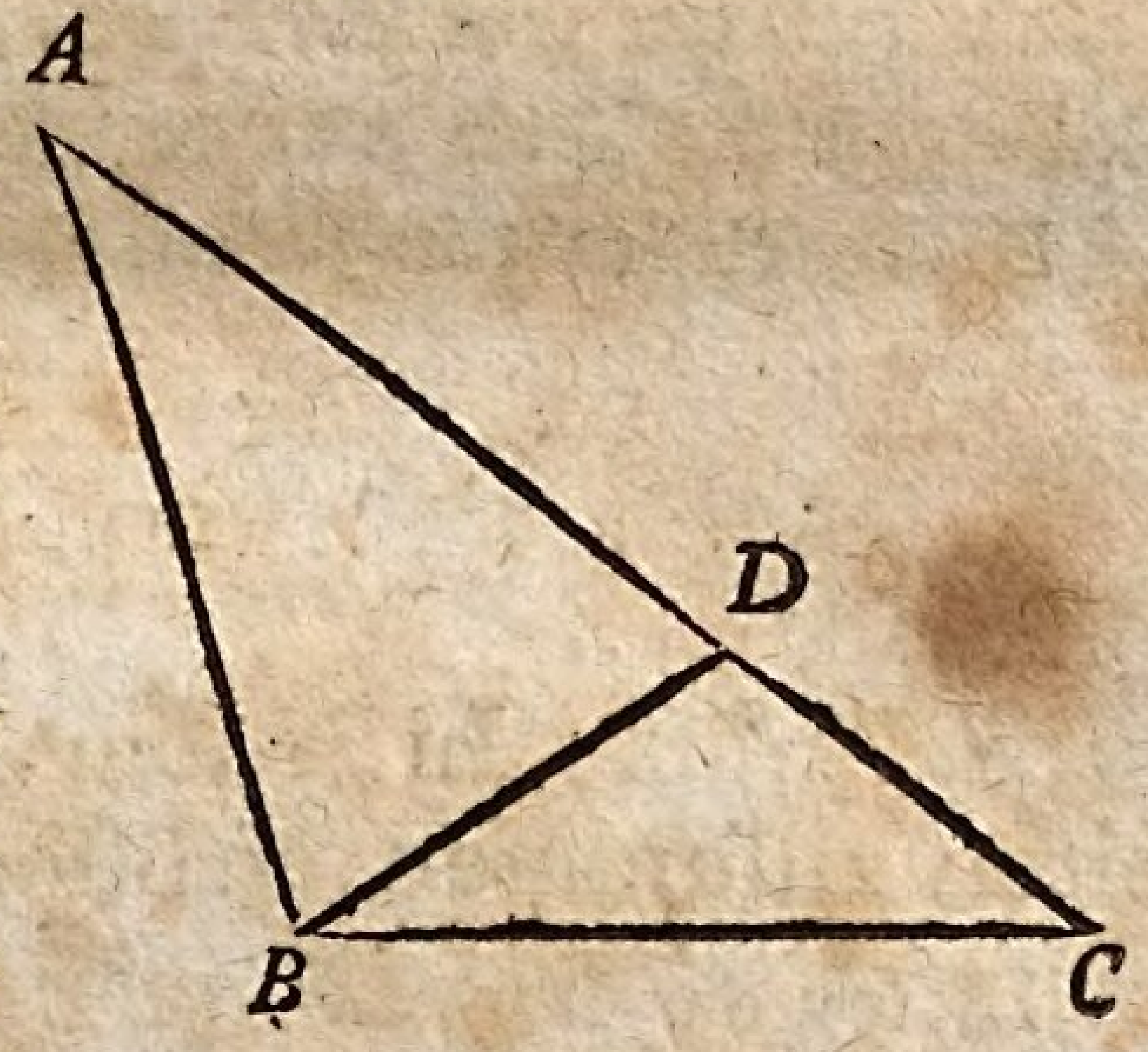


Demnach ſind in jedem Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Lehrſaz. In jedem Dreyecke liegt die gröſſere Seite dem gröſſern Winkel gegenüber.

Es ſey das Dreyeck A B C, in welchem die Seite A C gröſſer, als die Seite A B ſey, ſo behaupte ich, daſs auch der Winkel A B C gröſſer ſey, als der Winkel B C A.



Beweis. Da die Seite A C gröſſer iſt als die A B, ſo mache man (3. Saz.) die A D der A B gleich und ziehe die B D. Da nun der Winkel A D B ein äuſſerer Winkel des Dreyecks B D C iſt, ſo iſt er (16. Saz.) gröſſer, als ſein innerer Gegenwinkel D C B. Aber (5. Saz.) iſt der Winkel A D B dem Winkel A B D gleich, weil die Seite A B der A D gleich iſt; folglich iſt auch der Winkel A B D gröſſer, als der Winkel A C B, und mithin iſt noch vielmehr der Winkel A B C gröſſer, als der Winkel A C B.

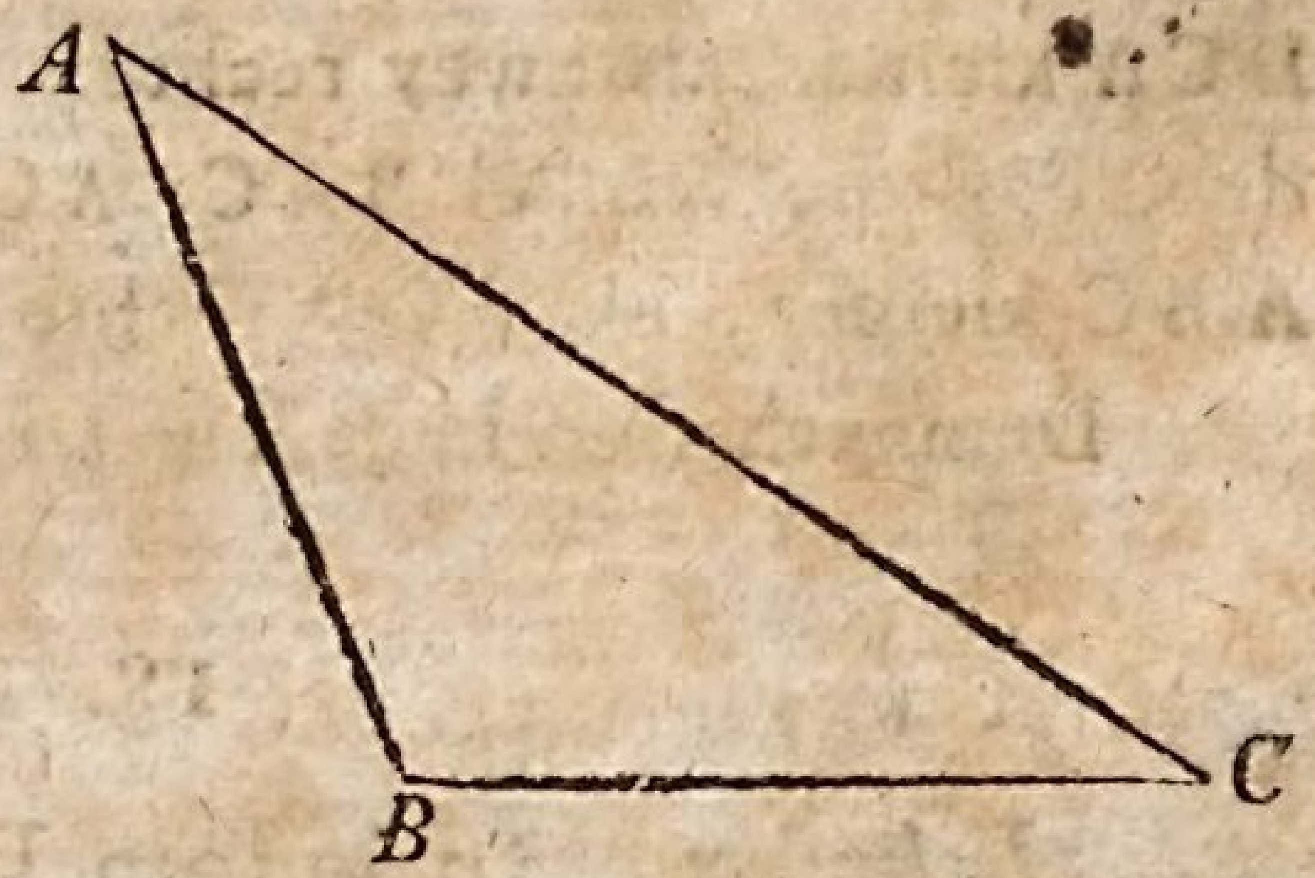
Demnach liegt in jedem Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

19 *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Dreyecke liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber.

Es sey das Dreyeck A B C, in welchem der Winkel A B C grösser, als der Winkel B C A, sey, so behaupte ich, dass auch die Seite A C grösser sey, als die Seite A B.

Beweis. Denn wäre nicht die Seite A C grösser, als die A B, so wäre sie entweder der A B gleich, oder kleiner, als die A B. Aber gleich kann die A C der A B nicht seyn, denn sonst wäre (5. Saz.) auch der Winkel A C B dem Winkel A B C gleich. Dies ist er aber nicht; folglich ist auch die Seite A C der A B nicht gleich. Eben so wenig aber ist die Seite A C kleiner, als die A B; denn sonst wäre (18. Saz.) auch der Winkel A B C kleiner, als der Winkel A C B. Dies ist er aber nicht; folglich ist auch die Seite A C nicht kleiner als die A B. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch nicht gleich sey; Folglich ist die Seite A C grösser, als die A B.



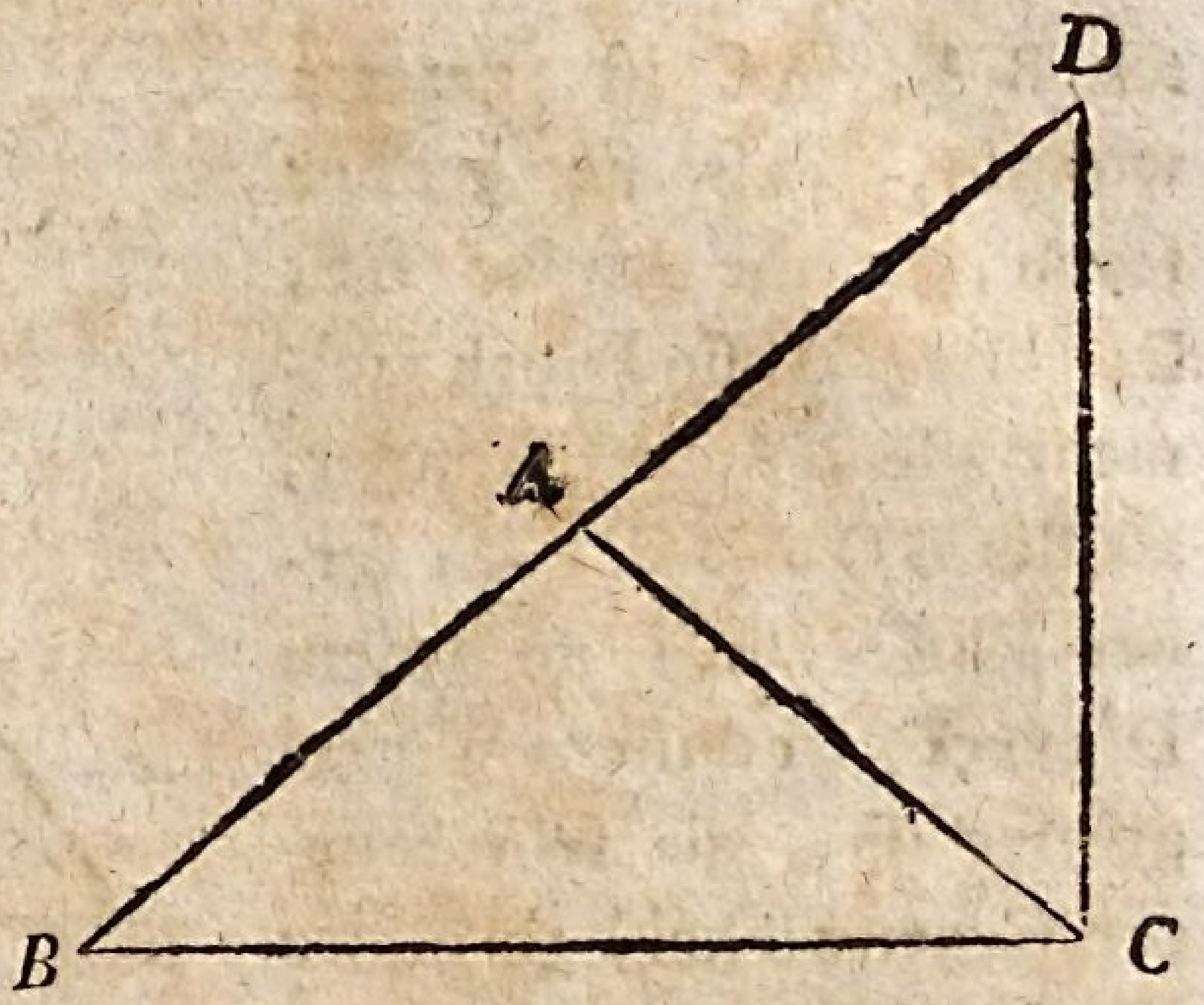
Demnach liegt in jedem Dreyecke u. s. w. w. z. e. w.

20. *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammen grösser, als die dritte.

Es sey das Dreyeck A B C, so behaupte ich, dass in dem Dreyecke A B C jede zwey Seiten zusammen grösser seyen, als die dritte, nämlich die B A, A C grösser als B C, die A B, B C grösser als A C, und die B C, C A grösser als A B.

Beweis. Man verlängere die Seite B A nach D, mache (3. Saz.) die D A der C A gleich, und ziehe die D C. Da nun die D A der A C gleich ist, so ist (5. Saz.) auch der Winkel A D C dem Winkel A C D gleich. Es ist aber (9. Grunds.) der Winkel BCD grösser, als der Winkel ACD, folglich ist auch der Winkel BCD grösser, als der Winkel ADC. Weil nun in dem Dreyecke DCB der-



der Winkel BCD grösser ist, als der Winkel BDC, und (19. Saz.) dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüberliegt, so ist die Seite DB grösser, als die BC. Es ist aber die Seite BD den Seiten AB, AC gleich; Folglich sind die Seiten BA, AC zusammen grösser, als die BC. Auf eben die Art aber kann auch gezeigt werden, dass die Seiten AB, BC zusammen grösser als, die CA, und die BC, CA zusammen grösser, als die AB seyen.

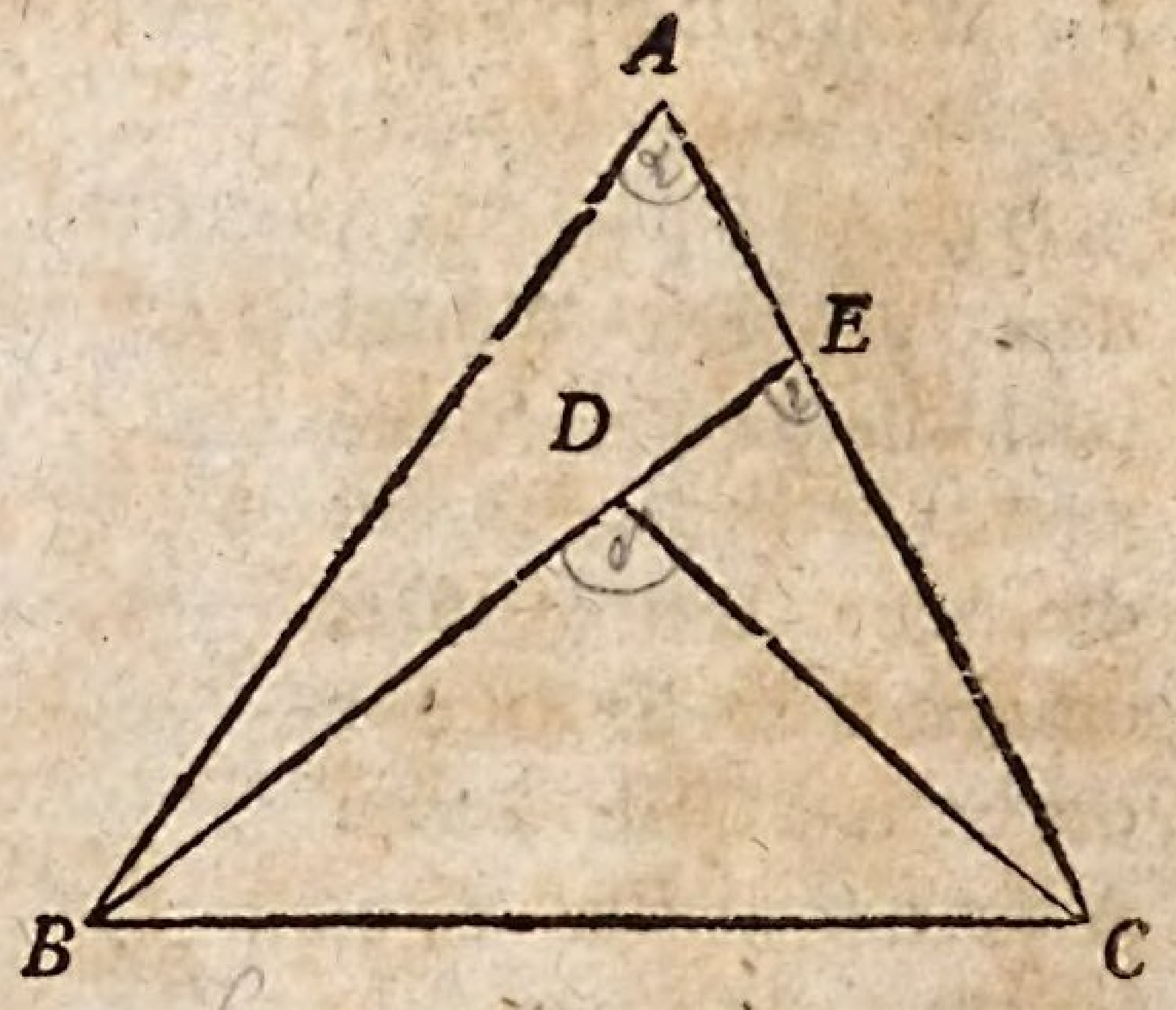
Demnach sind u. s. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in den Endpunkten einer von den Seiten eines Dreyecks innerhalb desselben zwey gerade Linien aufgestellt werden, so sind diese zwar kleiner, als die zwey übrigen Seiten des Dreyecks, schliessen aber einen grössern Winkel ein.

Es seyen in den Endpunkten B, C einer von den Seiten BC des Dreyecks ABC innerhalb desselben die zwey gerade Linien BD, DC aufgestellt, so behaupte ich, dass die Linien BD, DC zwar kleiner seyen, als die zwey übrigen Seiten BA, AC des Dreyecks, aber einen Winkel BDC einschliessen der grösser sey, als der Winkel BAC.

Beweis. Man verlängere die Linie BD nach E. Da nun (20. Saz.) in jedem Dreyecke jede zwey Seiten zusammen grösser sind, als die dritte, so sind die zwey Seiten AB, AE des Dreyecks ABE grösser, als die dritte BE. Sezt man also beyderseits die Linie EC hinzu, so sind die Seiten BA, AC grösser, als die Linien BE, EC. Da ferner in dem Dreyecke CED die zwey Seiten CE, ED grösser sind, als die Seite CD, so sind, wenn man beyderseits die DB hinzusezt, die Linien CE, EB grösser, als die CD, DB. Aber von den Sei-



ten B A, A C ist gezeigt worden, dass sie grösser seyen, als die Linien B E, E C: folglich sind noch vielmehr die B A, A C grösser, als die B D, D C. Da ferner (16. Saz.) an jedem Dreyecke der äussere Winkel grösser ist, als sein innerer Gegenwinkel, so ist der Winkel B D C an dem Dreyecke C D E, als äusserer Winkel, grösser, als der Winkel C E D. Aus eben dem Grunde aber ist der Winkel C E B, als äusserer Winkel an dem Dreyecke A B E, grösser, als der Winkel B A C. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel B D C grösser sey, als der Winkel C E B; Folglich ist der Winkel B D C noch vielmehr grösser, als der Winkel B A C.

Wenn demnach in den Endpunkten u. s. w. w. z. e. w.

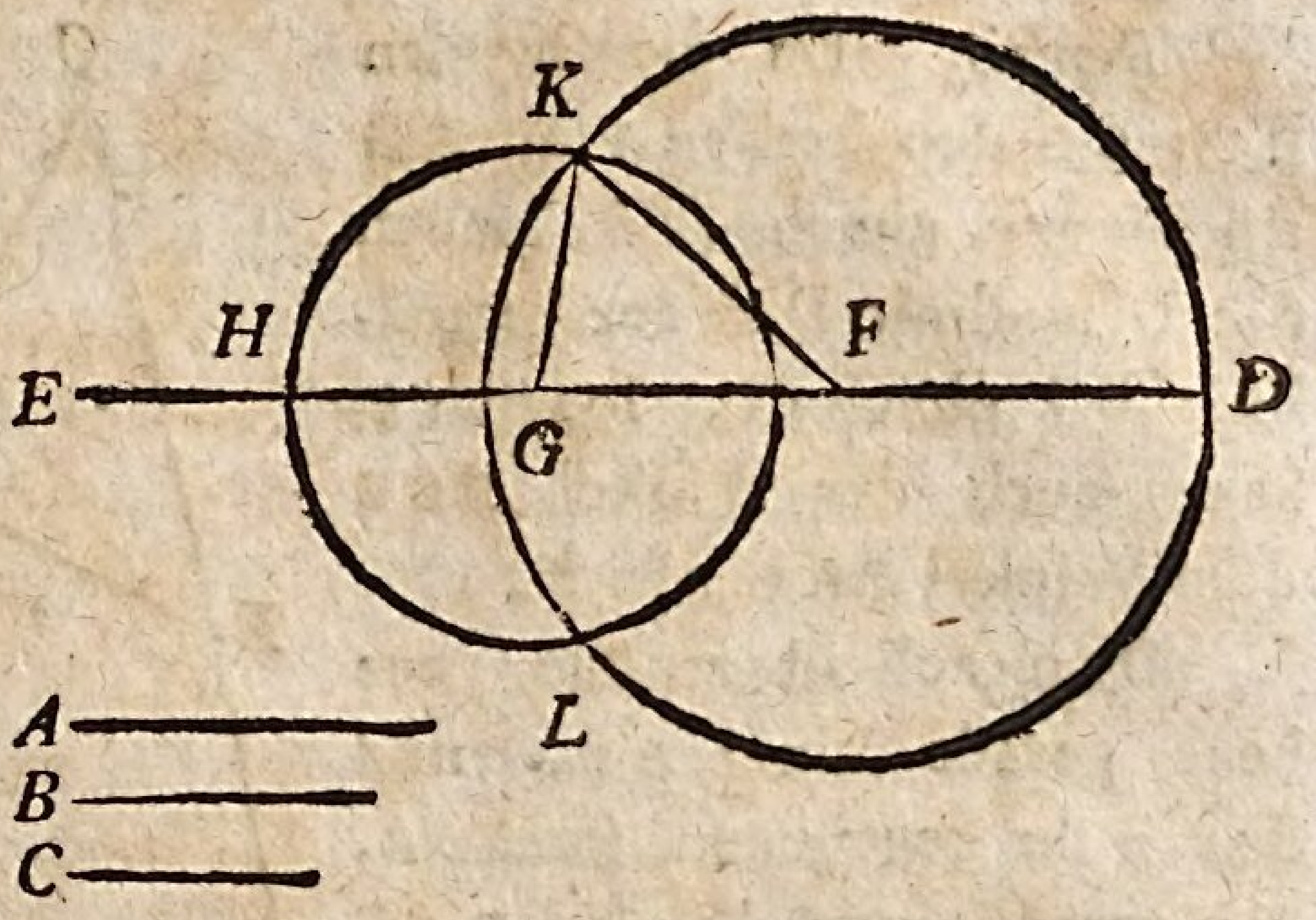
22. *Saz.*

Aufgabe. Aus drey geraden Linien, welche drey andern gegebenen, von denen jede zwey zusammen grösser, als die dritte, sind, stückweise gleich seyen, ein Dreyeck zu errichten.

Es seyen die drey gegebenen geraden Linien A, B, C, von denen jede zwey zusammen grösser, als die dritte, seyen, nämlich die A und B zusammen grösser, als C, die A und C zusammen grösser, als B, und die B und C zusammen grösser, als A: man soll aus drey geraden Linien, welche den dreyen A, B, C gleich seyen, ein Dreyeck errichten.

Auflösung. Man ziehe die an D begränzte, nach E zu aber unbegränzte gerade Linie D E, und mache (3. Saz.) die D F der A, die F G der B, die G H der C gleich. Hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte F, mit der Weite F D, (3. Ford.) den Kreis D K L und aus dem Mittelpnnkte G, mit der Weite G H, den Kreis K L H, und ziehe die Linien K F, K G, so behaupte ich, dass das Dreyeck K F G aus drey Linien errichtet sey, welche den gegebenen A, B, C gleich seyen.

Be-



Beweis. Weil der Punkt F des Kreises DKL Mittelpunkt ist, so ist (15. Erkl.) die Linie FD der FK gleich. Aber die Linie FD ist der Linie A gleich; folglich ist auch die KF der A gleich. Da ferner dar Punkt G des Kreises LKH Mittelpunkt ist, so ist die Linie GH der GK gleich. Aber die Linie GH ist der C gleich; folglich ist auch die KG der C gleich. Ausserdem ist die FG der B gleich; Folglich sind die drey Linien KF, FG, GK den drey gegebenen A, B, C gleich.

Demnach ist aus den drey Linien KF, FG, GK, welche den drey gegebenen A, B, C gleich sind, das Dreyeck KFG errichtet worden, w. z. v. w.

23. *Saz.*

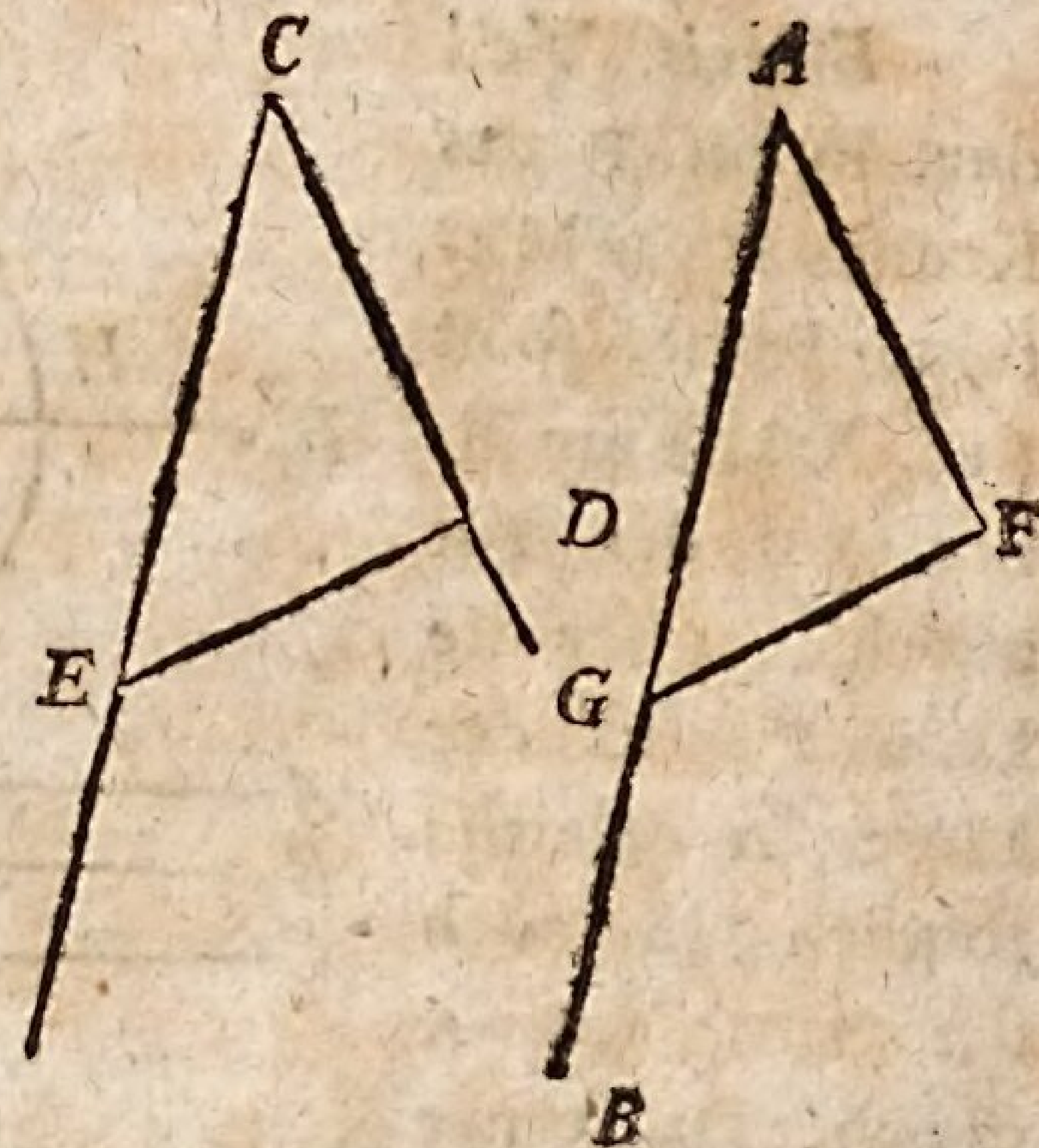
Aufgabe. An eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt einen geradlinigten Winkel zu sezen, der einem gegebenen geradlinigten Winkel gleich sey.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, und der in ihr gegebene Punkt A, der gegebene geradlinigte Winkel DCE; und man soll an die gegebene gerade Linie AB und den in ihr gegebenen Punkt A einen geradlinigten Winkel sezen, der dem gegebenen geradlinigten Winkel DCE gleich sey.

Auflösung. Man nehme auf den beyden CD, CE nach Belieben die Punkte D, E an, und ziehe die DE. Hierauf errichte man (22. Saz) aus drey Linien, welche den dreyen CD, CE, DE gleich seyen, das Dreyeck AFG so, dass die CD der AF, die CE der AG, und die DE der FG gleich sey.

Be-

Beweis. Da die beyden DC, CE den beyden FA, AG ſtückweiſe gleich ſind, auch die Grundlinie DE der Grundlinie FG gleich iſt, ſo iſt (8. Saz.) auch der Winkel DCE dem Winkel FAG gleich.



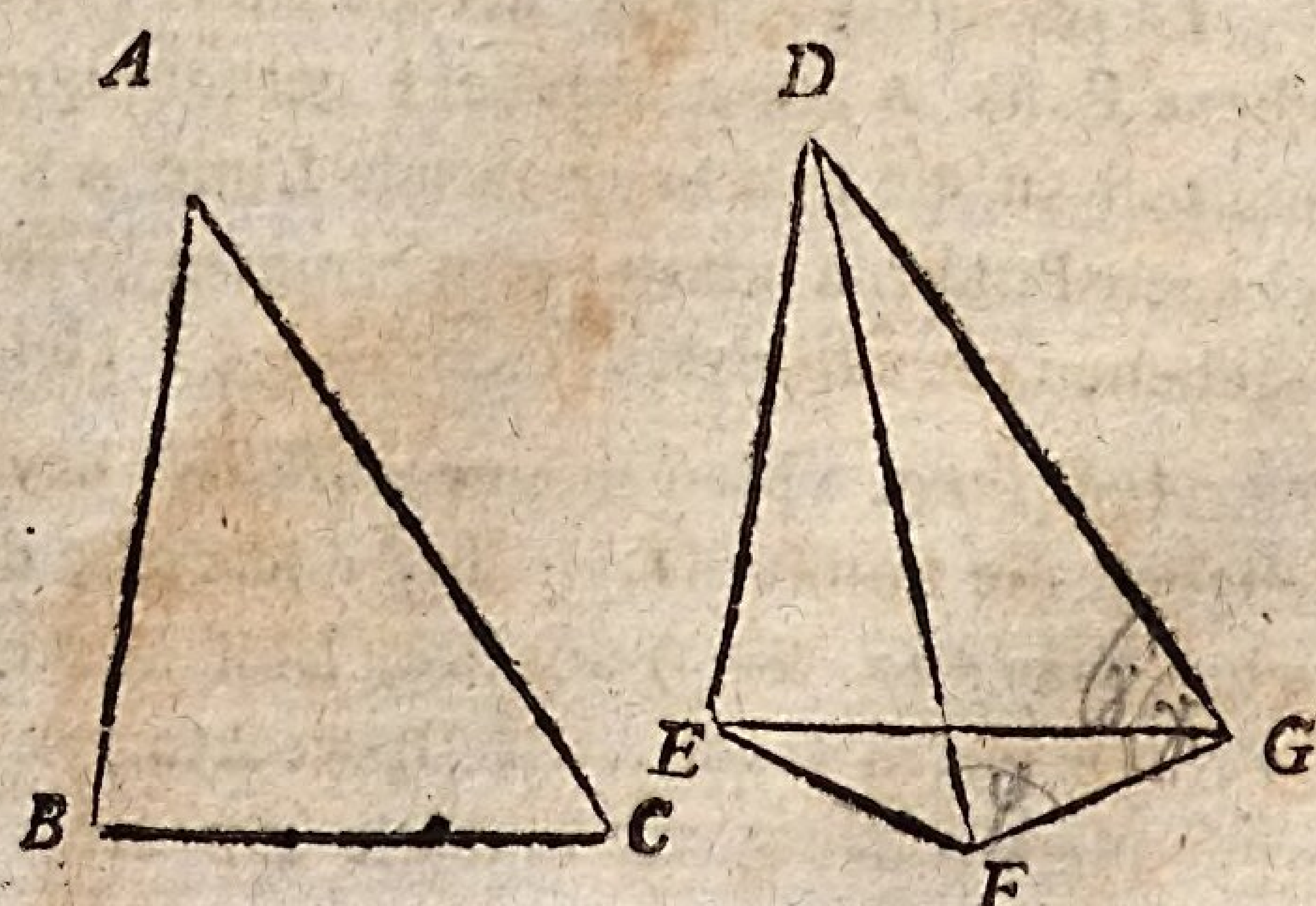
Demnach iſt an die gegebene gerade Linie AB, und den an ihr gegebenen Punkt A, ein geradlinigter Winkel FAG geſezt worden, der dem gegebenen geradlinigten Winkel DCE gleich iſt. W. z. v. w.

24. *Saz.*

Lehrſaz Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten einander ſtückweiſe gleich ſind, aber der von den gleichen Seiten eingeſchloſſene Winkel in dem einen gröſſer iſt, als in dem andern, ſo iſt auch die Grundlinie des einen gröſſer, als die Grundlinie des andern.

Es ſeyen die zwey Dreyecke ABC, DEF in welchen die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF ſtückweiſe gleich ſeyen, die Seite AB nämlich der DE und die AC der DF, aber der Winkel BAC ſey gröſſer, als der Winkel EDF, ſo behaupte ich, daſs die Grundlinie BC gröſſer ſey, als die Grundlinie EF.

Beweis. Weil der Winkel BAC gröſſer iſt, als der Winkel EDF, ſo ſeze man (23. Saz.) an den Punkt D der Linie DE einen Winkel EDG, der dem Winkel



BAC

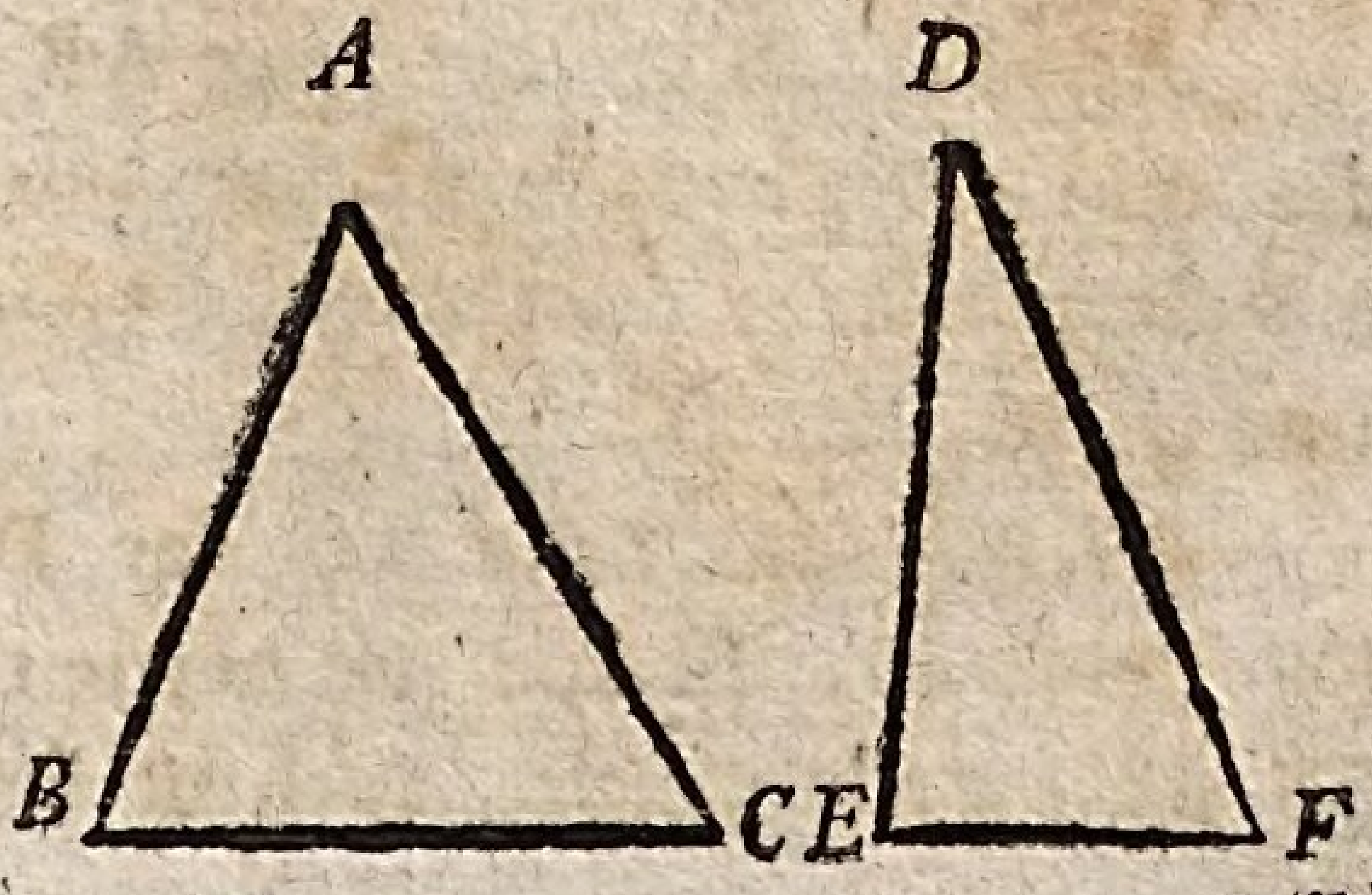
BAC gleich sey, mache (3. Saz.) die DG der AC oder DF gleich, und ziehe alsdann die GE und FG. Da nun die AB der DE, und die AC der DG gleich ist, so sind die beyden BA, AC den beyden ED, DG stückweise gleich; Nun ist auch der Winkel BAC dem Winkel EDG gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie BC der Grundlinie EG gleich. Da ferner die DG der DF, und (5. Saz.) der Winkel DFG dem Winkel DGF gleich ist, so ist der Winkel DFG grösser, als der Winkel EGF, und folglich ist noch vielmehr der Winkel EFG grösser, als der Winkel EGF. Da nun in dem Dreyecke EFG der Winkel EFG grösser ist, als der Winkel EGF, aber (19. Saz.) dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber liegt, so ist die Seite EG grösser, als die Seite EF. Aber die Seite EG ist der BC gleich; folglich ist die Seite BC grösser, als die EF.

Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

25. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, aber die Grundlinie des einen grösser ist, als die Grundlinie des andern, so ist auch der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen grösser, als in dem andern.

Es seyen zwey Dreyecke ABC, DEF, in welchen die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF stückweise gleich seyen, die AB nämlich der DE, und die AC der DF, die Grundlinie BC aber sey grösser, als die Grundlinie EF, so behaupte ich, dass auch der Winkel BAC grösser sey, als der Winkel EDF.



Beweis. Wäre der Winkel BAC nicht grösser, als der EDF, so wäre er entweder ihm gleich, oder er wäre kleiner. Aber gleich ist der Winkel BAC dem EDF nicht, denn sonst

wä-

wäre (4. Saz.) die Grundlinie B C der E F gleich. Dies ist sie aber nicht; folglich ist auch der Winkel B A C dem E D F nicht gleich. Eben so wenig aber ist der Winkel B A C kleiner, als der E D F, denn sonst wäre (24. Saz.) die Grundlinie B C kleiner, als die E F. Dies ist sie aber nicht; folglich ist auch der Winkel B A C nicht kleiner, als der E D F. Es ist aber gezeigt worden, dass er ihm auch nicht gleich sey; folglich ist der Winkel B A C grösser, als der E D F.

Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

26. *Saz.*

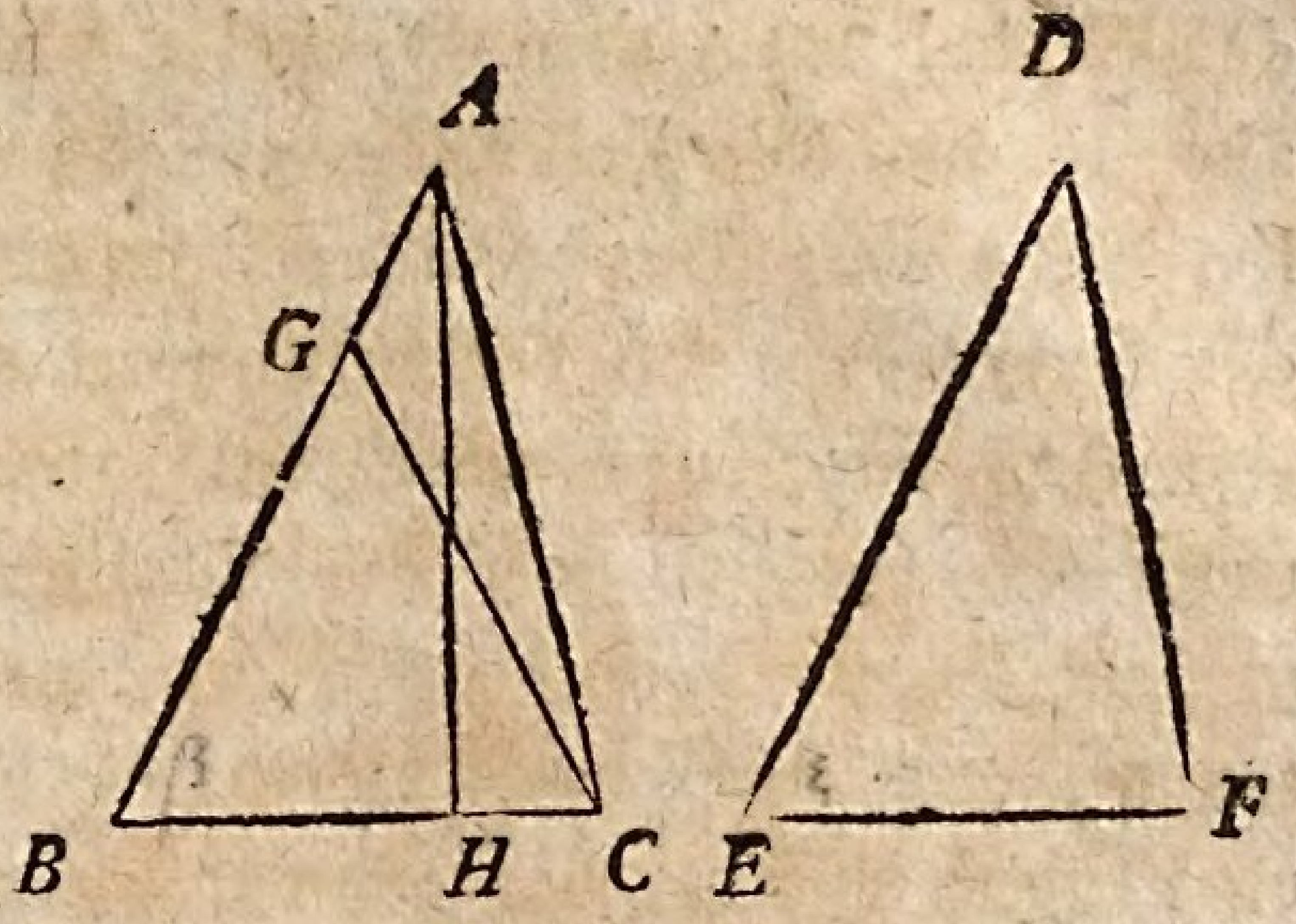
Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und es ist auch eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, sie mag nun an den gleichen Winkeln oder einem derselben gegenuber liegen, so sind auch die übrigen Seiten in beyden Dreyecken einander stückweise gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich.

Es seyen zwey Dreyecke A B C, D E F, in welchen die zwey Winkel A B C, B C A den zwey Winkeln D E F, E F D stückweise gleich seyen, der A B C nämlich dem D E F, und der B C A dem E F D, auch sey eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, und zwar *erstlich* diejenige, welche an den gleichen Winkeln liegt, nämlich die Seite B C sey der E F gleich, so behaupte ich, dass auch die übrigen Seiten in beyden einander stückweise gleich seyen, die A B nämlich der D E, und die A C der D F, wie auch, dass der übrige Winkel B A C dem E D F gleich sey.

Beweis. Wäre die Seite A B der D E ungleich, so müsste die eine von beyden grösser, als die andere, seyn. Es sey A B die grössere; man mache (3. Saz.) die G B, der D E gleich, und ziehe die G C.

Da nun die Seite B G der D E, und die Seite B C der E F gleich ist, so sind die beyden B G, B C den beyden D E, E F stückweise gleich. auch ist der Winkel G B C dem Winkel

D E F



DEF gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie GC der Grundlinie DF, und das ganze Dreyeck GBC dem ganzen Dreyecke DEF gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen einander stückweise gleich. Es ist also der Winkel GCB dem Winkel DFE gleich. Es ist aber angenommen, der Winkel DFE sey dem Winkel BCA gleich; Folglich ist auch der Winkel BCG dem Winkel BCA, das heisst, der kleinere dem grössern, gleich, welches unmöglich ist. Demnach ist die Seite AB der DE nicht ungleich, also gleich. Die Seite BC aber ist der EF gleich, mithin sind die zwey Seiten AB, BC den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich, auch ist der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie DF, und der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EDF gleich.

Es seyen nun *zweytens* in beyden Dreyecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich, die AB nämlich der DE: so behaupte ich, dass auch in diesem Falle die übrigen Seiten beyder einander stückweise gleich seyn werden, die AC nämlich der DF, und die BC der EF, wie auch, dass der dritte Winkel BAC des einen dem dritten Winkel, EDF des andern gleich seyn werde.

Denn wäre die BC der EF ungleich, so müsste eine von beyden grösser, als die andere, seyn. Es sey also, die Möglichkeit angenommen, die BC die grössere, so mache man (3. Saz.) der EF die BH gleich, und ziehe die AH.

Da nun die BH der EF, und die AB der DE gleich ist, so sind die zwey Seiten AB, BH den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich, auch schliessen sie gleiche Winkel ein; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AH der Grundlinie DF, und das ganze Dreyeck ABH dem ganzen Dreyecke DEF gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander stückweise gleich; Folglich ist

der

der Winkel BHA dem Winkel EFD gleich. Der Winkel EFD aber ist dem Winkel BCA gleich; folglich ist auch der Winkel BHA dem Winkel BCA, das heisst, der äussere Winkel des Dreyecks AHC seinem innern Gegenwinkel, gleich, welches (16. Saz.) unmöglich ist. Die BC ist also der EF nicht ungleich, folglich gleich. Es ist aber auch die AB der DE gleich; Demnach sind die zwey Seiten AB, BC den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich; auch schliessen sie gleiche Winkel ein; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie DF, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke DEF, wie auch der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EDF gleich.

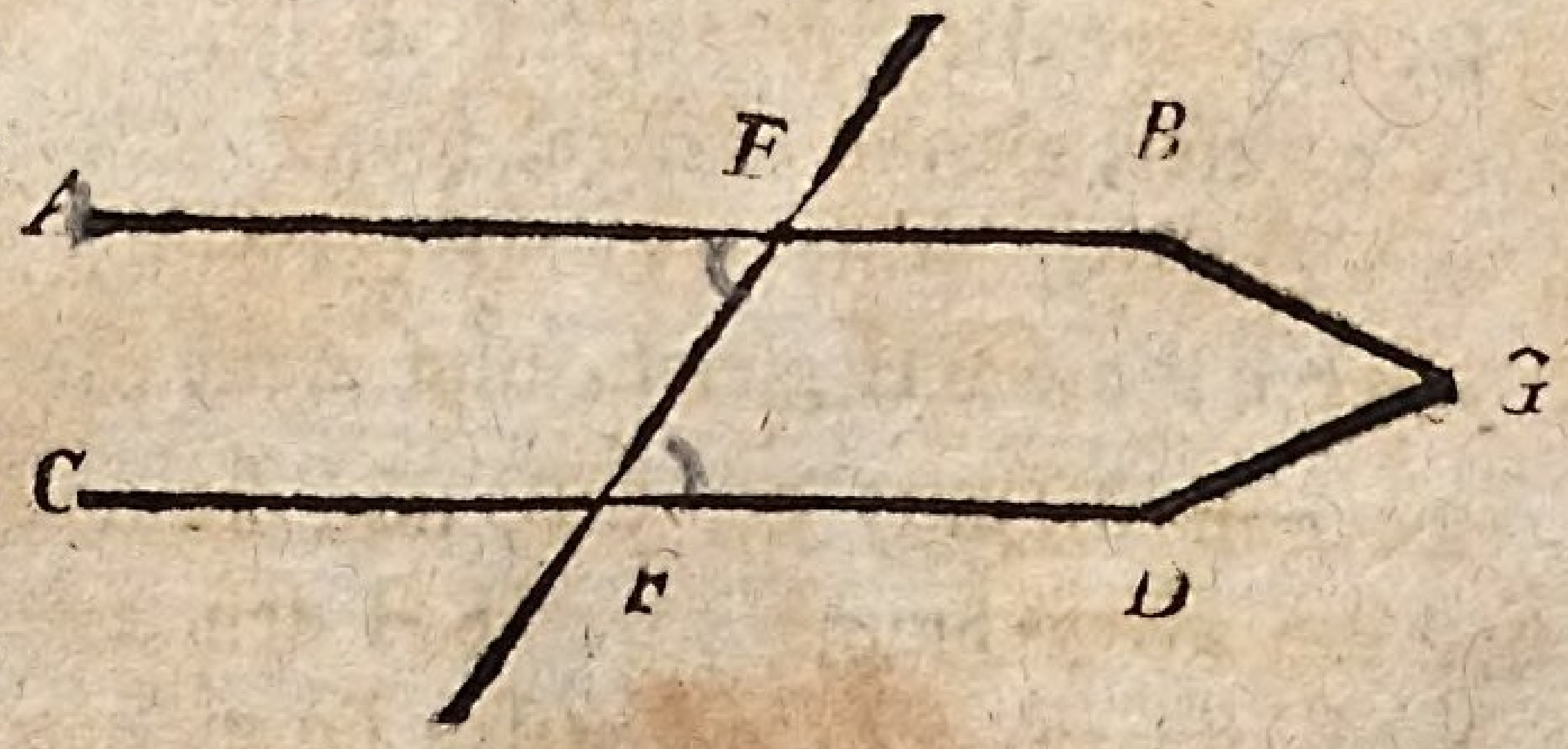
Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

27. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass sie die Wechselwinkel einander gleich macht, so sind die beyden geraden Linien einander parallel.

Die zwey gerade Linien AB, CD werden von der dritten EF so geschnitten, dass sie die Wechselwinkel AEF, EFD einander gleich mache; so behaupte ich, dass die Linie AB der CD parallel sey.

Beweis. Denn wäre sie ihr nicht parallel, so müssten die zwey Linien AB, CD verlängert entweder an der Seite BD oder an der Seite AC zusammentreffen. Man verlängere sie also, und sie treffen an der Seite BD in dem Punkte G zusammen. Nun ist (16. Saz.) der äussere Winkel AEF des Dreyecks EGF grösser, als sein innerer Gegenwinkel EFG, aber



nach der Voraussezung ist er diesem auch gleich, welches unmöglich ist; Folglich treffen die Linien AB, CD verlängert an der Seite BD nicht zusammen. Eben so kann aber gezeigt werden, dass sie auch an der Seite AC nicht zusammen treffen.

Ge-

Gerade Linien aber, die an keiner von beyden Seiten zusammen treffen, sind (35. Erkl.) parallel; Folglich ist die AB der CD parallel.

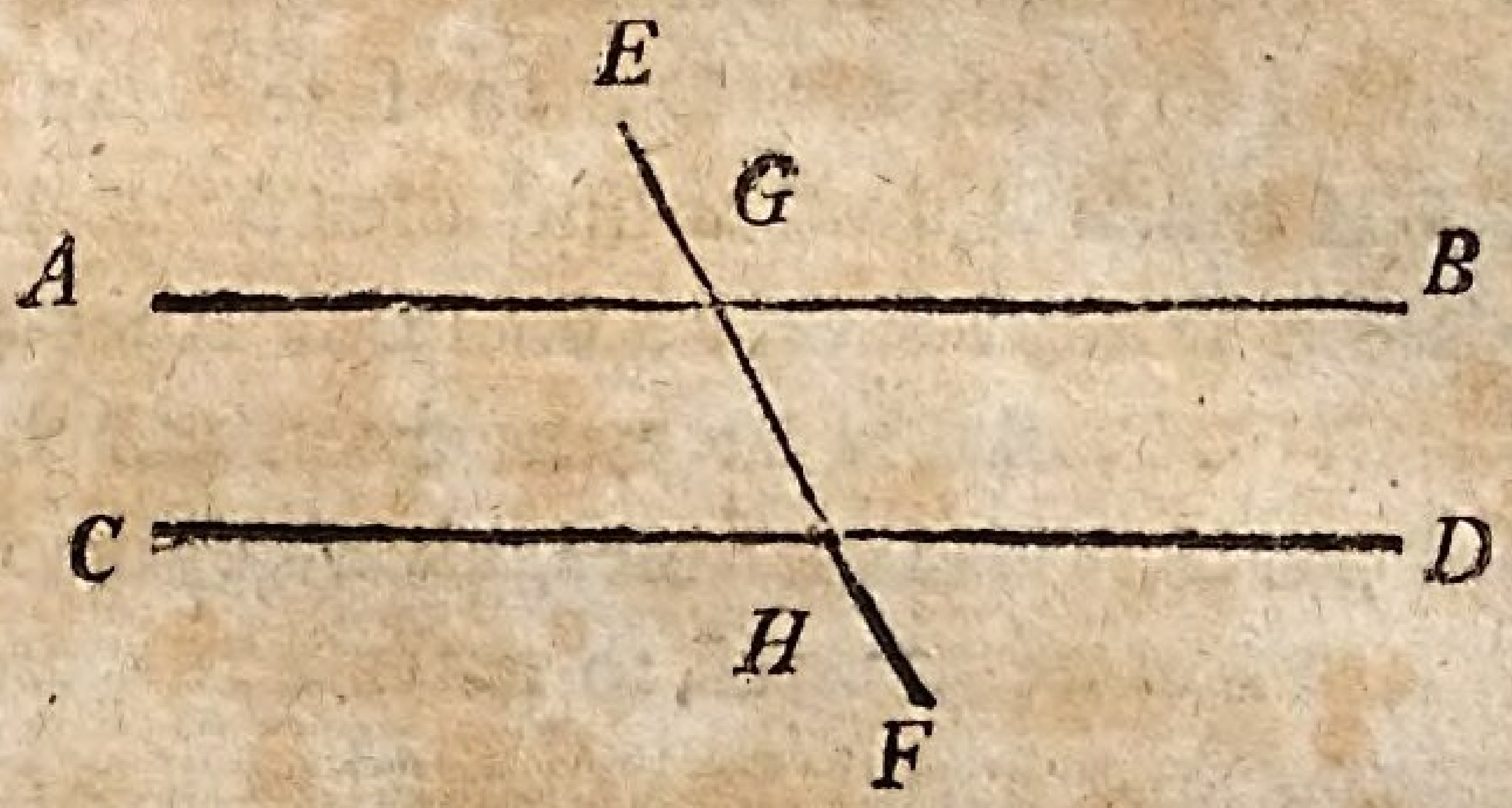
Wenn demnach zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

28 *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass der äussere Winkel seinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel gleich ist, oder die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich sind, so sind die beyden geraden Linien einander parallel.

Die zwey gerede Linien AB, CD werden von der dritten EF so geschnitten, dass der äussere Winkel EGB seinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel GHD gleich sey, oder die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, GHD zwey rechten gleich seyen; so behaupte ich, dass die Linie AB der CD parallel sey.

Beweis. Weil der Winkel EGB dem GHD, aber (15. Saz.) der Winkel EGB dem AGH gleich ist, so ist auch der Winkel AGH dem GHD gleich, und diese sind Wechselwinkel; Folglich ist (27. Saz.) die AB der CD parallel. Ferner da die Winkel BGH,



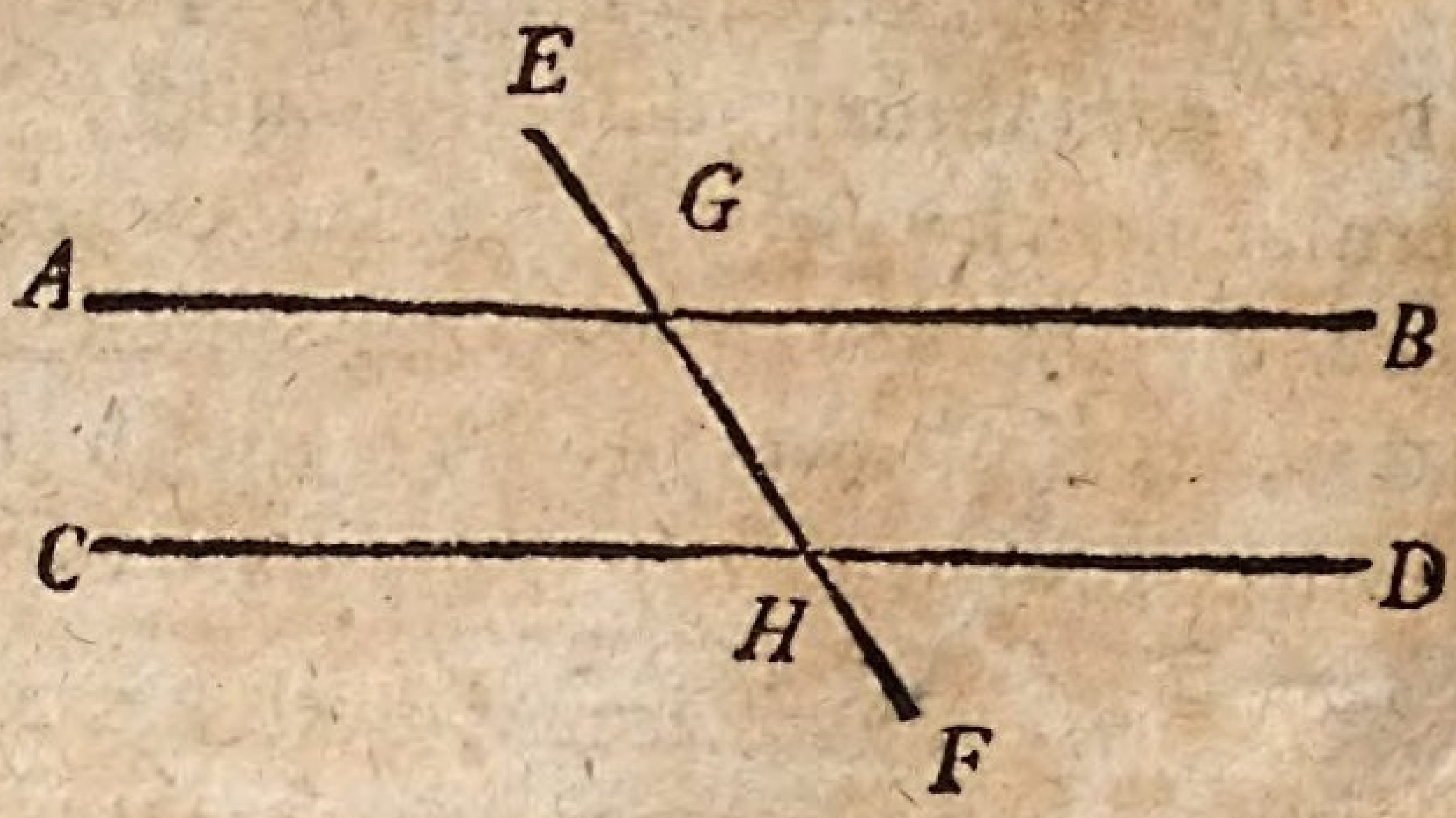
GHD und (13. Saz.) auch die Winkel AGH, BGH zwey rechten gleich sind, so sind die Winkel AGH, BGH den Winkeln BGH, GHD gleich. Nimmt man also auf beyden Seiten den Winkel BGH weg, so ist der Rest AGH dem Reste GHD gleich, und diese sind Wechselwinkel; folglich ist wiederum (27. Saz.) die AB der CD parallel.

Wenn demnach zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

29. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey parallele Linien von einer dritten geſchnitten werden, ſo macht dieſe die Wechſelwinkel einander gleich, den äuſſern Winkel ſeinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel gleich, und die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich.

Die zwey parallele Linien AB, CD werden von der dritten EF geſchnitten, ſo behaupte ich, daſs dieſe die Wechſelwinkel AGH, GHD einander gleich, den äuſſern Winkel EGB ſeinem innern, an einerley Seite liegenden, Gegenwinkel GHD gleich, und die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, GHD zwey rechten gleich mache.



Beweis. Wäre der Winkel AGH dem GHD ungleich, ſo müſste einer von beyden gröſſer, als der andere, ſeyn. Es ſey nun AGH der gröſſere. Da alſo AGH gröſſer iſt, als GHD, ſo ſeze man zu beyden den Winkel BGH hinzu, und es ſind die Winkel AGH, BGH gröſſer, als die Winkel BGH, GHD. Aber (13. Saz.) ſind die Winkel AGH, BGH zwey rechten gleich; Folglich ſind die Winkel BGH, GHD kleiner, als zwey rechte. Gerade Linien aber, die von einer dritten ſo geſchnitten werden, daſs die beyden innern an einerley Seite der ſchneidenden liegenden Winkel kleiner, als zwey rechte, ſind, treffen, ſo weit, als nöthig iſt, verlängert, an eben der Seite zuſammen (11. Grundſ.). Die geraden Linien AB, CD aber treffen nicht zuſammen, weil ſie, nach der Vorausſezung, parallel ſind; Demnach iſt auch der Winkel AGH dem GHD nicht ungleich, folglich gleich.

Der Winkel AGH aber iſt (15. Saz.) dem Winkel EGB gleich; folglich iſt auch der Winkel EGB dem GHD gleich.

Man

Man seze auf beyden Seiten den Winkel BGH hinzu, so sind die Winkel EGB, BGH den Winkeln BGH, GHD gleich. Aber die Winkel EGB, BGH sind (13. Saz.) zwey rechten gleich; Folglich sind auch die Winkel BGH, GHD zwey rechten gleich.

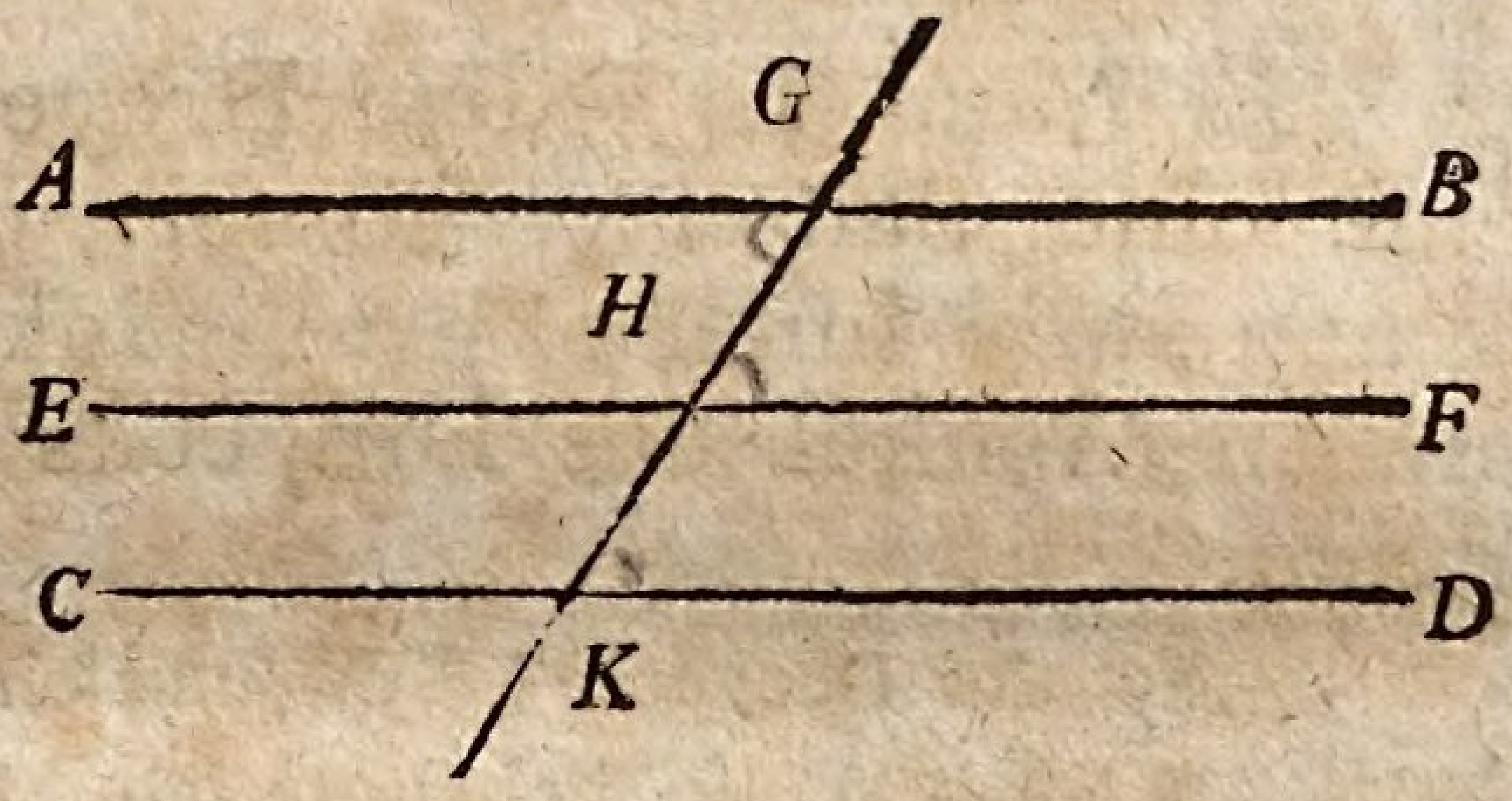
Wenn demnach zwey parallele Linien u. s. w. w. z. e. w.

30. *Saz.*

Lehrsaz. Gerade Linien, die *einer* dritten parallel sind, sind einander selbst parallel.

Es seyen die beyden geraden Linien AB, CD der EF parallel, so behaupte ich, dass auch die AB der CD parallel sey.

Beweis. Die drey Linien AB, CD, EF werden von der Linie GK geschnitten. Da nun die zwey Parallelen AB, EF von der Linie GK geschnittten werden, so ist (29. Saz.) der Winkel AGH dem Winkel GHF gleich. Ferner, da die zwey Parallelen EF, CD von der Linie GK geschnitten werden, so ist (29. Saz.) der Winkel GHF dem Winkel GKD gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel AGK dem Winkel GHF gleich sey; Folglich sind auch die Winkel AGK, GKD einander gleich, und diese sind Wechselwinkel; Folglich ist (27. Saz.) die Linie AB der CD parallel.



Demnach sind zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

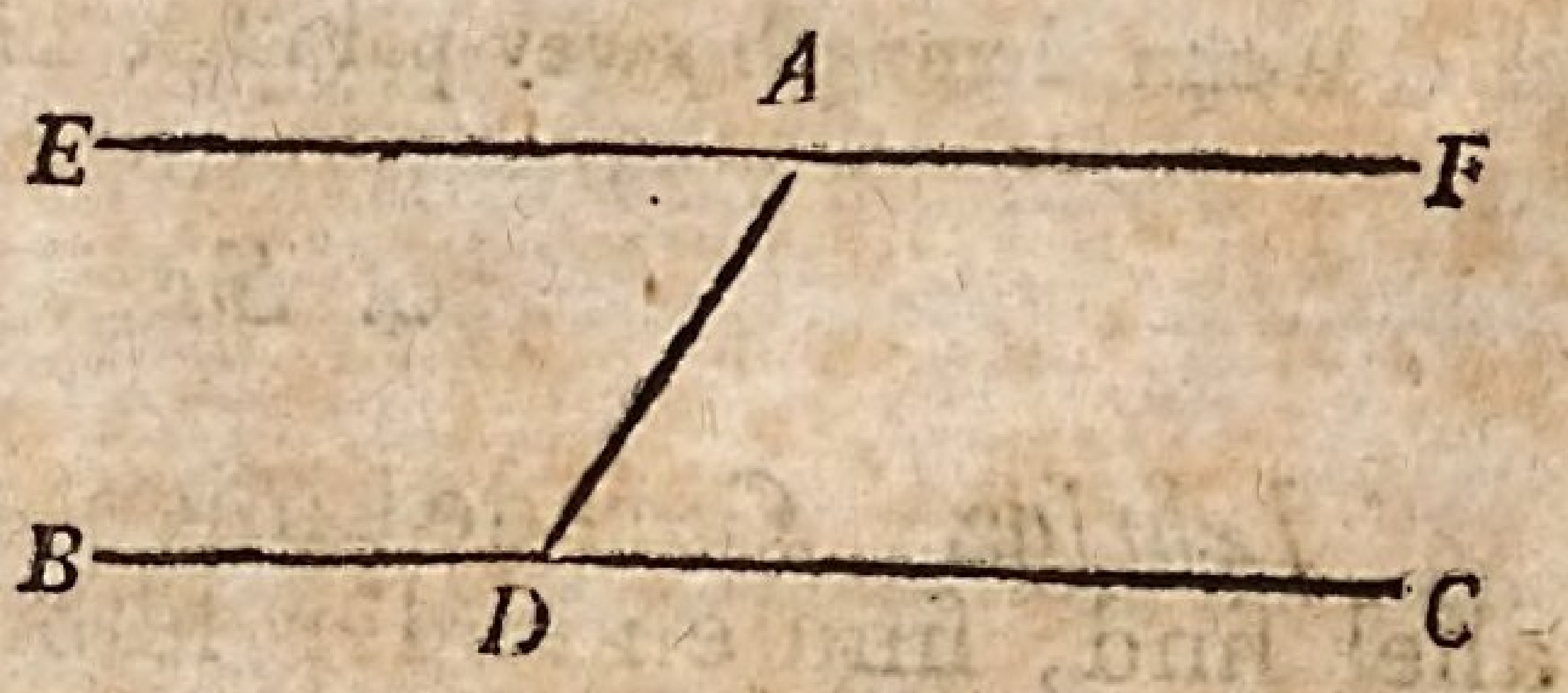
31. *Saz.*

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

Es sey der gegebene Punkt A, die gegebene gerade Linie BC, man soll durch den Punkt A mit der BC eine Parallele ziehen.

Auf

Auflösung. Man nehme in der Linie BC nach Belieben einen Punkt D an, ziehe die AD, und seze an den Punkt A der Linie AD (23. Saz.) einen Wtnkel DAE, der dem Winkel ADC gleich sey. Hierauf verlängere man die AE in gerader Richtung bis nach F.



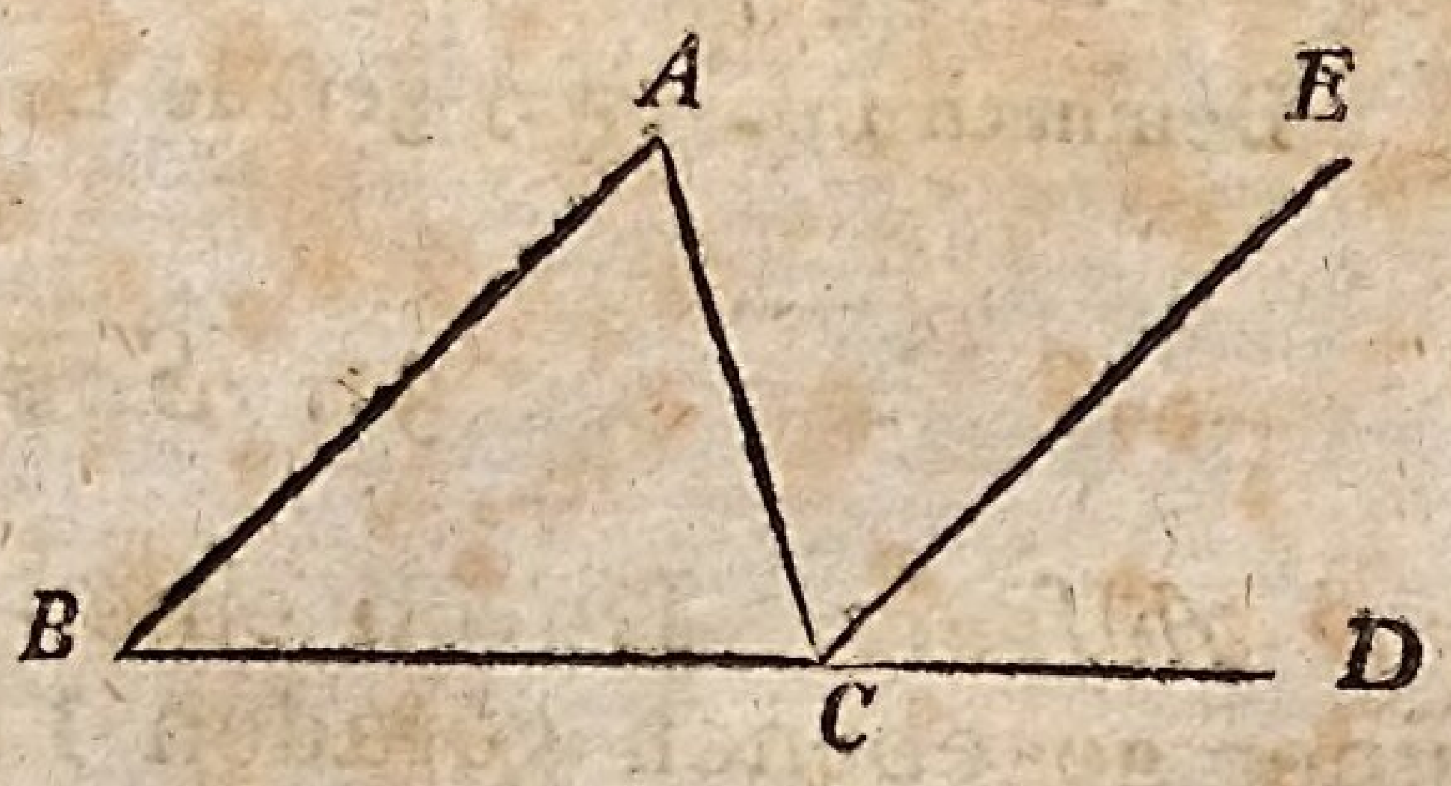
Beweis. Weil mit den zwey geraden Linien BC, EF die dritte schneidende AD gleiche Wechselwinkel EAD, ADC macht, so ist (27. Saz.) die EF der BC parallel.

Demnach ist durch den gegebenen Punkt A mit der gegebenen geraden Linie BC die EAF parallel gezogen worden. w. z. v. w.

32. *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Dreyecke ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der äussere Winkel seinen zwey innern Gegenwinkeln, und die drey innern Winkel des Dreyecks sind zwey rechten gleich.

Es sey das Dreyeck ABC, und eine seiner Seiten werde verlängert nach D, so behaupte ich, dass der äussere Winkel ACD den beyden innern Gegenwinkeln CAB, ABC und dass die drey innern Winkel ABC, BCA, CAB des Dreyecks zwey rechten gleich seyen.



Beweis. Man ziehe (31. Saz.) durch den Punkt C mit der AB die CE parallel. Da nun die AB der CE parallel ist, und da beyde von der dritten AC geschnitten werden, so sind (29. Saz.) die Wechselwinkel BAC, ACE einander gleich. Da ferner die AB der CE parallel ist, und beyde von der dritten BD geschnitten werden, so ist der äussere Winkel ECD dem innern Gegenwinkel ABC gleich. Es ist aber auch gezeigt

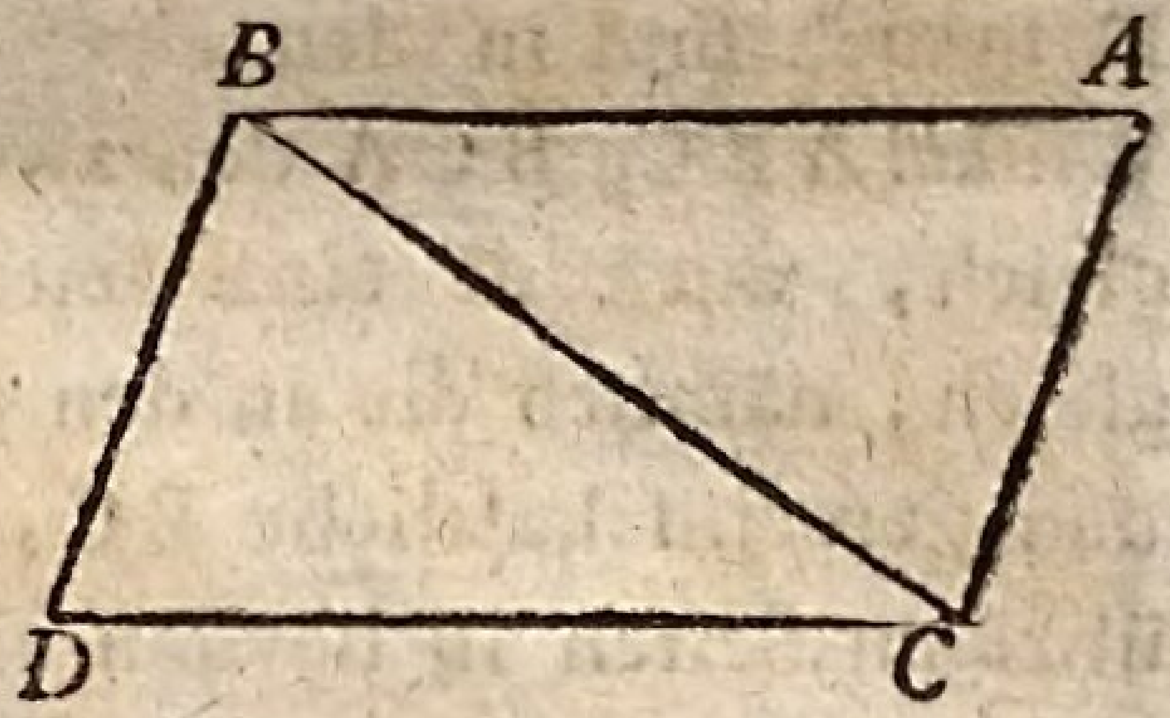
zeigt worden, dass der Winhel A C E dem Winkel B A C gleich sey; Folglich ist der ganze äussere Winkel A C D den beyden innern Gegenwinkeln B A C, A B C gleich. Man seze zu beyden den Winkel A C B hinzu, so sind die Winkel A C D, A C B den drey Winkeln A B C, B C A, C A B gleich. Abe die Winkel A C D, A C B sind (13. Saz.) zwey rechten gleich; Folglich sind auch die Winkel A C B, C B A, C A B zwey rechten gleich.

Demnach ist in jedem Dreyecke u. s. w. w. z. e. w.

33. *Saz.*

Lehrsaz. Gerade Linien, die die Endpunkte zweyer gleichen und parallelen Linien an einerley Seite mit einander verbinden, sind selbst gleich und parallel.

Es seyen die zwey gleiche und parallele Linien A B, C D und ihre Endpunkte werden an einerley Seite von den Linien A C, B D verbunden, so behaupte ich, dass auch die A C, B D gleich und parallel seyen.



Beweis. Man ziehe die B C. Da nun die A B der C D parallel ist, und beyde von der dritten B C geschnitten werden, so sind (29. Saz.) die Wechselwinkel A B C, B C D einander gleich. Da ferner die A B der C D gleich, und die B C gemeinschaftlich ist, so sind die beyden A B, B C den beyden C D, B C stückweise gleich, auch ist der Winkel A B C dem Winkel B C D gleich; Folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie A C der Grundlinie B D, und das ganze Dreyeck A B C dem ganzen Dreyecke B C D gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander stückweise gleich; Folglich ist der Winkel A C B dem Winkel C B D gleich. Da nun mit den zwey geraden Linien A C, B D die dritte schneidende B C gleiche Wechselwinkel A C B, C B D macht, so ist (27. Saz.)

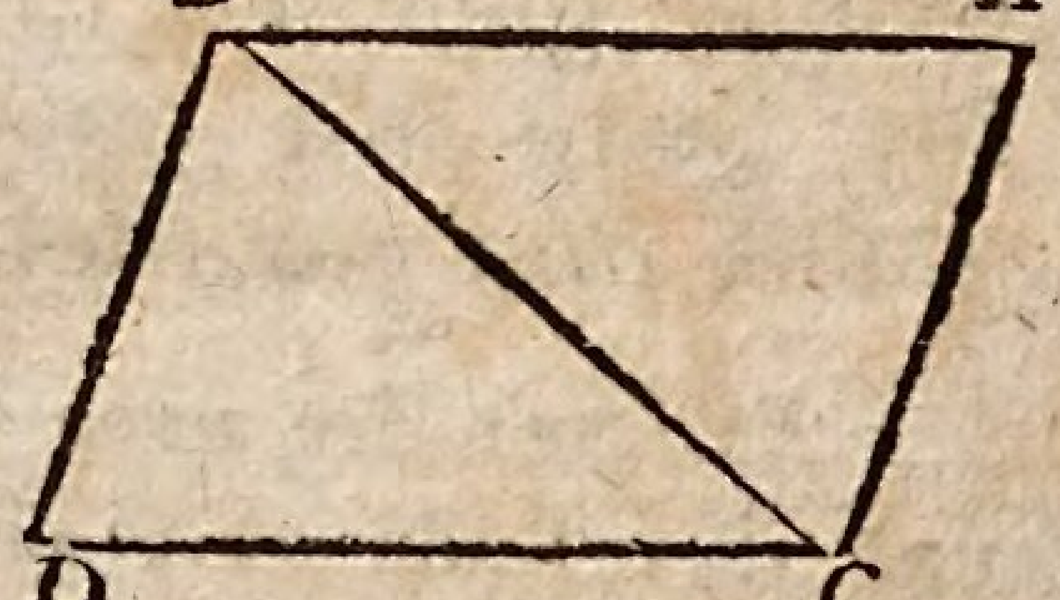
die AC der BD parallel. Es ist aber auch gezeigt worden, dass sie ihr gleich sey;

Demnach sind zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

34. *Saz.*

Lehrsaz. Die Gegenseiten und Gegenwinkel der Parallelogramme sind einander gleich, auch werden sie von der Diagonale halbirt.

Es sey das Parallelogramm ACDB, dessen Diagonale BC, so behaupte ich, dass die Gegenseiten und Gegenwinkel des Parallelogramms ACDB einander gleich seyen, und dass die Diagonale BC dasselbe halbire.



Beweis. Da die AB der CD parallel ist, und beyde von der Linie BC geschnitten werden, so sind (29. Saz.) die Wechselwinkel ABC, BCD einander gleich. Da ferner die AC der BD parallel ist, und beyde von der BC geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel ACB, CBD einander gleich; Demnach sind in den zwey Dreyecken ABC, CBD, die zwey Winkel ABC, BCA den zwey Winkeln BCD, CBD stückweise gleich, auch ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, nämlich die an den gleichen Winkeln liegende und beyden gemeinschaftliche BC; Folglich sind (26. Saz.) auch die übrigen Seiten in beyden einander stückweise gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich. Es ist also die Seite AB der CD, die Seite AC der BD, und der Winkel BAC dem Winkel BDC gleich. Und weil der Winkel ABC dem Winkel BCD, der Winkel CBD aber dem Winkel ACB gleich ist, so ist der ganze Winkel ABD dem ganzen Winkel ACD gleich. Es ist aber auch gezeigt worden, dass der Winkel BAC dem Winkel BDC gleich sey; Folglich sind die Gegenseiten und Gegenwinkel der Parallelogramme einander gleich.

Ich behaupte ferner, dass die Diagonale dieselbigen halbire.

Denn

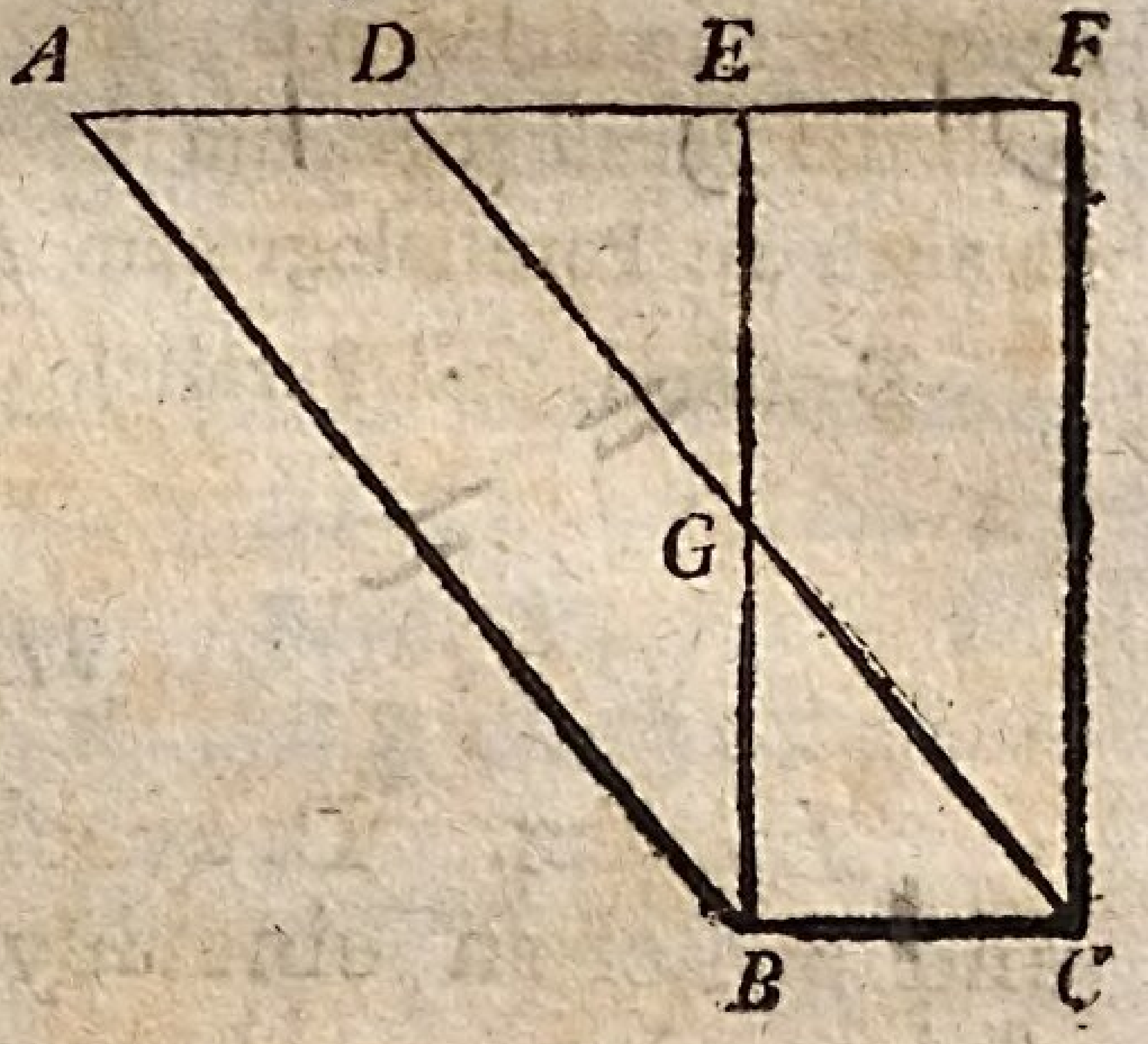
Denn weil die AB der CD gleich, uud die BC gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AB, BC den beyden DC, CB stückweise gleich, und der Winkel ABC ist dem Winkel BCD gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie BD, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke BCD gleich; und mithin halbirt die Diagonale BC das Parallelogramm ACDB. w. z. e. w.

35. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Parallelogramme ABCD, EBCF auf einerley Grundlinie BC, und zwischen einerley Parallelen AF, BC, so behaupte ich, dass das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EBCF gleich sey.

Beweis. Weil ABCD ein Parallelogramm ist, so ist (34. Saz.) die AD der BC gleich. Aus eben dem Grunde aber ist auch die EF der BC gleich, folglich ist auch die AD der EF gleich, auch ist die DE gemeinschaftlich; folglich ist (2. Grundf.) die ganze AE der ganzen DF gleich. Es ist aber (34. Saz.) auch die AB der DC gleich; folglich sind die beyden EA, AB den beyden FD, DC stückweise gleich, auch ist (29. Saz.) der Winkel FDC, als äusserer Winkel, seinem innern Gegenwinkel EAB gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie EB der Crundlinie FC, und das ganze Dreyeck EAB dem ganzen Dreyecke FDC gleich.



Nimmt man nun auf beyden Seiten das gemeinschaftliche DGE weg, so ist (3. Grundf.) der Rest ABGD dem Reste EGCF gleich. Sezt man auf beyden Seiten das gemeinschaftliche Dreyeck GBC hinzu, so ist das ganze Parallelogramm ABCD dem ganzen Parallelogramme EBCF gleich.

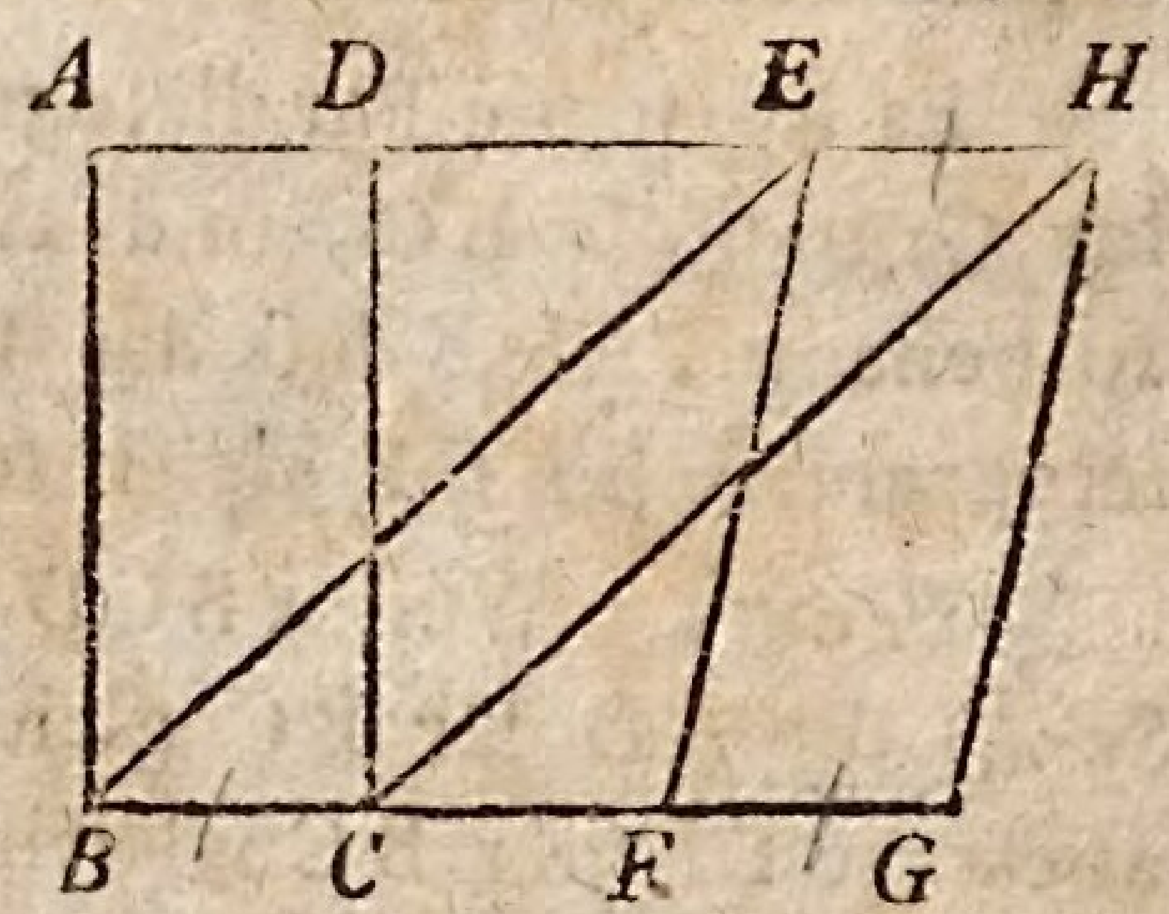
Demnach sind Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

36. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Parallelogramme ABCD, EFGH auf gleichen Grundlinien BC, FG und zwischen einerley Parallelen AH, BG, so behaupte ich, dass das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EFGH gleich sey.

Beweis. Man ziehe die BE, CH. Da nun die BC der FG, die FG aber der EH gleich ist, so ist auch die BC der EH gleich; sie sind aber auch parallel, und beyde werden von den Linien BE, CH verbunden. Linien aber, die gleiche und parallele Linien an einerley Seite verbinden, sind (33. Saz) selbst gleich und parallel; Folglich sind die EB, CH gleich und parallel, und es ist EBCH ein Parallelogramm, und (35. Saz.) dem Parallelogramme ABCD gleich,



denn es hat mit ihm einerley Grundlinie BC, und ist zwischen einerley Parallelen BC, AH. Aus eben dem Grunde aber ist auch das Parallelogramm EFGH dem EBCH gleich; folglich ist auch das Parallelogramm ABCD dem EFGH gleich.

Demnach sind Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

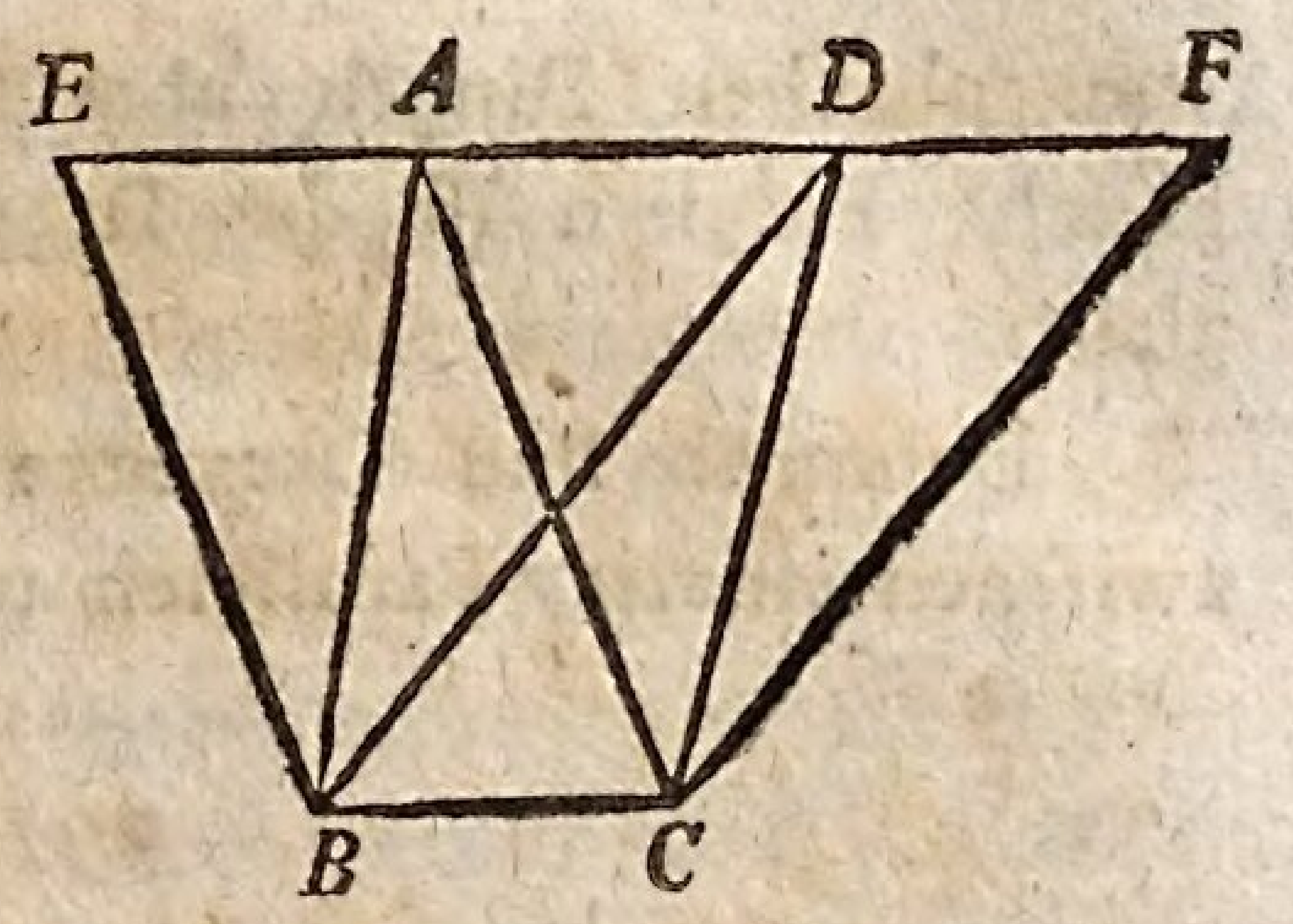
37. *Saz.*

Lehrsaz. Dreyecke auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Dreyecke ABC, DBC auf einerley Grundlinie BC und zwischen einerley Parallelelen AD, BC, so behaupte ich, dass das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich sey.

Beweis. Man verlängere die AD zu beyden Seiten nach E, F und ziehe (31. Saz.) durch B der CA die BE, und durch C der BD die CF parallel. Beyde Figuren EBCA,

DB



DBCF sind also Parallelogramme und (35. Saz.) einander gleich, denn sie sind auf einerley Grundlinie BC, und zwischen einerley Parallelen BC, EF. Auch ist das Dreyeck ABC die Hälfte des Parallelogramms EBCA, denn es wird (34. Saz.) von der Diagonale AB halbirt, und das Dreyeck DBC ist die Hälfte des Parallelogramms DBCF, denn es wird von der Diagonale DC halbirt. Aber von gleichen Dingen sind auch die Hälften einander gleich; folglich ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich.

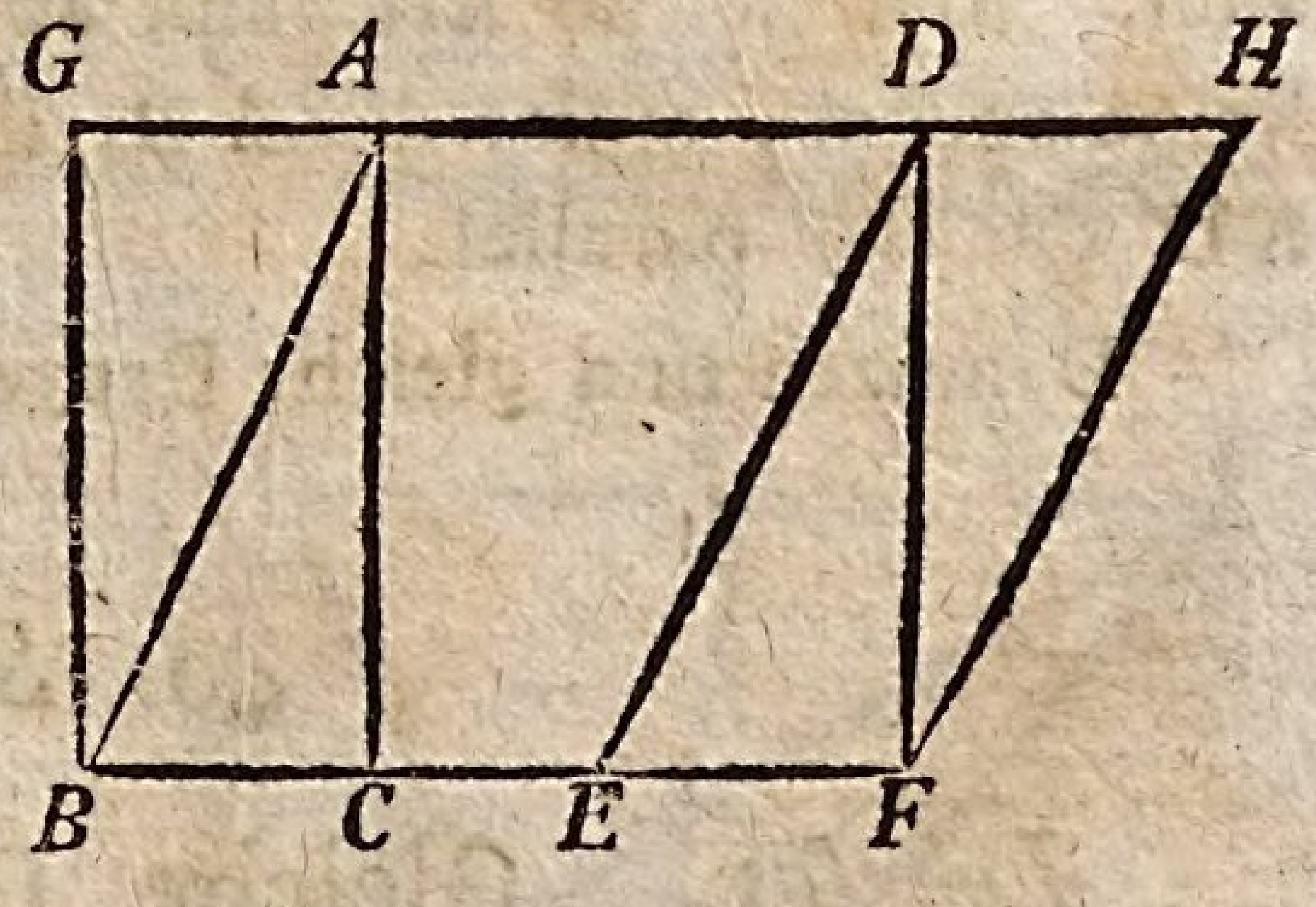
Demnach sind Dreyecke u. s. w. w. z. e. w.

38. *Saz.*

Lehrsaz. Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Dreyecke ABC, DEF auf den gleichen Grundlinien BC, EF und zwischen einerley Parallelen BF, AD, so behaupte ich, dass das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleich sey.

Beweis. Man verlängere die AD auf beyden Seiten nach G, H und ziehe durch B (31. Saz.) der CA die BG, durch F aber der DE die FH parallel. Beyde Figuren GBCA, DEFH sind also Parallelogramme, und (36. Saz.) einander gleich, denn sie sind auf gleichen Grundlinien BC, EF, und zwischen einerley Parallelen BF, GH. Von dem Parallelogramme GBCA aber ist das Dreyeck ABC die Hälfte, denn es wird (34. Saz.) von der Diagonale AB halbirt, und von dem Parallelogramme DEFH ist das Dreyeck FED die Hälfte, denn es wird von der Diagonale DF halbirt



Von.

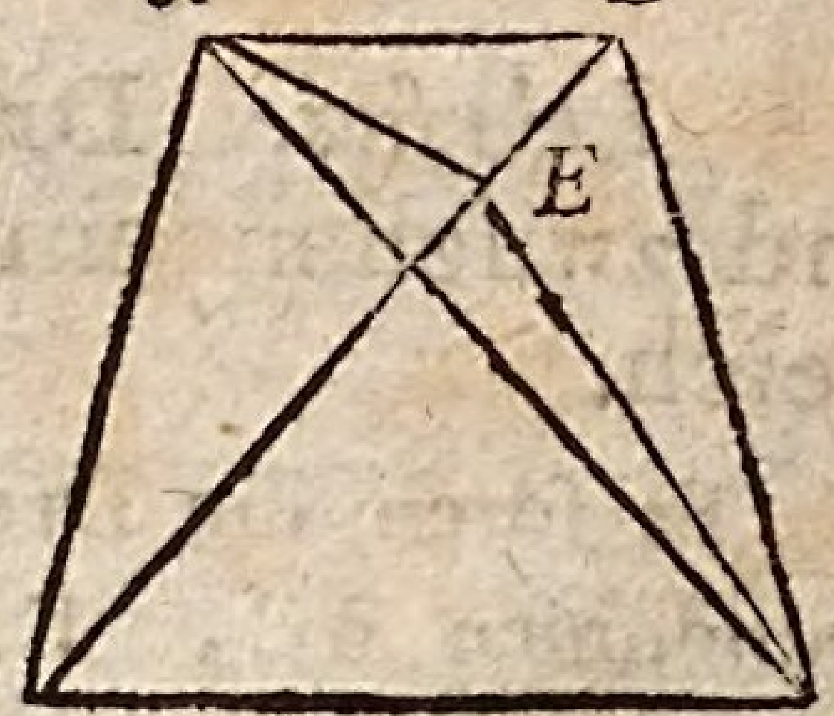
Von gleichen Dingen aber ſind auch die Hälften einander gleich; Folglich iſt das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleich.

Demnach ſind Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwiſchen einerley Parallelen u. ſ. w. w. z. e. w.

39. *Saz.*

Lehrſaz. Gleiche Dreyecke auf einerley Grundlinie und an einerley Seite, ſind auch zwiſchen einerley Parallelen.

Es ſeyen die gleichem Dreyecke ABC, DBC, auf einerley Grundlinie BC und an einerley Seite, ſo behaupte ich, daſs ſie auch zwiſchen einerley Parallelen ſeyen. Man ziehe nämlich die AD, ſo behaupte ich, daſs die AD der BC parallel ſey.



Beweis. Wäre dies nicht, ſo ziehe man (31. Saz.) durch den Punkt A der BC die AE parallel, und ziehe die EC. Nun iſt (37. Saz.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke EBC gleich, denn es iſt mit ihm auf einerley Grundlinie BC und zwiſchen einerley Parallelen BC, AE. Aber nach der Vorausſezung iſt das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich; folglich iſt auch das Dreyeck DBC dem Dreyecke EBC, das heiſst, das gröſſere dem kleineren, gleich, welches unmöglich iſt; Folglich iſt nicht die AE der BC parallel. Auf gleiche Art kann aber gezeigt werden, daſs auch keine andere, auſſer der AD, ihr parallel ſey; Folglich iſt die AD der BC parallel.

Demnach ſind gleiche Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

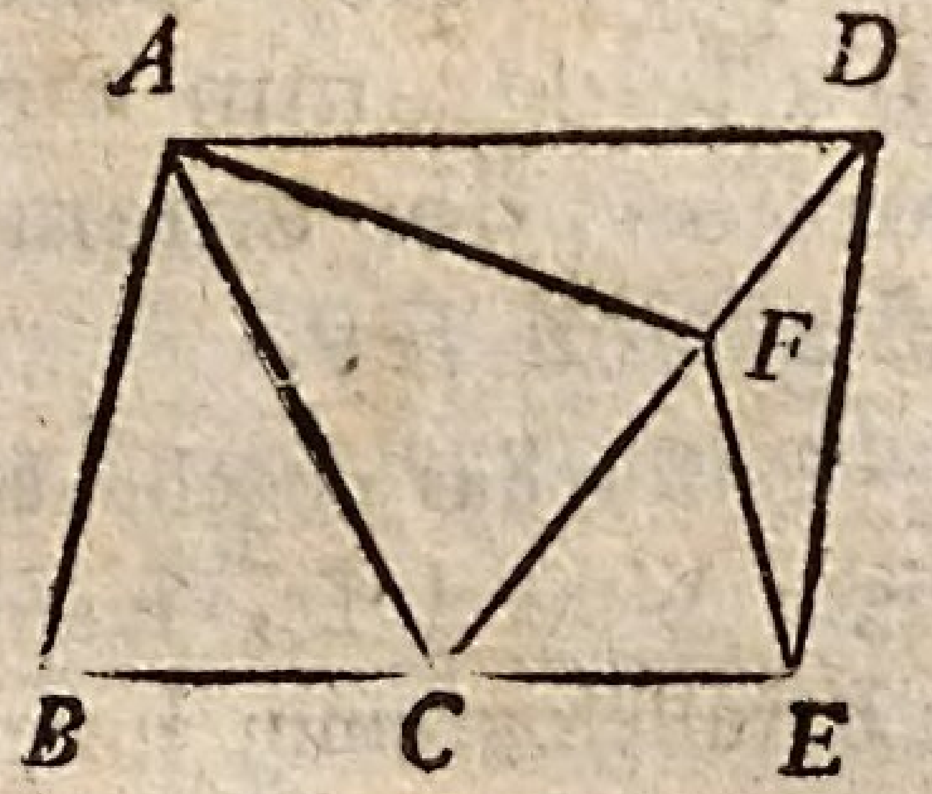
40. *Saz.*

Lehrſaz. Gleiche Dreyecke auf gleichen Grundlinien und an einerley Seite ſind zwiſchen einerley Parallelen.

Es

Es seyen die gleichen Dreyecke ABC, CDE auf den gleichen Grundlinien BC, CE und an einerley Seite, so behaupte ich, dass sie auch zwischen einerley Parallelen seyen. Man ziehe nämlich die AD, so behaupte ich, dass die AD der BE parallel sey.

Beweis. Wäre dies nicht, so ziehe man (31. Saz.) durch A der BE die FA parallel, und ziehe noch die FE. Nun ist (38. Saz.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke FCE gleich, denn beyde sind auf den gleichen Grundlinien BC, CE und zwischen einerley Parallelen *B*E, AF. Aber das Dreyeck AB*C* ist dem Dreyecke DCE gleich; folglich ist auch das Dreyeck DCE, das heisst, das grössere dem kleinern, gleich, welches unmöglich ist; Folglich ist nicht die AF der BE parallel. Eben so kann aber gezeigt werden, dass ihr auch keine andere, ausser der AD, parallel sey; folglich ist die AD der BE parallel.



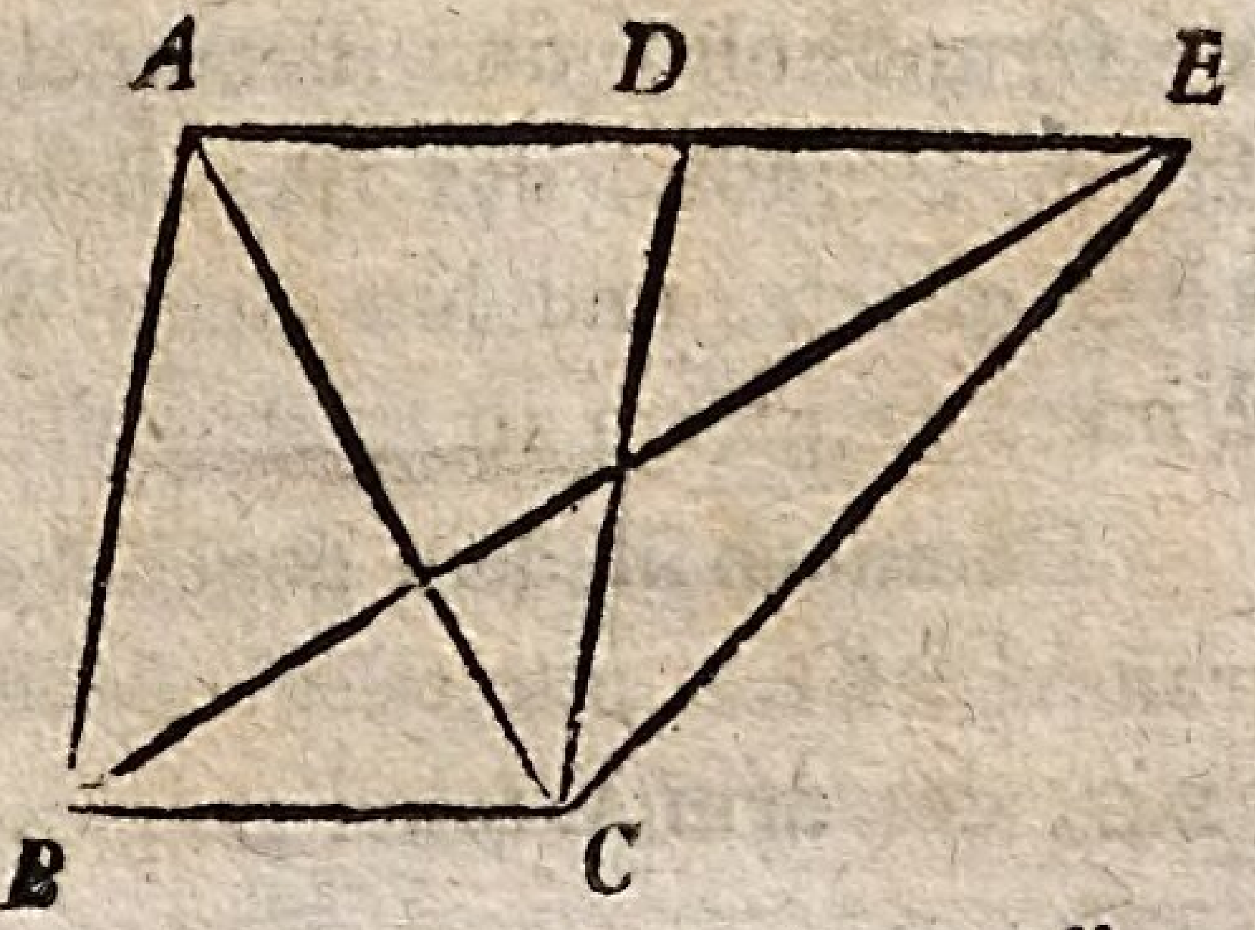
Demnach sind gleiche Dreyecke u. s. w. w. z. e. w.

41. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Parallelogramm und ein Dreyeck auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks.

Es sey das Parallelogramm ABCD und das Dreyeck EBC auf einerley Grundlinie BC, und zwischen einerley Parallelen BC, AE, so behaupte ich, dass das Parallelogramm ABCD das Doppelte des Dreyecks EBC sey.

Beweis. Man ziehe die AC. Nun ist (37. Saz.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke EBC gleich, denn es ist mit ihm auf einerley Grundlinie BC, und zwischen einerley Parallelen BC, AE. Aber das Par-



alle

allelogramm ABCD ist das Doppelte des Dreyecks ABC, denn (34. Saz.) wird es von der Diagonale AC halbirt; Folglich ist auch das Parallelogramm ABCD das Doppelte des Dreyecks EBC.

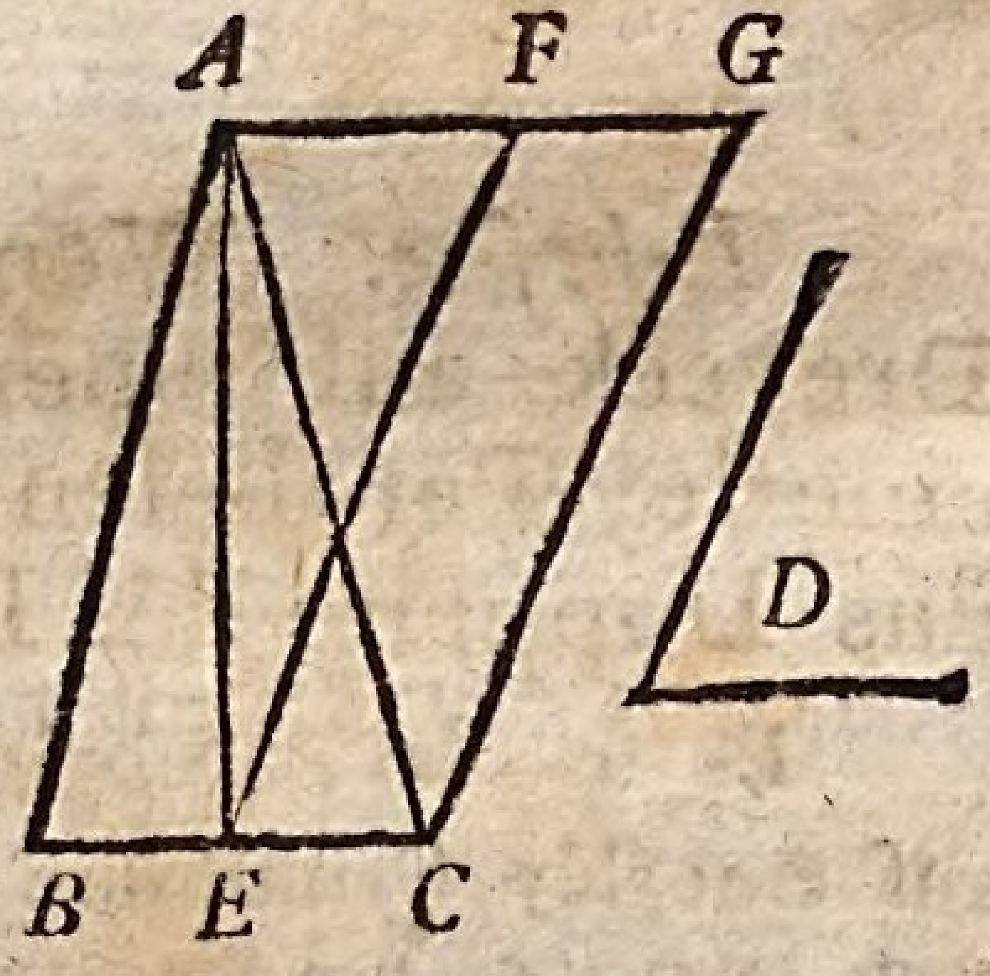
Wenn demnach ein Parallelogramm und ein Dreyeck u. s. w. w. z. e. w.

42. *Saz.*

Aufgabe. Einem gegebenen Dreyecke ein Parallelogramm unter einem Winkel gleich zu machen, der einem gegebenen geradlinigten Winkel gleich sey.

Es sey das gegebenen Dreyeck ABC, der gegebene geradlinigte Winkel D, man soll dem gegebenen Dreyecke ABC ein Parallelogramm unter einem Winkel gleich machen, der dem gegebenen geradlinigten Winkel D gleich sey.

Auflösung. Man halbire (10. Saz.) die BC in dem Punkte E, und ziehe die AE, hierauf seze man (23. Saz.) an den Punkt E der Linie EC einen Winkel CEF der dem Winkel D gleich sey, und ziehe (31. Saz.) durch A der EC die AG, und durch C der FE die CG parallel, so ist FECG ein Parallelogramm.



Beweis. Da die BE der EC gleich ist, so ist (38. Saz.) das Dreyeck ABE dem Dreyecke AEC gleich, denn sie sind auf gleichen Grundlinien BE EC, und zwischen einerley Parallelen BC, AG; folglich ist das Dreyeck ABC das Doppelte des Dreyecks AEC. Es ist aber (41. Saz.) das Parallelogramm FECG das Doppelte des Dreyecks AEC, denn es hat mit ihm einerley Grundlinie, und ist zwischen einerley Parallelen; Folglich ist (6. Grunds.) das Parallelogramm FECG dem Dreyecke ABC gleich, und hat einen Winkel CEF, der dem gegebenen Winkel D gleich ist.

Demnach ist dem gegebenen Dreyecke ABC das Parallelogramm FECG gleich gemacht worden, unter dem Winkel FEC, der dem Winkel D gleich ist. w. z. v. w.

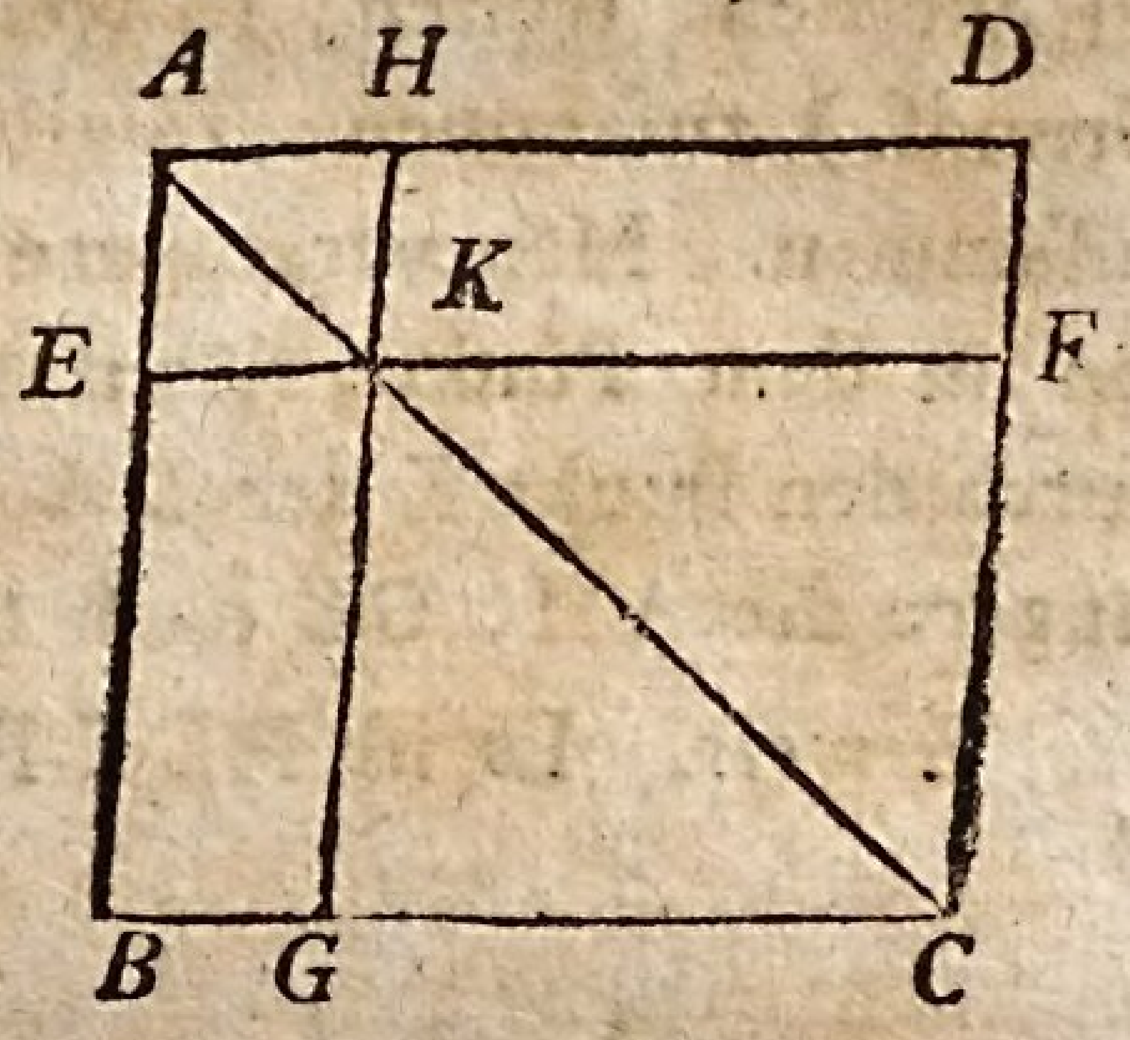
43. Saz

43. *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme einander gleich.

Es sey das Parellogramm ABCD, seine Diagonale AC, um die Diagonale AC liegen die Parallelogramme EH, FG deren Ergänzungen seyen BK, KD, so behaupte ich, daſs die Ergänzung BK der KD gleich sey.

Beweis. Da ABCD ein Parallelogramm, und AC seine Diagonale ist, so ist (34. Saz.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke ADC gleich. Ferner da EKHA ein Parallelogramm, und AK seine Diagonale ist, so ist das Dreyeck AEK dem Dreyecke AHK gleich. Aus eben dem Grunde ist auch das Dreyeck KFC dem Dreyecke KGC gleich. Da nun das Dreyeck AEK dem Dreyecke AHK, und das Dreyeck KFC dem Dreyecke KCG gleich ist, so sind die zwey Dreyecke AEK, KCG zusammen den zwey Dreyecken AHK, KFC zusammen gleich. Es ist aber auch das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke ADC gleich; Folglich ist (3. Grundf.) auch der eine Rest, die Ergänzung BK, dem andern Reste, der Ergänzung KD, gleich.



Demnach sind in jedem Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

44. *Saz.*

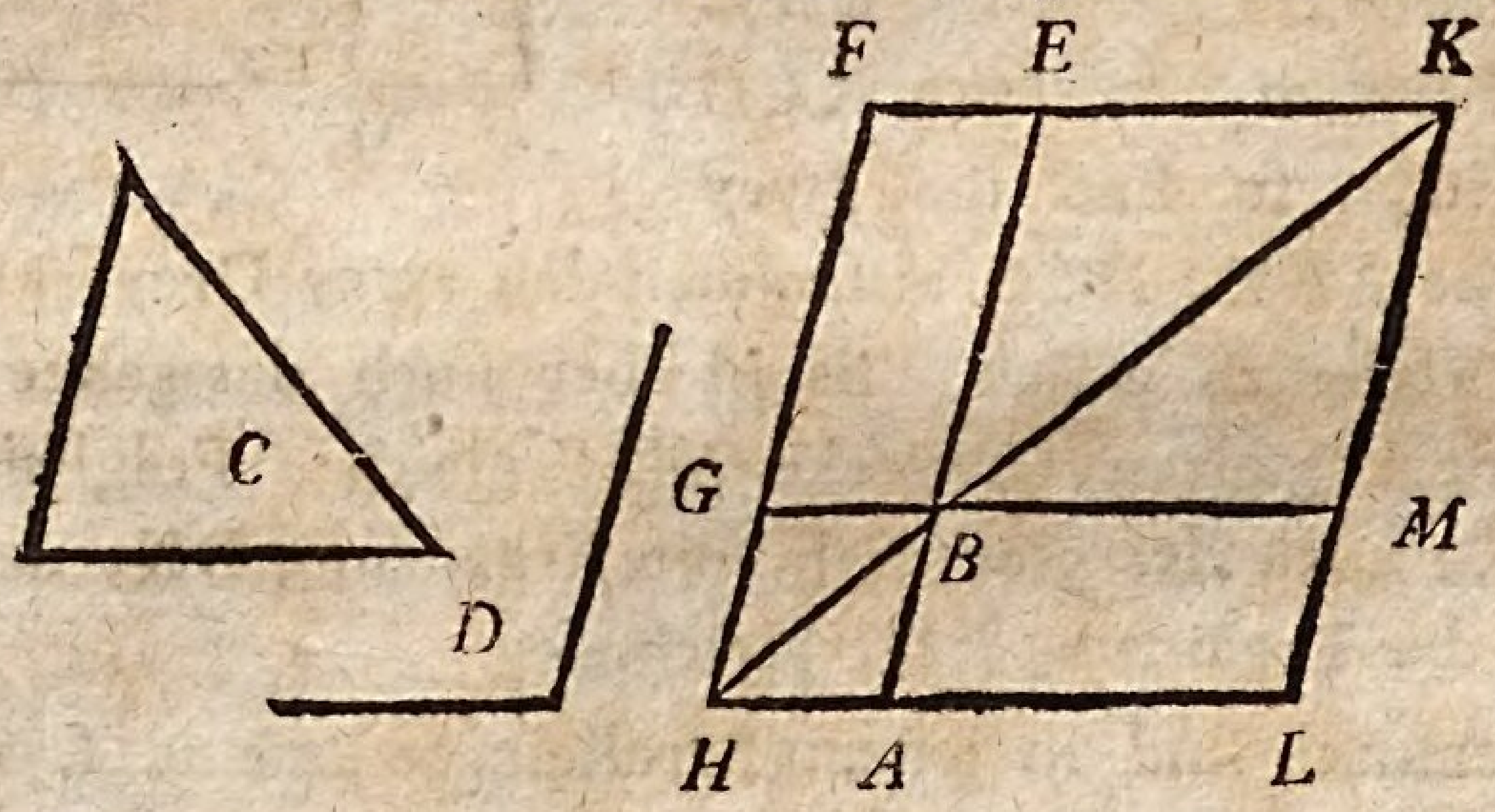
Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm, das einem gegebenen Dreyecke gleich sey, unter einem gegebenen geradlinigten Winkel zu beschreiben.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, das gegebene Dreyeck C, der gegebene geradlinigte Winkel D, und man soll auf der gegebenen geraden Linie AB, unter einem Winkel, der dem

dem gegebenen Winkel D gleich ſey, ein Parallelogramm beſchreiben, das dem gegebenen Dreyecke *C* gleich ſey.

Auflöſung. Man mache (42. Saz.) unter dem Winkel EBG, der dem Winkel D gleich ſey, dem Dreyecke *C* das Parallelogramm BEFG gleich, und ſeze die BE in gerader Linie an die AB, hierauf verlängere man die FG nach H, ziehe (31. Saz.) durch den Punkt A der BG oder EF die AH parallel, und ziehe die HB. Da nun die Parallelen AH, EF von der Linie HF geſchnitten werden, ſo ſind (29. Saz.) die Winkel AHF, HFE zwey rechten gleich; folglich die Winkel BHG, GFE kleiner, als zwey rechte. Linien aber, die unter Winkeln welche kleiner, als zwey rechte, ſind, geſchnitten werden, treffen, ſo weit, als nöthig iſt, verlängert (11. Grundſ.) zuſammen; folglich treffen die HB, FE verlängert zuſammen. Man verlängere ſie alſo (2. Ford.), und ſie treffen in dem Punkte K zuſammen; ſo ziehe man (31. Saz.) durch den Punkt K der EA oder FH die KL parallel, und verlängere die AH, GB nach L, M.

Beweis. Es iſt HLKF ein Parallelogramm, deſſen Diago-



nale KH, und um die Diagonale HK liegen die Parallelogramme AG, ME, deren Ergänzungen ſind LB, BF; folglich iſt (43. Saz.) die LB der BF gleich. Es iſt aber BF dem Dreyecke C gleich; Folglich iſt auch LB dem Dreyecke C gleich. Und weil (15. Saz.) der Winkel GBE dem Winkel ABM, und auch dem Winkel D gleich iſt, ſo iſt auch der Winkel ABM dem Winkel D gleich.

Demnach iſt auf der gegebenen geraden Linie AB, unter dem Winkel ABM, welcher dem Winkel D gleich iſt, das Parallelogramm ~~AB~~ ans beſchrieben worden, das dem gegebenen Dreyecke C gleich iſt. w. z. v. w.

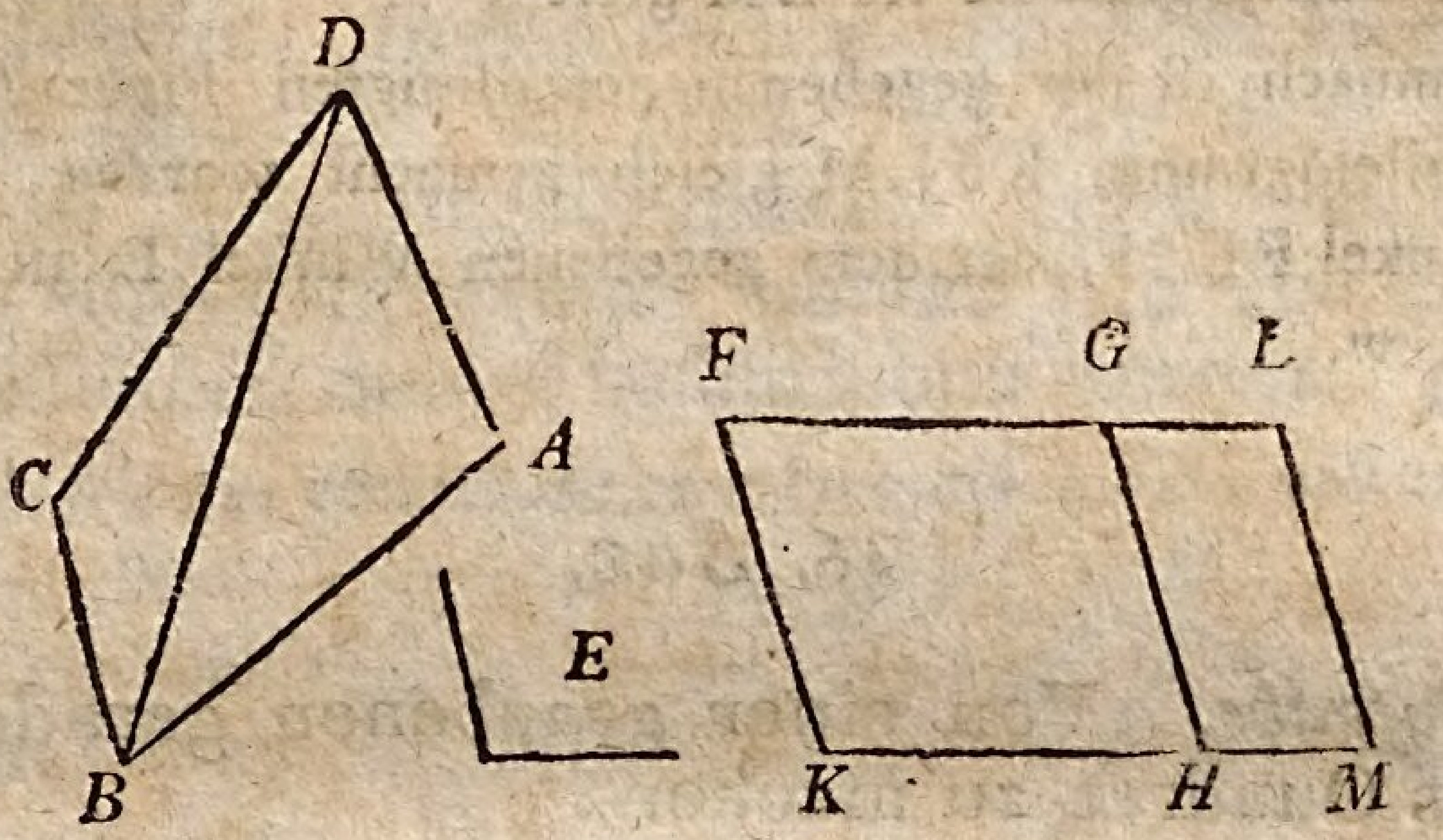
45. Saz.

45. *Saz.*

Aufgabe. Einer gegebenen geradlinigten Figur ein Parallelogramm unter einem gegebenen geradlinigten Winkel gleich zu machen.

Es fey die gegebene geradlinigte Figur ABCD, der gegebene geradlinigte Winkel E; man foll der geradlinigten Figur ABCD unter einem Winkel, der dem E gleich fey, ein Parallelogramm gleich machen.

Auflöfung. Man ziehe die DB, und mache (42. Saz.) unter dem Winkel HKF, der dem Winkel E gleich fey, das Parallelogramm FH dem Dreyecke ADB gleich. Hierauf befchreibe man auf der Linie GH das Parallelogramm GM, das dem



Dreyecke DBC gleich fey, unter dem Winkel GHM, der dem Winkel E gleich fey.

Beweis. Da der Winkel E jedem der beyden HKF, GHM gleich ift, fo ift auch der Winkel HKF dem Winkel GHM gleich. Man feze zu beyden den Winkel KHG hinzu, fo find die Winkel FKH, KHG den Winkeln KHG, GHM gleich. Aber (29. Saz.) find die Winkel FKH, KHG zwey rechten gleich; Folglich find auch die Winkel KHG, GHM zwey rechten gleich. Weil nun an dem Punkte H der Linie GH zwey gerade Linien KH, HM, die nicht nach einerley Seite zu liegen, Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich find, fo liegt (14. Saz.) die KH mit der HM in *einer* geraden Linie. Da ferner die Parallelen KM, FG von der Linie HG gefchnitten werden, fo find die Wechfelwinkel MHG, HGF (29. Saz.) einander gleich. Sezt man alfo zu beyden den

Win-

Winkel HGL hinzu, so sind die Winkel MHG, HGL den Winkeln HGF, HGL gleich. Aber die Winkel MHG, HGL sind (29. Saz.) zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel HGF, HGL zwey rechten gleich, und mithin liegt die FG mit der GL in *einer* geraden Linie. Da nun die KF der HG gleich und parallel ist, und eben so die HG der ML, so ist (1. Grundf. u. 30. Saz.) auch die KF der ML gleich und parallel, und beyde werden von den geraden Linien KM, FL verbunden; Folglich sind (33. Saz.) auch die KM, FL gleich und parallel, und mithin ist KFLM ein Parallelogramm. Da aber das Dreyeck ABD dem Parallelogramme HF, und das Dreyeck ABC dem Parallelogramme GM gleich ist, so ist die ganze geradlinigte Figur ABCD dem ganzen Parallelogramme KFLM gleich.

Demnach ist der gegebenen geradlinigten Figur ABCD das Parallelogramm KFLM gleich gemacht worden, unter dem Winkel FKM, der dem gegebenen Winkel E gleich ist. w. z. v. w.

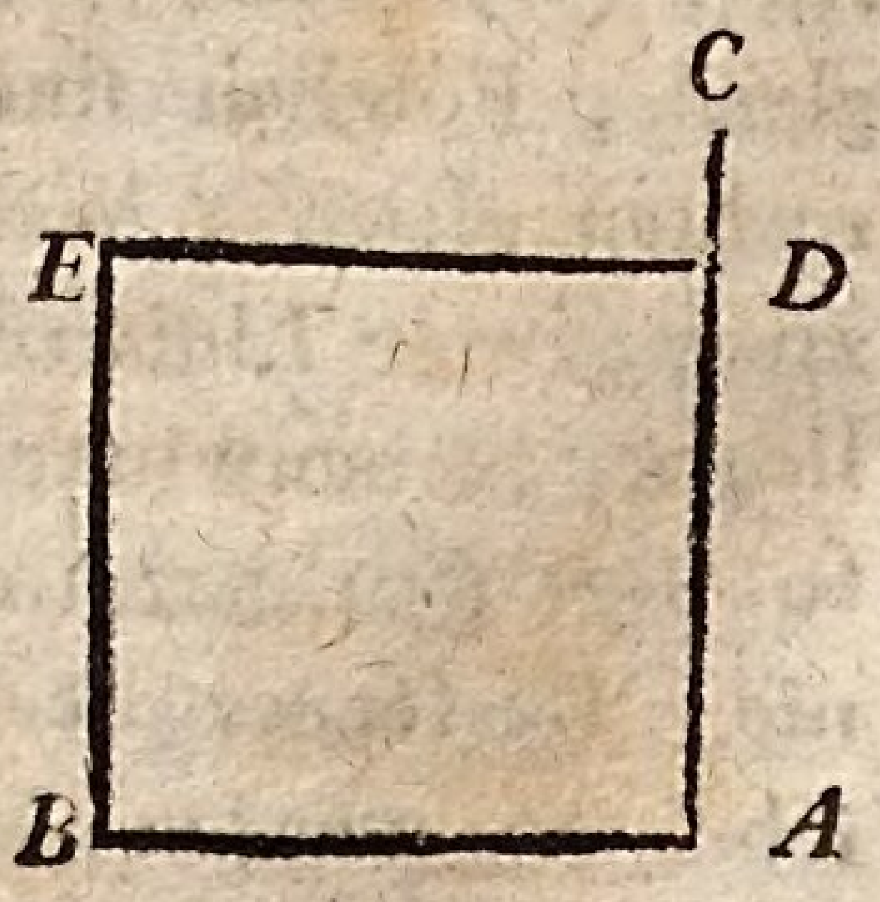
46. *Saz.*

Aufgabe. Von einer gegebenen geraden Linie das Quadrat zu machen.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, und man soll von der Linie AB das Quadrat machen.

Auflösung. Man errichte (11. Saz.) in dem Punkte A der Linie AB die AC auf ihr lothrecht, und mache (3. Saz.) der AB die AD gleich. Hierauf ziehe man (31. Saz.) durch den Punkt D der AB die DE, und durch den Punkt B der AD die BE parallel.

Beweis. Nach der Construction ist ADEB ein Parallelogramm, folglich ist die AB der DE gleich. Aber die AB ist auch der AD gleich; folglich sind die vier Seiten BA, AD, DE, EB alle einander gleich, und mithin ist ADEB ein gleichseitiges Parallelogramm. Ich behaupte aber, dass es



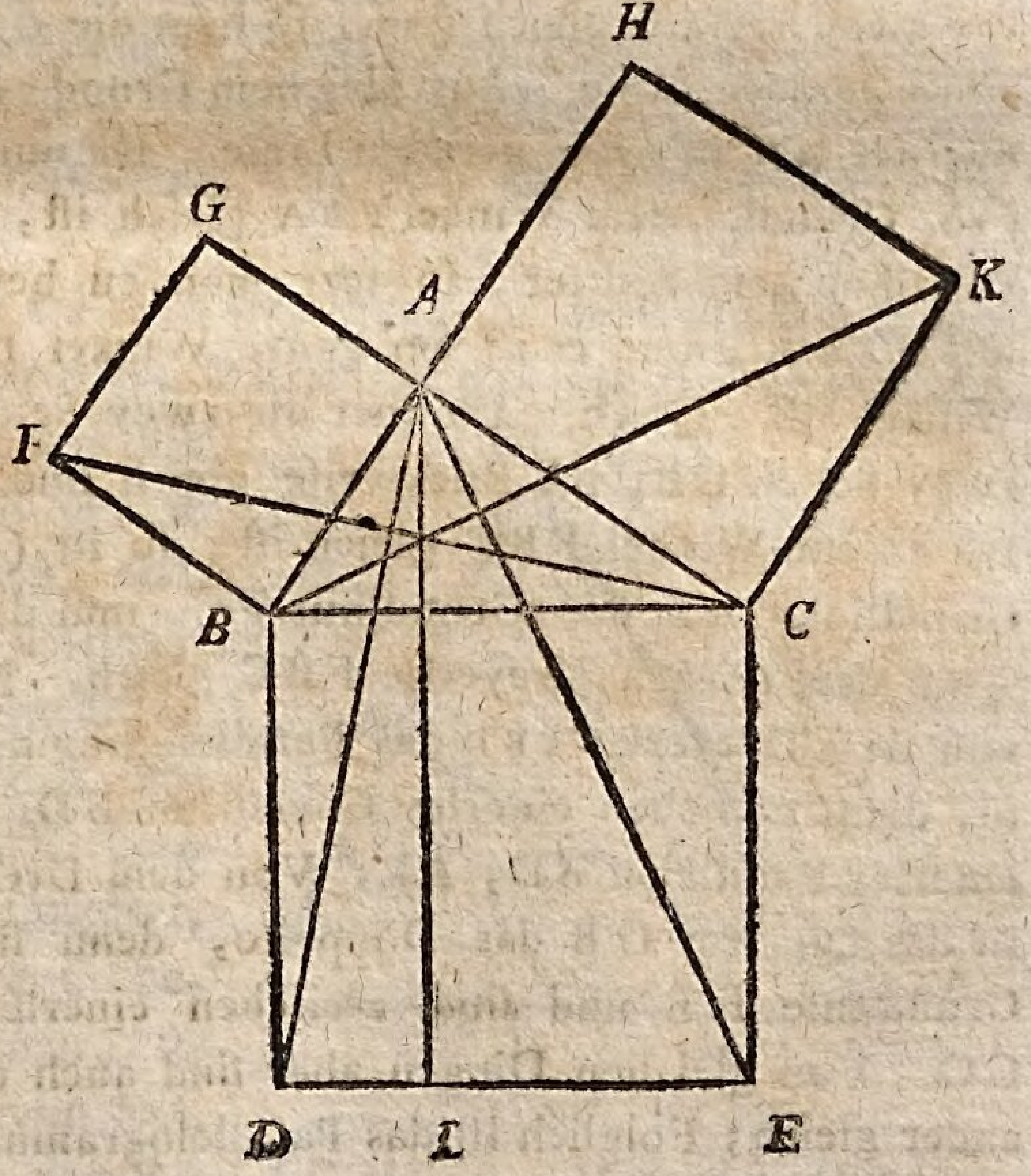
auch

auch rechtwinklicht sey. Denn weil die Parallelen AB, DE von der Linie AD geschnitten werden, so sind (29. Saz.) die Winkel BAD, ADE zwey rechten gleich. Aber der Winkel BAD ist nach der Construction ein rechter; folglich ist auch der ADE ein rechter. In Parallelogrammen aber sind (34. Saz) die Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich; folglich ist auch jeder der beyden Gegenwinkel ABE, BED ein rechter, und daher ADEB rechtwinklicht. Es ist aber gezeigt worden, dass es auch gleichseitig sey; Folglich ist es ein Quadrat, und es ist von der Linie AB beschrieben, w. z. v. w.

47. *Saz.*

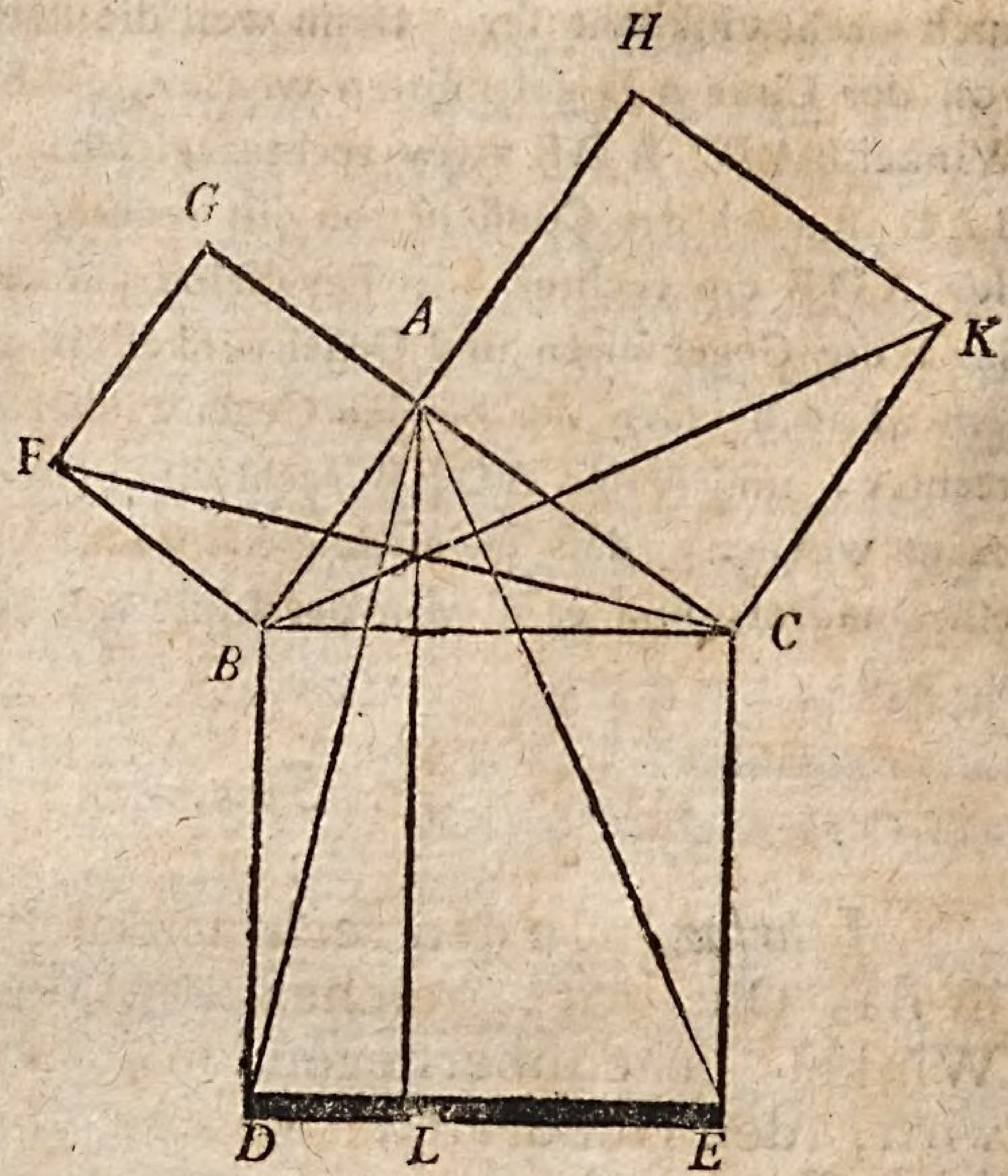
Lehrsaz. In den rechtwinklichten Dreyecken ist das Quadrat, welches von der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite beschrieben wird, den Quadraten, welche von den ihn einschliessenden Seiten beschrieben werden, gleich.

Es sey das rechtwinklichte Dreyeck ABC, und in demselben der Winkel BAC ein rechter, so behaupte ich, dass das Quadrat, das von der Seite BC beschrieben wird, den Quadraten, die von den Seiten BA, AC beschrieben werden, gleich sey



Beweis. Man beschreibe von der Seite BC das Quadrat BDEC, von den Seiten BA,

AC die Quadrate GB, HC, und ziehe durch den Punkt A der BD oder CE die AL parallel, hierauf ziehe man noch die AD, FC.



Da nun jeder der Winkel BAC, BAG ein rechter ist, und mithin an dem Punkte A der Linie BA die zwey geraden Linien AC, AG, die nicht nach einerley Seite zu liegen, Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich sind, so liegt die CA mit der AG in *einer* geraden Linie. Aus gleichem Grunde liegt auch die AB mit der AH in *einer* geraden Linie. Da nun der Winkel DBC (10. Grundſ.) dem Winkel FBA gleich iſt, denn es iſt jeder von ihnen ein rechter, ſo ſeze man zu beyden den Winkel ABC hinzu, und es iſt der ganze Winkel DBA dem ganzen Winkel FBC gleich. Da aber die zwey Seiten DB, ~~DA~~ BA den zwey Seiten CB, BF ſtückweiſe gleich ſind, und der Winkel DBA dem Winkel FBC gleich iſt, ſo iſt (4. Saz) auch die Grundlinie AD der Grundlinie FC, und das ganze Dreyeck ABD dem ganzen Dreyecke FBC gleich. Nun iſt (41. Saz.) von dem Dreyecke ABD das Parallelogramm BL das Doppelte, denn ſie haben einerley Grundlinie BD, und ſind zwiſchen einerley Parallelen BD, AL; Von dem Dreyecke FBC aber iſt das Quadrat GB das Doppelte, denn ſie haben einerley Grundlinie FB und ſind zwiſchen einerley Parallelen FB, GC. Von gleichen Dingen aber ſind auch die Doppelten einander gleich; Folglich iſt das Parallelogramm BL dem Quadrate GB gleich. Ziehet man nun noch die Linien AE, BK, ſo

kann

kann auf gleiche Art gezeigt werden, daſs auch das Parallelogramm CL dem Quadrate HC gleich ſey; Folglich iſt das ganze Quadrat BDEC den beyden Quadraten GB, HC gleich. Es iſt aber BDEC das von der Linie BC beſchriebene Quadrat, GB, HC aber ſind die von den Linien BA, AC beſchriebenen Quadrate; Folglich iſt das von der Seite BC beſchriebene Quadrat BE den von den Seiten BA, AC beſchriebenen Quadraten gleich

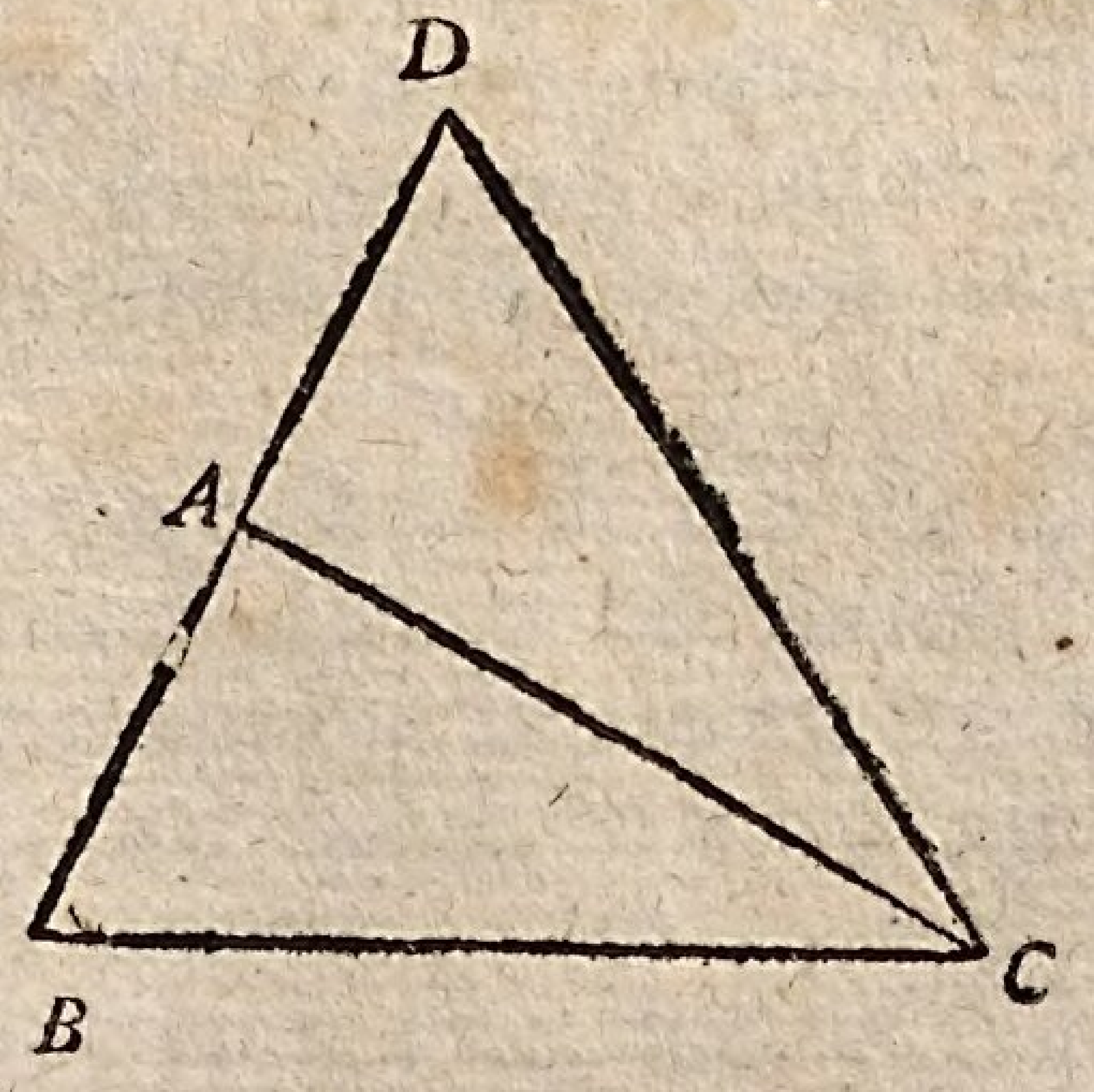
Demnach iſt in den rechtwinklichten Dreyecken u. ſ. w. w. z. e. w.

48. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn das Quadrat, das von einer der Seiten eines Dreyecks beſchrieben wird, den Quadraten, welche von den übrigen Seiten deſſelben beſchrieben werden, gleich iſt, ſo iſt der von den zwey übrigen Seiten des Dreyecks eingeſchloſſene Winkel ein rechter.

Es ſey das Quadrat, welches von einer Seite BC des Dreyecks ABC beſchrieben wird, den Quadraten, welche von den übrigen Seiten BA, AC des Dreyecks beſchrieben werden, gleich, ſo behaupte ich, daſs der Winkel BAC ein rechter ſey.

Beweis. Man errichte (11. Saz.) in dem Punkte A auf der AC die AD lothrecht, mache die AD der BA gleich, und ziehe die DC. Da nun die DA der AB gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat, welches von der DA beſchrieben wird, dem Quadrate, welches von der AB beſchrieben wird, gleich. Man ſeze zu beyden das Quadrat, welches von der AC beſchrieben wird, hinzu, ſo ſind die Quadrate von DA, AC den Quadraten von BA, AC gleich. Aber den Quadra-



ten von DA, AC ist (47. Saz.) das Quadrat von DC gleich, denn der Winkel DAC ist ein rechter, und den Quadraten von BA, AC ist, nach der Voraussezung, das Quadrat, von BC gleich; Folglich ist das Quadrat von DC dem von BC, und mithin auch die Seite DC der Seite CB gleich. Da nun auch die AD der AB gleich, die AC aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AD, AC den beyden BA, AC stückweise gleich, auch ist die Grundlinie DC der Grundlinie CB gleich, folglich ist (8. Saz.) der Winkel DAC dem Winkel BAC gleich; der Winkel DAC aber ist ein rechter; Folglich ist auch der BAC ein rechter.

Wenn demnach das Quadrat u. s. w. w. z. e. w.

EUKLIDS ELEMENTE.

ZWEYTES BUCH.

Erklärungen.

1. Von jedem *rechtwinklichten Parallelogramme* (*Rechtecke*) sagt man, *es sey aus den beyden geraden Linien*, welche den rechten Winkel einschliessen.

2. In einem Parallelogramme heisse ein jedes der beyden um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme sammt den beyden Ergänzungen, *ein Gnomon.*

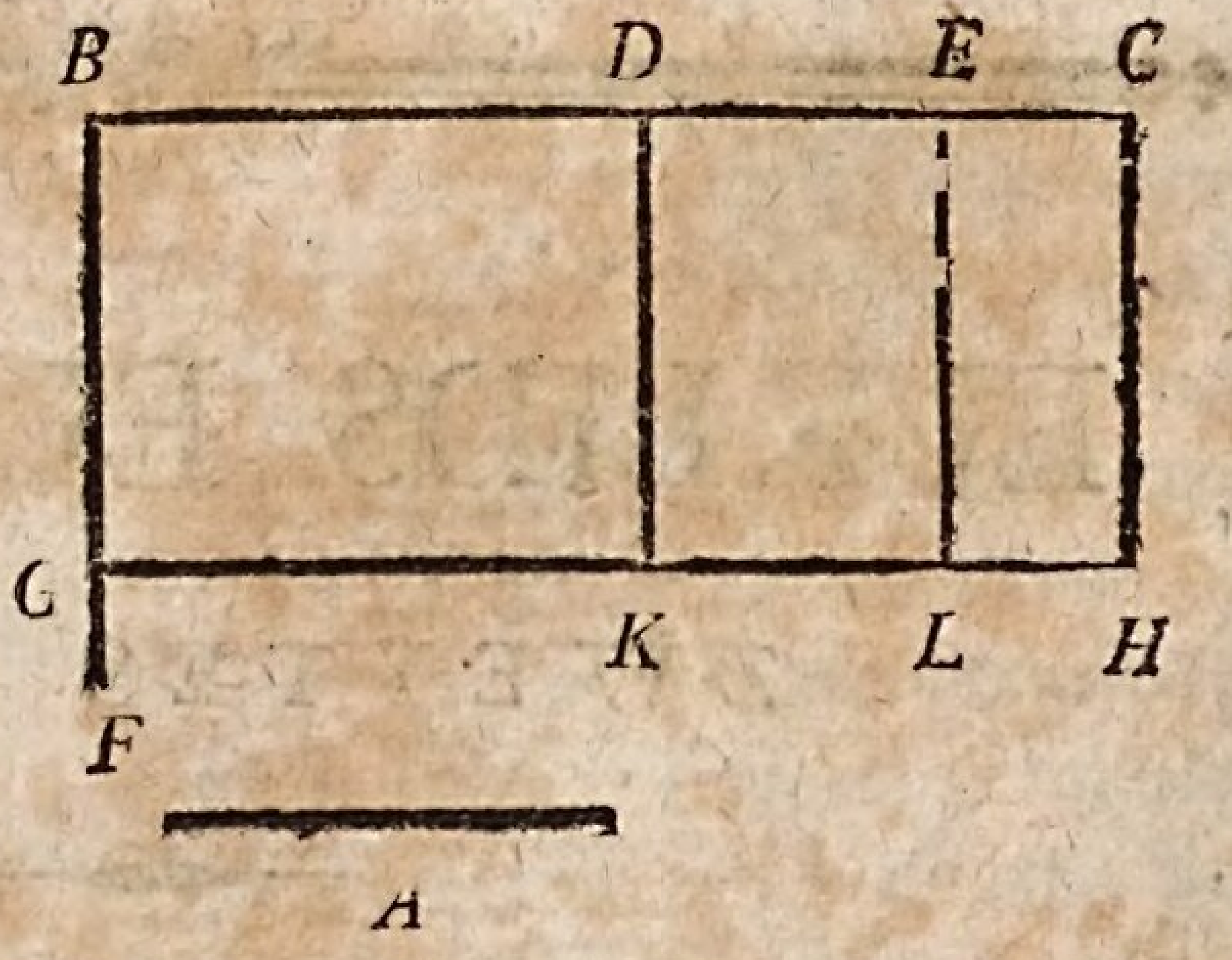
1. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn von zwey geraden Linien die eine in beliebig viele Abschnitte getheilt wird, so ist das Rechteck aus den beyden Linien den Rechtecken aus der ungetheilten Linie und jedem der Abschnitte gleich.

Es seyen die zwey gerade Linien A, BC, und die Linie BC werde nach Belieben in den Punkten D, E getheilt, so behaupte ich, dass das Rechteck aus den Linien A, BC den Rechtecken aus den Linien A, BD aus A, DE und aus A, EC gleich sey.

Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkte B auf der BC das Loth BF, mache die BG der A gleich, und ziehe alsdann (1, 31. S.) durch den Punkt G der BC die GH

durch die Punkte D, E, C aber der B G die D K, E L, C H parallel.



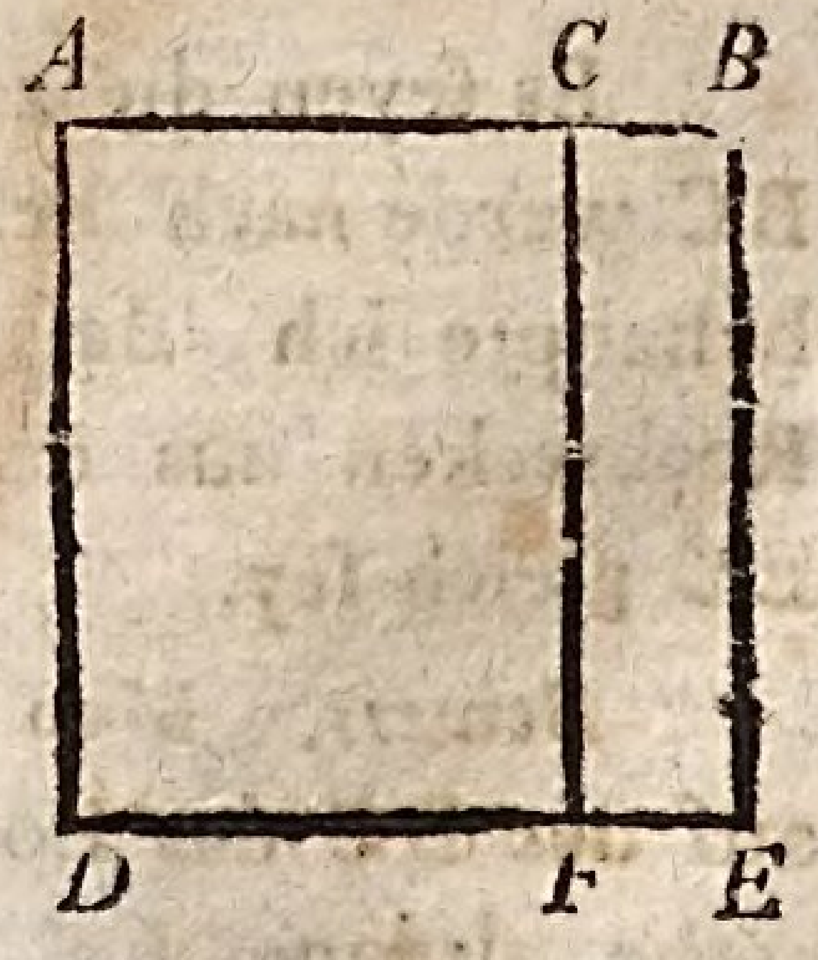
Das Rechteck BH ist den Rechtecken B K, DL, E H gleich. BH aber ist das Rechteck aus A, B C; denn es ist das Rechteck aus B G, B C, die G B aber ist der A gleich. Eben so ist B K das Rechteck aus A, B D; denn es ist das Rechteck aus B G, B D die B G aber ist der A gleich. Ferner ist D L das Rechteck aus *A*, D E; denn es ist das Rechteck aus D K, D E, die D K aber ist der B G, folglich auch der A, gleich. Endlich ist aus eben den Gründen E H das Rechteck aus A, E C; Folglich ist das Rechteck aus A, B C, dem Rechtecke aus A, B D, dem Rechtecke aus A, D E, und dem Rechtecke aus A, E C gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben geschnitten wird, so sind die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem der Abschnitte dem Quadrate der ganzen Linie gleich.

Die gerade Linie A B werde nach Belieben in dem Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dass das Rechteck aus A B, A C sammt dem Rechtecke aus A B, C B dem Quadrate von A B gleich sey.



Beweis. Man mache (1, 46. S.) von A B das Quadrat A D E B, und ziehe (1, 31. S.) durch den Punkt *C* der A D oder B E die C F parallel.

Nun ist das Parallelogramm A E den Parallelogrammen A F, C E gleich. Es ist aber A E das Quadrat von A B. Das Parallelogrammen A F hingegen ist das Recht-

eck

eck aus AB, AC; denn es ist das Rechteck aus AD, AC, die AD aber ist der AB gleich. Endlich ist das Parallelogramm CE das Rechteck aus AB, CB; denn es ist das Rechteck aus BC, BE, die BE aber ist der AB gleich; Folglich ist das Rechteck aus AB, AC sammt dem Rechtecke aus AB, BC dem Quadrate von AB gleich.

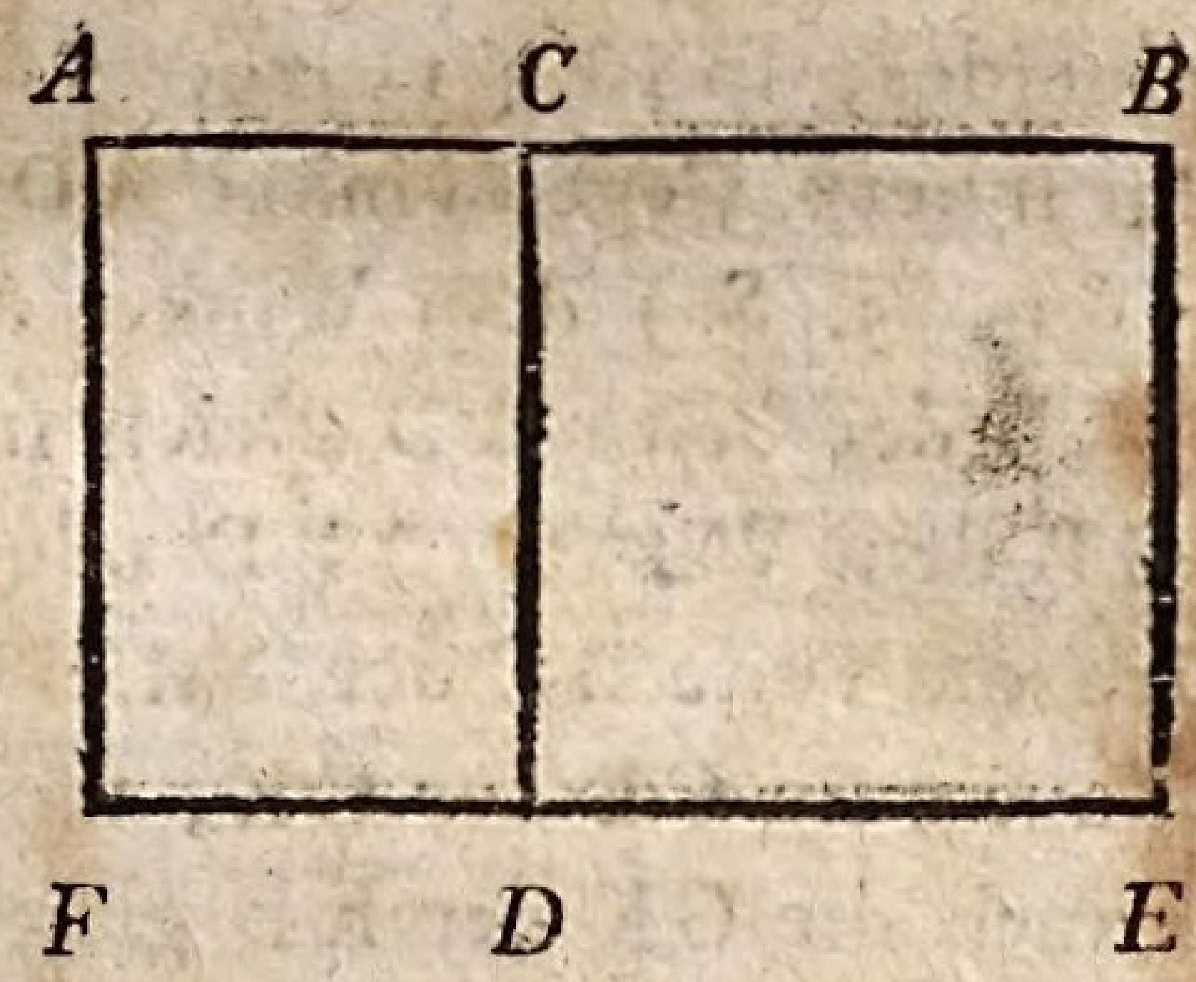
Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben geschnitten wird, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der beyden Abschnitte dem Rechtecke aus den beyden Abschnitten und dem Quadrate des vorgedachten Abschnitts gleich.

Es werde die gerade Linie AB nach Belieben in dem Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dass das Rechteck aus AB, BC dem Rechtecke aus AC, CB sammt dem Quadrate von CB gleich sey.

Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von BC das Quadrat CDEB, verlängere die ED bis nach F, und ziehe (1, 31. S.) durch den Punkt A der CD, oder BE die AF parallel.



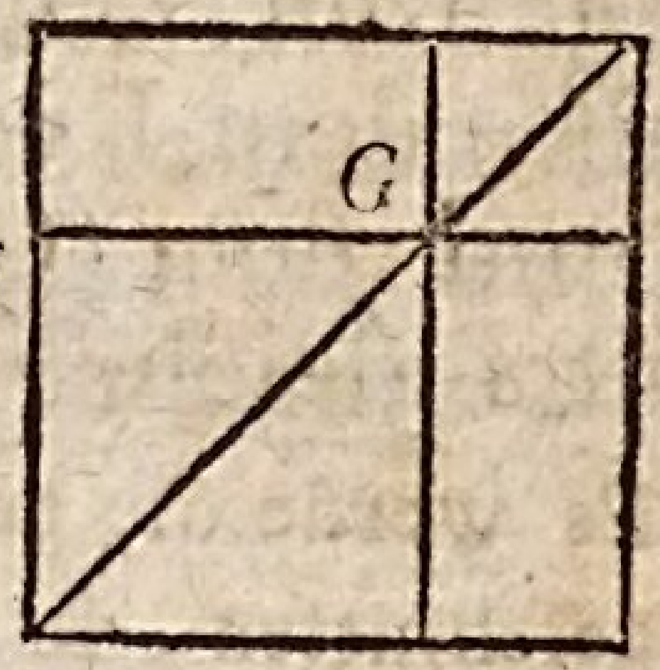
Nun ist das Parallelogramm AE den Parallelogrammen AD, CE gleich. Es ist aber AE das Rechteck aus AB, BC; denn es ist das Rechteck aus AB, BE, die BE aber ist der BC gleich. Das Parallelogramm AD hingegen ist das Rechteck aus AC, CB; denn die CD ist der CB gleich. Endlich ist CE das Quadrat von BC; folglich ist das Rechteck aus AB, BC dem Rechtecke aus AC CB sammt dem Quadrate von CB gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

Lehrsaz Wenn eine gerade Linie nach Belieben getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie den Quadraten der beyden Abschnitte und dem doppelten Rechtecke aus beyden Abschnitten gleich.

Es werde die gerade Linie AB nach Belieben in dem Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dass das Quadrat von AB den Quadraten von AC, CB und dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich sey.



Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe die BD; alsdann ziehe man (1, 31. Saz.) durch den Punkt C der AD oder BE die CF, und durch den Punkt G der AB oder DE die HK parallel.

Da nun die CF der AD parallel ist, und die BD diese beyden schneidet, so ist (1, 29. S.) der äussere Winkel BGC seinem innern Gegenwinkel ADB gleich. Aber der Winkel ADB ist (1, 5. S.) dem Winkel ABD gleich, weil auch die Seite AB der Seite AD gleich ist; folglich ist auch der Winkel CGB dem Winkel ABD oder CBG, und mithin (1, 6. S.) auch die Seite BC der Seite CG gleich. Aber (1, 34. S.) ist auch die CB der GK, und die CG der BK gleich; folglich ist auch die GK der KB gleich; und mithin ist CGKB gleichseitig. Ich behaupte aber ferner, dass es auch rechtwinklicht sey. Denn da die CG der BK parallel ist, und die CB diese beyden schneidet, so sind (1, 29. S.) die Winkel KBC, GCB zwey rechten gleich. Es ist aber (1, 30 Erkl.) KBC ein rechter; folglich ist auch GCB ein rechter, mithin sind (1, 34. S.) auch ihre Gegenwinkel CGK, GKB zwey rechte, und CGKB ist also rechtwinklicht. Es ist aber gezeigt worden, dass es auch gleichseitig sey; folglich ist es ein Quadrat, und es ist das Quadrat von BC. Aus eben den Gründen aber ist auch HF ein Quadrat, und zwar das Quadrat von HG,

HG, das ist von AC. Es sind also HF, CK, die Quadrate von AC, CB. Da nun ferner (1, 43. S.) das Parallelogramm AG dem Parallelogramme GE gleich, und AG das Rechteck aus AC, CB ist, indem die GC der CB gleich ist; so ist folglich auch GE dem Rechtecke aus AC, CB gleich; und mithin sind AG, GE dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich. Es sind aber auch HF, CK die Quadrate von AC, CB; folglich sind die vier Parallelogramme HF, CK, AG, GE den Quadraten von AC, CB und dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich. Aber die vier Parallelogramme HF, CK, AG, GE sind das ganze Parallelogramm ADEB, welches das Quadrat von AB ist; Folglich ist das Quadrat von AB den Quadraten von AC, CB und dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

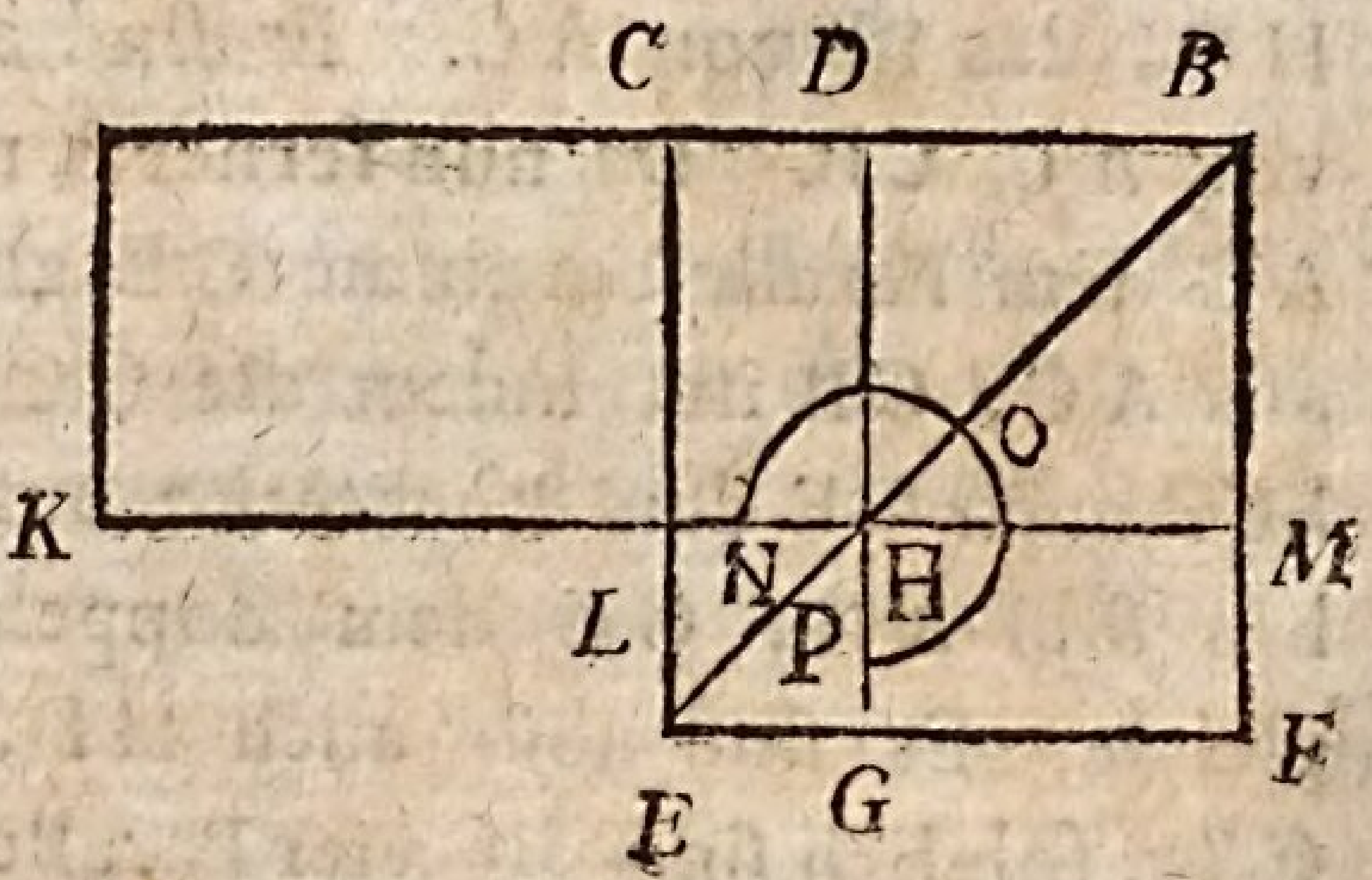
Zusaz. Hieraus erhellet, dass in den Quadraten die um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Theile getheilt wird, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten sammt dem Quadrate des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten dem Quadrate der halben Linie gleich.

Es werde Linie AB in dem Punkte C in gleiche, in dem Punkte D aber in ungleiche Theile getheilt so behaupte ich, dass das Rechteck aus AD, DB sammt dem Quadrate von CD dem Quadrate von CB gleich sey.

Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von CB das Quadrat CEFB, und ziehe die BE; alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt D der CE oder BF die DHG, durch den Punkt H aber der CB oder EF die KLM, und endlich durch den Punkt A der CL oder BM die AK parallel.



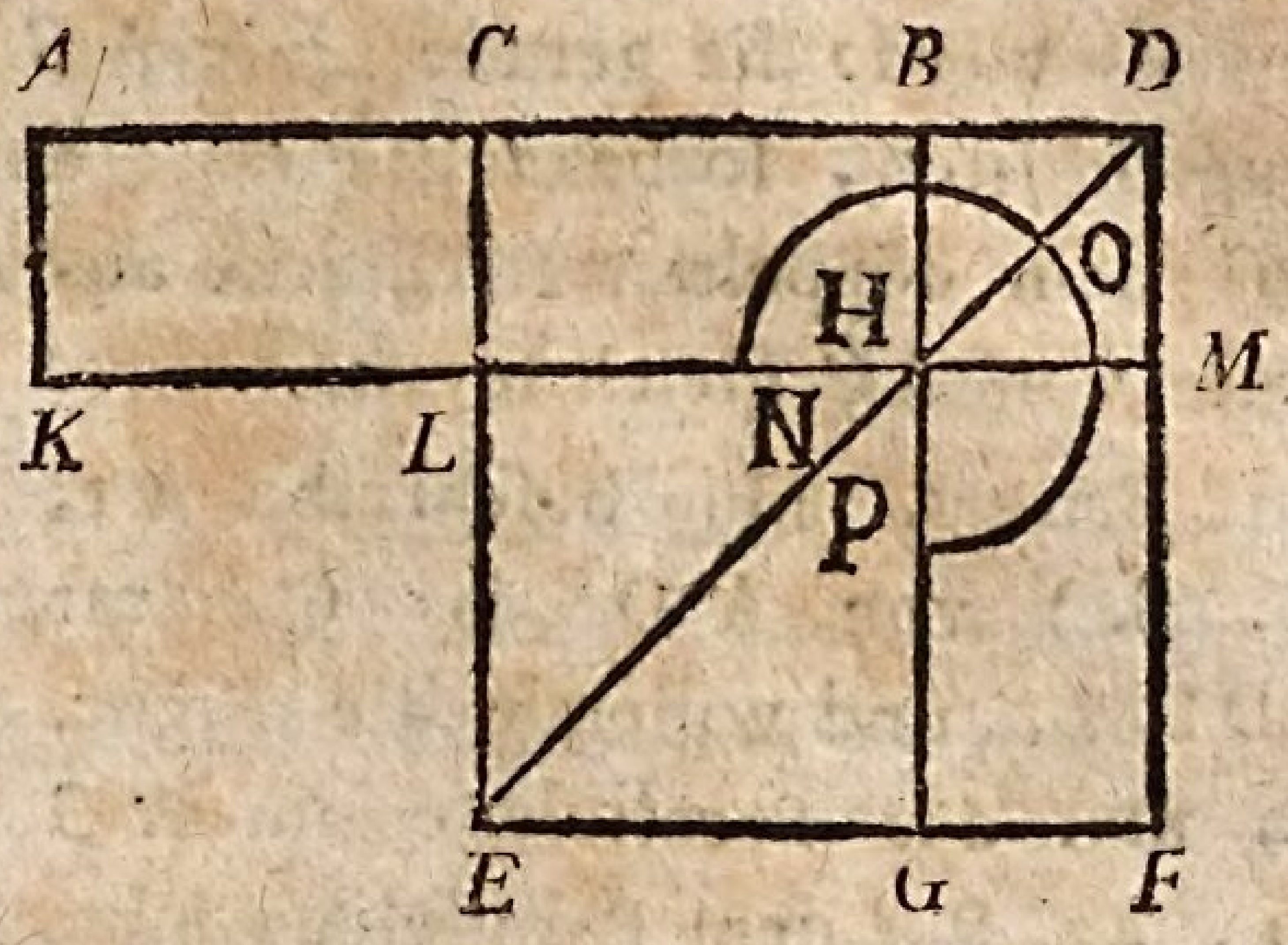
Da nun (1, 43. S.) die Ergänzung CH der Ergänzung HF gleich ist, so ist, wenn man beyderseits das Parallelogramm DM hinzusezt, (1, 2. Grundſ.) das ganze Parallelogramm CM dem ganzen Parallelogramme DF gleich. Aber das Parallelogramm CM ist (1, 36. S.) dem Parallelogramme AL gleich, weil die AC der CB gleich ist; folglich ist auch das Parallelogramm AL dem Parallelogramme DF gleich. Man seze beyderseits CH hinzu, so ist das ganze Parallelogramm AH den Parallelogrammen DF, DL gleich. Aber das Parallelogramm AH ist das Rechteck aus AD, DB, weil die DH der DB gleich ist; FD, DL hingegen ist der Gnomon NOP; folglich ist der Gnomon NOP dem Rechtecke aus AD, DB gleich. Man seze beyderseits LG, welches (2, 4. Zuſ.) dem Quadrate von CD gleich ist, hinzu, so ist der Gnomon NOP sammt dem Quadrate LG dem Rechtecke aus AD, DB sammt dem Quadrate von CD gleich. Nun ist der Gnomon NOP sammt dem Quadrate LG das ganze Quadrat CEFB, welches das Quadrat von CB ist; Folglich ist das Rechteck aus AD, DB sammt dem Quadrate von CD dem Quadrate von CB gleich.

Wenn demnach u. ſ. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie halbirt, und ihr eine andere in gleicher Richtung angesezt wird, so ist das Rechteck aus der aus der ganzen und der angesezten bestehenden und der angesezten Linie sammt dem Quadrate der halben Linie dem Quadrate der aus der halben und der angesezten bestehenden Linie gleich.

Es werde die gerade Linie AB in dem Punkte C halbirt, und ihr die gerade Linie BD in gleicher Richtung angesezt, so



ſo behaupte ich, daſs das Rechteck aus AD, BD ſammt dem Quadrate von CB dem Quadrate von CD gleich ſey.

Beweis. Man beſchreibe (1, 46. S.) von CD das Quadrat CEFD, und ziehe die DE, alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt B der CE oder DF die BHG, durch den Punkt H aber der AD oder EF die KLM, und endlich durch den Punkt A der CL oder DM die AK parallel.

Da nun die AC der CB gleich iſt, ſo iſt (1, 36. S.) auch das Parallelogramm AL dem Parallelogramme CH gleich. Aber das Parallelogramm CH iſt (1, 43. S.) dem Parallelogramme HF gleich; folglich iſt auch AL dem HF gleich. Man ſeze beyderſeits CM hinzu, ſo iſt das ganze Parallelogramm AM dem Gnomon NOP gleich. Aber AM iſt das Rechteck aus AD, BD, denn die DM iſt (2, 4. Zuſ.) der BD gleich; folglich iſt der Gnomon NOP dem Rechtecke aus AD, BD gleich. Man ſeze beyderſeits LG, welches dem Quadrate von CB gleich iſt, hinzu, ſo iſt das Rechteck aus AD, BD ſammt dem Quadrate von CB dem Gnomon NOP und dem Quadrate LG gleich. Aber der Gnomon NOP und das Quadrat LG iſt das ganze Quadrat CEFD, welches das Quadrat von CD iſt; folglich iſt das Rechteck aus AD, BD ſammt dem Quadrate von CB dem Quadrate von CD gleich.

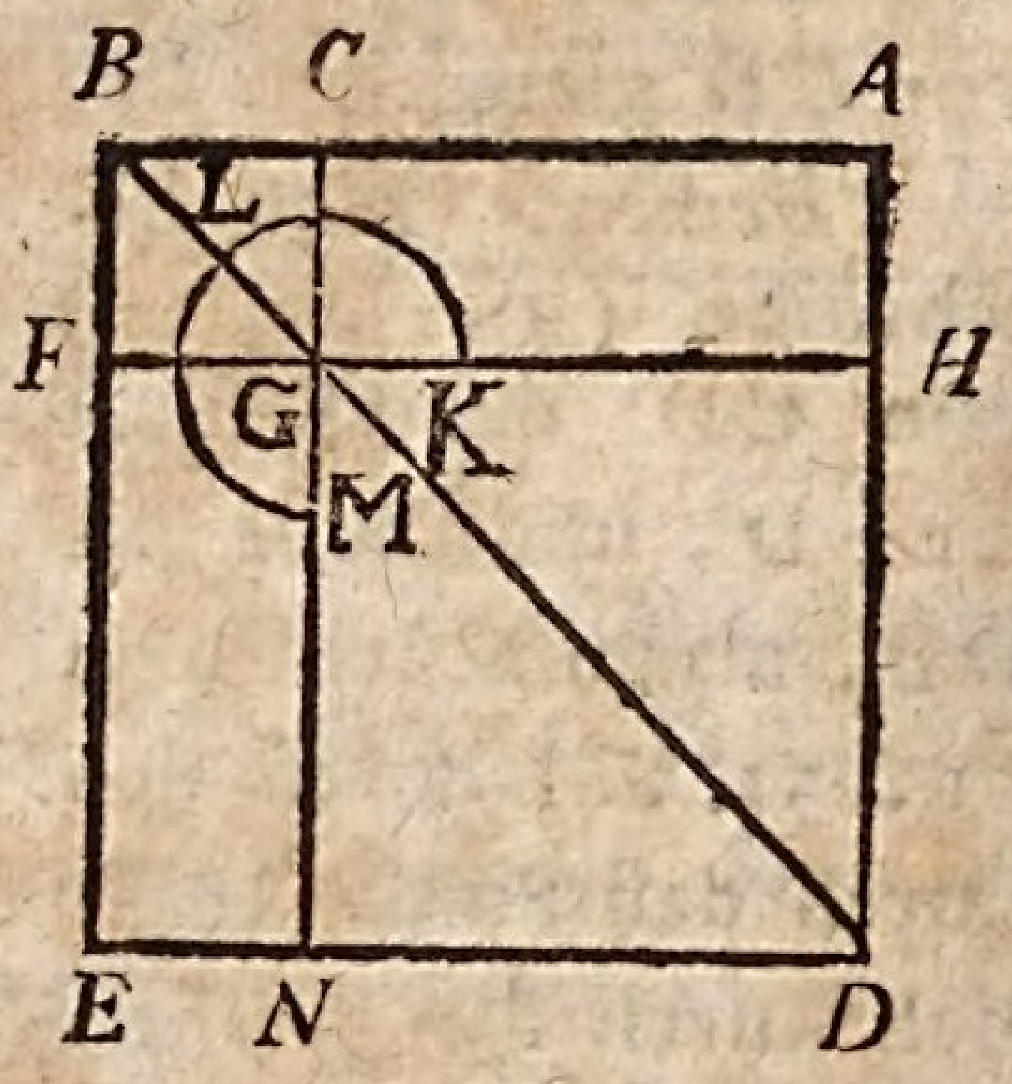
Wenn demnach u. ſ. w. w. z. e. w.

7 *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben in einem Punkte geſchnitten wird, ſo ſind die Quadrate der ganzen Linie und eines der Abſchnitte dem doppelten Rechtecke aus der ganzen Linie und dem gedachten Abſchnitte ſammt dem Quadrate des andern Abſchnitts gleich.

Es

Es werde die gerade Linie AB in dem beliebigen Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dass die Quadrate von AB, BC dem doppelten Rechtecke aus AB, BC und dem Quadrate von AC gleich seyen.



Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von AD das Quadrat $ADEB$, und vollende die Figur. Da nun das Parallelogramm AG (1, 43. S.) dem Parallelogramme GE gleich ist, so ist, wenn man beyderseits CF hinzusezt, das ganze Parallelogramm AF dem ganzen Parallelogramme CE gleich, und folglich ist AF, CE das Doppelte von AF. Nun ist aber AF, CE der Gnomon KLM und das Quadrat CF; folglich ist der Gnomon KLM und das Quadrat CF das Doppelte von AF. Aber auch das doppelte Rechteck aus AB, BC, ist das Doppelte von AF, denn die BF ist (2, 4. Zus.) der BC gleich; demnach ist der Gnomon KLM und das Quadrat CF dem doppelten Rechtecke aus AB, BC gleich. Man seze beyderseits HN, welches das Quadrat von AC ist, hinzu, so ist der Gnomon KLM sammt den Quadraten CF, HN dem doppelten Rechtecke aus AB, BC und dem Quadrate von AC gleich. Aber der Gnomon KLM und die Quadrate CF, HN sind das ganze Quadrat $ADEB$ und CF, das ist die Quadrate von AB, BC; Folglich sind die Quadrate von AB, BC dem doppelten Rechtecke aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

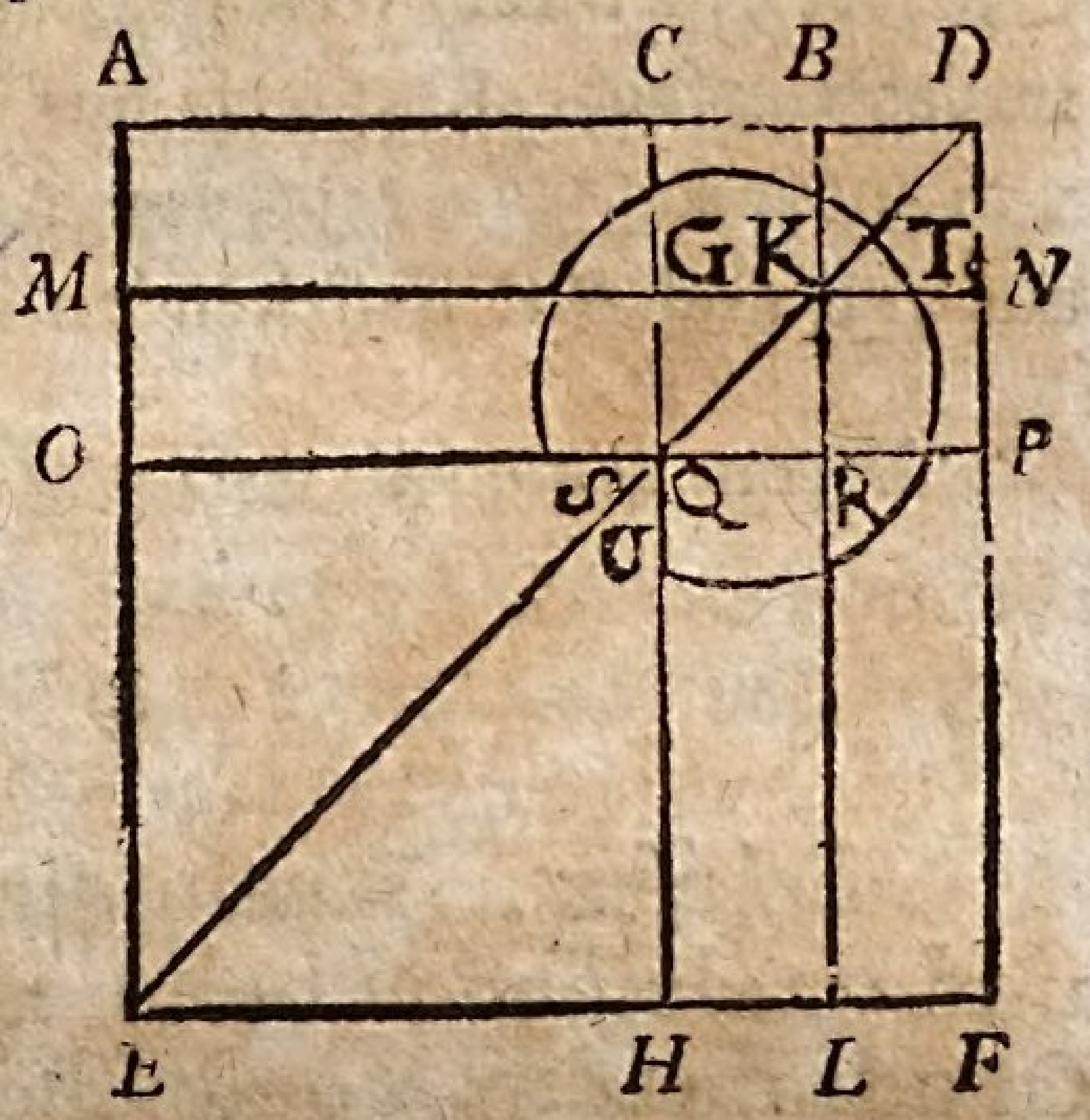
8. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben in einem Punkte geschnitten wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abschnitte sammt dem Quadrate des andern Abschnitts dem Quadrate der aus der ganzen und dem erst gedachten Abschnitte bestehenden Linie gleich.

Es werde die gerade Linie AB nach Belieben in dem Punkte C geſchnitten, ſo behaupte ich, daſs das vierfache Rechteck aus AB, BC ſammt dem Quadrate von AC dem Quadrate der aus AB, BC beſtehenden Linie AD gleich ſey.

Beweis. Man ſeze die BD in gerader Linie an die AB, und mache die BD der CB gleich; alsdann beſchreibe man (1, 46. S.) von AD das Quadrat AEFD und vollende die Figur.

Da nun die CB der BD, aber auch (1, 34. S.) die CB der GK, und die BD der KN gleich iſt, ſo iſt auch die GK der KN gleich. Aus eben den Gründen aber iſt auch die QR der RP gleich. Da nun die CB der BD und die GK der KN gleich iſt, ſo iſt (1, 36. S.) das Parallelogramm CK dem Parallelogramme BN, und das Parallelogramm GR dem Parallelogramme RN gleich Nun iſt aber (1, 43. S.) CK dem RN gleich, denn ſie ſind die Ergänzungen des Parallelogramms CP; folglich iſt auch BN dem GR gleich, und mithin ſind die vier Parallelogramme BN, CK, GR, RN alle einander gleich, alſo alle viere zuſammen das Vierfache von CK. Da ferner die *CB* der BD, aber auch die BD der BK, das iſt (1, 34. S.) der CG, die *CB* aber der GK, das iſt der GQ, gleich iſt, ſo iſt die CG der GQ gleich. Es iſt aber auch die QR der RP gleich; folglich iſt auch (1, 36. S.) das Parallelogramm AG dem Parallelogramme MQ, und das Parallelogramm QL dem Parallelogramme RF gleich. Nun iſt aber, (1, 43. S.) MQ dem QL gleich, denn ſie ſind die Ergänzungen des Parallelogramms ML; folglich iſt auch AG dem RF gleich; und mithin ſind die vier Parallelogramme AG, MQ, QL, RF alle einander gleich; alſo alle viere zuſammen das Vierfache von AG. Es iſt aber gezeigt worden, daſs auch die vier Parallelogramme BN, CK, GR, RN das Vierfache von CK ſeyen; folglich ſind die acht Parallelogramme, welche den Gnomon STU einſchlieſſen, das Vierfache von AK.



Da

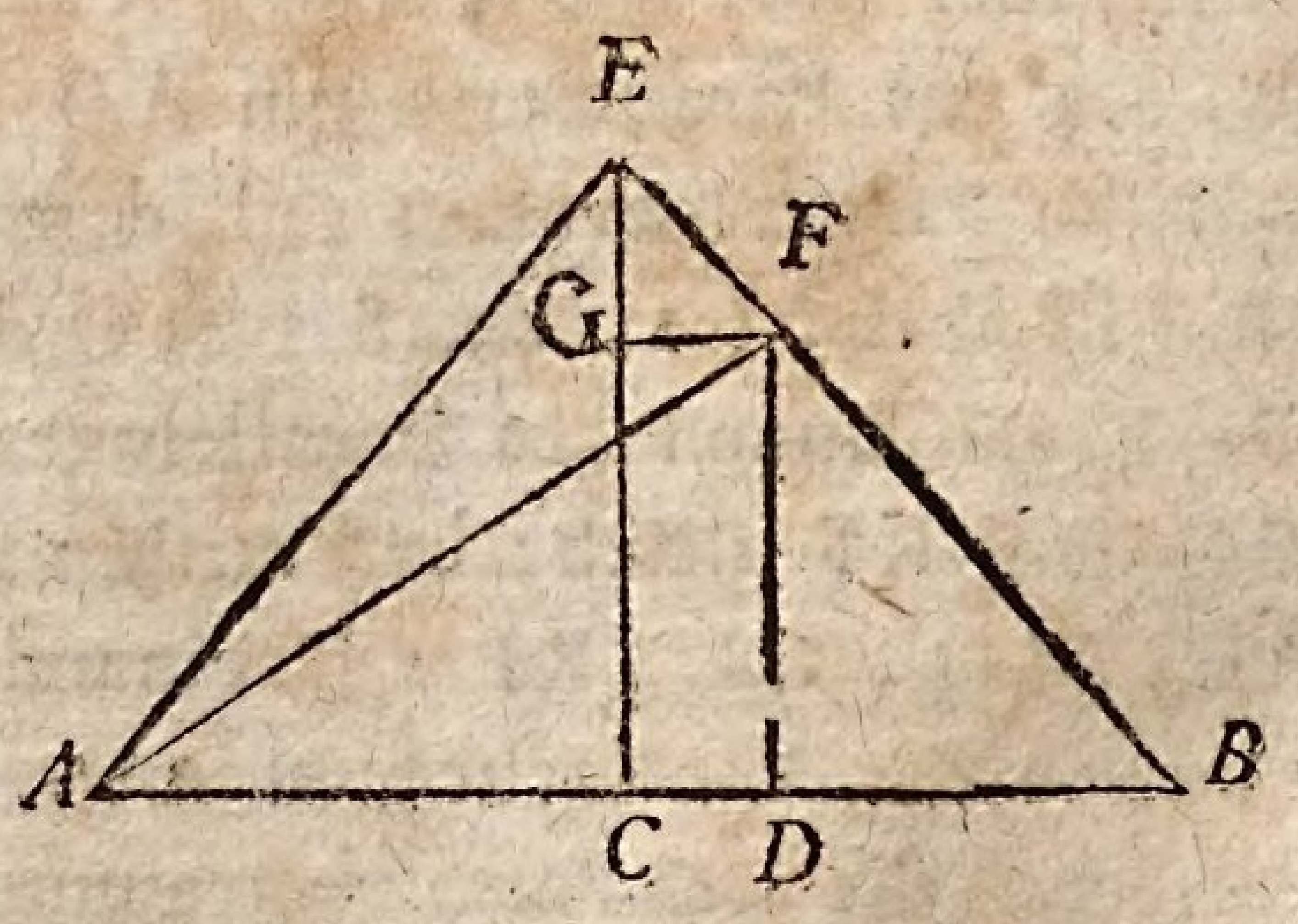
Da nun AK das Rechteck aus AB, BD ist, indem die BK (2, 4. Zus.) der BD, das ist der CB gleich ist, so ist das vierfache Rechteck aus AB, BC das Vierfache von AK. Es ist aber gezeigt worden, dass auch der Gnomon STU das Vierfache von AK sey; folglich ist das vierfache Rechteck aus AB, BC dem Gnomon STU gleich. Man seze beyderseits OH, welches (2, 4. Zus.) dem Quadrate von AC gleich ist, hinzu, so ist das vierfache Rechteck aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC dem Gnomon STU und dem Quadrate OH gleich. Es ist aber der Gnomon STU und das Quadrat OH das ganze Quadrat AEFD, welches das Quadrat von AD ist; folglich ist das vierfache Rechteck aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC dem Quadrate von AD, das ist, dem Quadrate der aus AB und BC bestehenden Linie, gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Theile getheilt wird, so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte doppelt so gross, als das Quadrat der halben Linie und des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten.

Es werde die gerade Linie AB in dem Punkte C in gleiche, in dem Punkte D aber in ungleiche Theile getheilt, so behaupte ich, dass die Quadrate von AD, DB doppelt so gross seyen, als die Quadrate von AC, CD.



Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkte C auf der AB das Loth CE, mache die CE den beyden AC, CB gleich, und ziehe die EA, EB; alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch dem Punkt D der EC die DF, durch den Punkt F aber der AB die FG parallel, und ziehe die AF.

Da

Da nun die AC der CE gleich ist, so ist (1, 5. S.) auch der Winkel EAC dem Winkel AEC gleich; und da der Winkel bey C ein rechter ist, so sind (1, 32. S.) die beyden andern EAC, AEC zusammen einem rechten gleich; folglich ist jeder von den beyden EAC, AEC die Hälfte eines rechten. Aus eben den Gründen aber ist auch jeder von den beyden CEB, EBC die Hälfte eines rechten; folglich ist der ganze Winkel AEB ein rechter.

Da nun der Winkel GEF die Hälfte eines rechten, aber EGF ein rechter ist, indem er (1, 29. S.) seinem inneren Gegenwinkel ECB gleich ist; so ist auch der übrige Winkel EFG die Hälfte eines rechten, und folglich ist der Winkel GEF dem Winkel EFG, und mithin auch (1, 6. S.) die Seite EG der FG gleich.

Da ferner der Winkel bey B die Hälfte eines rechten, der Winkel FDB aber ein rechter ist, weil er (1, 29. S.) seinem innern Gegenwinkel ECB gleich ist, so ist auch der übrige Winkel BFD die Hälfte eines rechten; folglich ist der Winkel bey B dem Winkel BFD, und mithin (1, 6. S.) auch die Seite DF der Seite DB gleich.

Da nun die AC der CE gleich ist, so ist auch das Quadrat von AC dem Quadrate von CE gleich, und folglich sind die Quadrate von AC, CE, doppelt so groſs, als das Quadrat von AC. Den Quadraten von AC, CE aber ist (1, 47. S.) das Quadrat von EA gleich, denn der Winkel ACE ist ein rechter; folglich ist auch das Quadrat von EA doppelt so groſs, als das Quadrat von AC.

Da ferner die EG der GF gleich ist, so ist auch das Quadrat von EG dem Quadrate von GF gleich; folglich sind die Quadrate von EG, GF doppelt so groſs, als das Quadrat von GF. Den Quadraten von EG, GF aber ist (1, 47. S.) das Quadrat von EF gleich; folglich ist auch das Quadrat von EF doppelt so groſs, als das Quadrat von GF. Es ist aber (1, 34. S.) die GF der CD gleich; demnach ist das Quadrat von EF doppelt so groſs, als das Quadrat von CD. Es ist aber auch das Quadrat von AE doppelt so groſs, als das Quadrat von AC; folglich sind die Quadrate von AE, EF doppelt so

groſs,

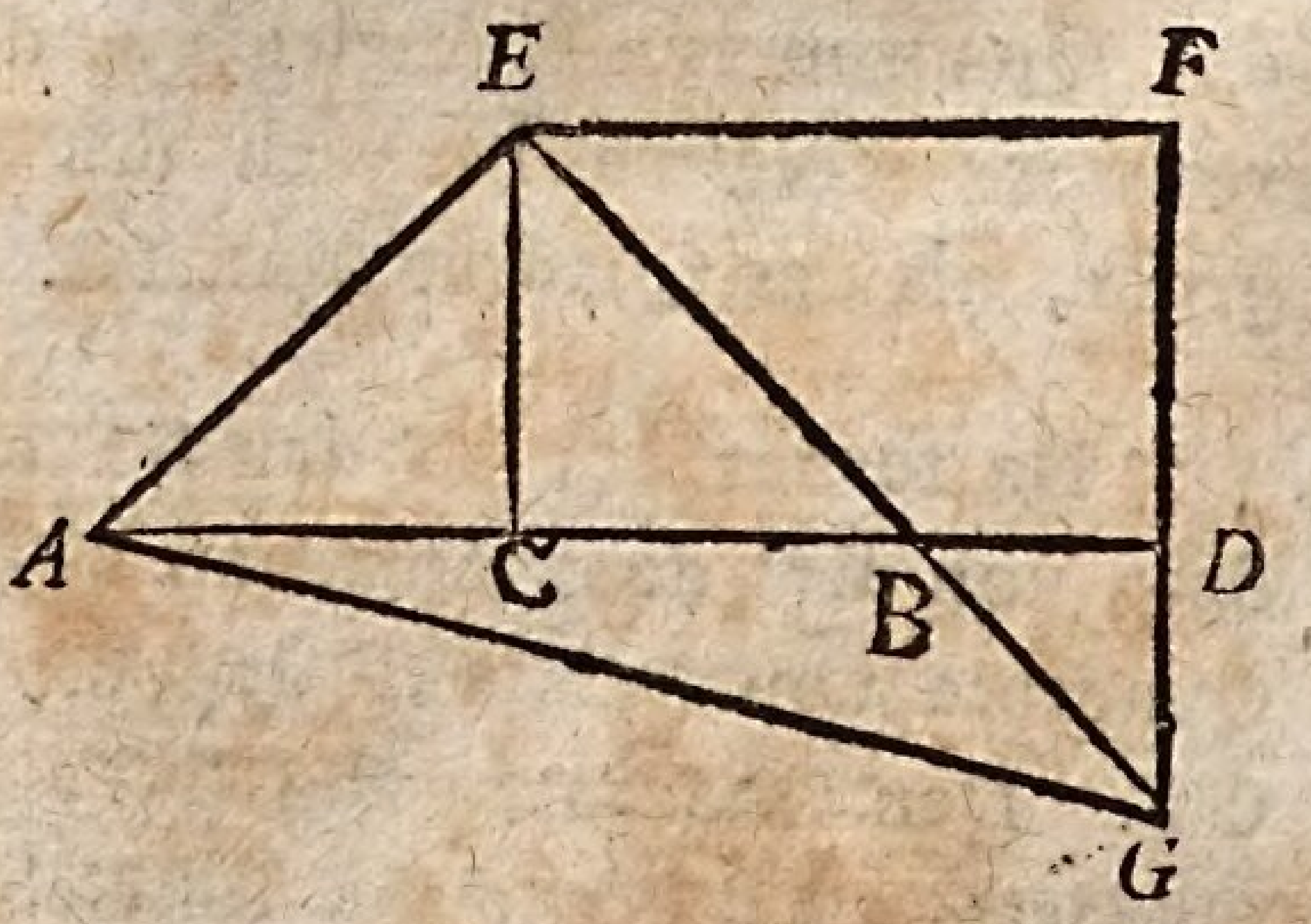
grofs, als die Quadrate von AC, CD. Den Quadraten von AE, EF aber ift (1, 47. S.) das Quadrat von AF gleich, denn der Winkel AEF ift ein rechter; folglich ift das Quadrat von AF doppelt fo grofs, als die Quadrate von AC, CD. Dem Quadrate von AF aber find (1, 47. S.) die Quadrate von AD, DF gleich, denn der Winkel bey D ift ein rechter; folglich find die Quadrate von AD, DF doppelt fo grofs, als die Quadrate von AC, CD. Es ift aber die DF der DB gleich; folglich find die Quadrate von AD, DB doppelt fo grofs, als die Quadrate von AC, CD.

Wenn demnach u. f. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrfaz. Wenn eine gerade Linie halbirt, und ihr eine andere in gleicher Richtung angefezt wird, fo ift das Quadrat, der aus der ganzen und der angefezten beftehenden Linie fammt dem Quadrate der angefezten doppelt fo grofs, als das Quadrat der halben und der aus der halben und der angefezten beftehenden Linie.

Es werde die gerade Linie AB in dem Punkte C halbirt, und ihr die BD in gleicher Richtung angefezt, fo behaupte ich, dafs die Quadrate von AD, DB doppelt fo grofs feyen, als die Quadrate von AC, CD.



Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkt C auf der AB das Loth CE, mache die CE den beyden AC, CB gleich, und ziehe die AE, EB; alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt E der AD die EF, durch den Punkt D aber der CE die DF parallel.

Da nun die gerade Linie EF die Parallelen EC, FD fchneidet, fo find (1, 29. S.) die Winkel CEF, EFD zwey rechten gleich, und mithin die Winkel BEF, EFD kleiner,

ner, als zwey rechte. Linien aber, welche die verlängerten Schenkel zweyer Winkel ſind, die kleiner ſind, als zwey rechte, treffen (11. Grundſ.) zuſammen. Demnach treffen die verlängerten EB, FD auf der Seite BD zuſammen. Man verlängere ſie alſo, und ſie treffen in dem Punkte G zuſammen, ſo ziehe man die AG.

Da nun die AC der CE gleich iſt, ſo iſt (1, 5. S.) auch der Winkel AEC dem Winkel EAC gleich; es iſt aber der Winkel bey E ein rechter; Folglich iſt (1, 32. S.) jeder der beyden AEC, EAC die Hälfte eines rechten. Aus eben den Gründen aber iſt auch jeder der beyden CEB, EBC die Hälfte eines rechten; folglich iſt AEB ein rechter. Und da EBC die Hälfte eines rechten iſt, ſo iſt (1, 15. S.) auch DBG die Hälfte eines rechten; es iſt aber (1, 29. S.) auch der Winkel BDG ein rechter, denn er iſt dem Winkel DCE, als Wechſelwinkel, gleich; folglich iſt auch der übrige Winkel DGB die Hälfte eines rechten, und mithin iſt der Winkel DGB dem Winkel DBG, alſo auch (1, 6. S.) die Seite DB der Seite DG gleich.

Da ferner der Winkel EGF die Hälfte eines rechten, aber der bey F ein rechter iſt, denn er iſt ſeinem Gegenwinkel bey C gleich; ſo iſt folglich auch der übrige Winkel FEG die Hälfte eines rechten, alſo auch der Winkel EGF dem Winkel FEG, und mithin auch (1, 6. S.) die Seite GF der Seite EF gleich.

Da nun die EC der CA gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von EC dem Quadrate von CA gleich; und folglich ſind die Quadrate von EC, CA doppelt ſo groſs, als das Quadrat von CA. Den Quadraten von EC, CA aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von EA gleich; folglich iſt auch das Quadrat von EA doppelt ſo groſs, als das Quadrat von CA. Da ferner die GF der EF gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von GF dem Quadrate von EF gleich; und mithin ſind die Quadrate von GF, FE doppelt ſo groſs, als das Quadrat von EF. Den Quadraten von GF, FE aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von EG gleich; folglich iſt das Quadrat EG doppelt ſo groſs, als das Quadrat von EF. Es iſt aber die EF der CD gleich; folglich iſt auch das Quadrat von EG doppelt ſo groſs, als

das

das Quadrat von CD. Es ist aber gezeigt worden, daſs auch das Quadrat von EA doppelt ſo groſs ſey, als das Quadrat von AC; folglich ſind die Quadrate von AE, EG doppelt ſo groſs, als die Quadrate von AC, CD. Den Quadraten von AE, EG aber iſt (1, 47. S) das Quadrat von AG gleich; folglich iſt auch das Quadrat von AG doppelt ſo groſs, als die Quadrate von AC, CD. Dem Quadrate von AG aber ſind (1, 47. S.) die Quadrate von AD, DG gleich; folglich ſind die Quadrate von AD, DG doppelt ſo groſs, als die Quadrate von von AC, CD. Die DG aber iſt der DB gleich; folglich ſind die Quadrate von AD, DB doppelt ſo groſs, als die Quadrate von AC, CD.

Wenn demnach u. ſ. w. w. z. e. w.

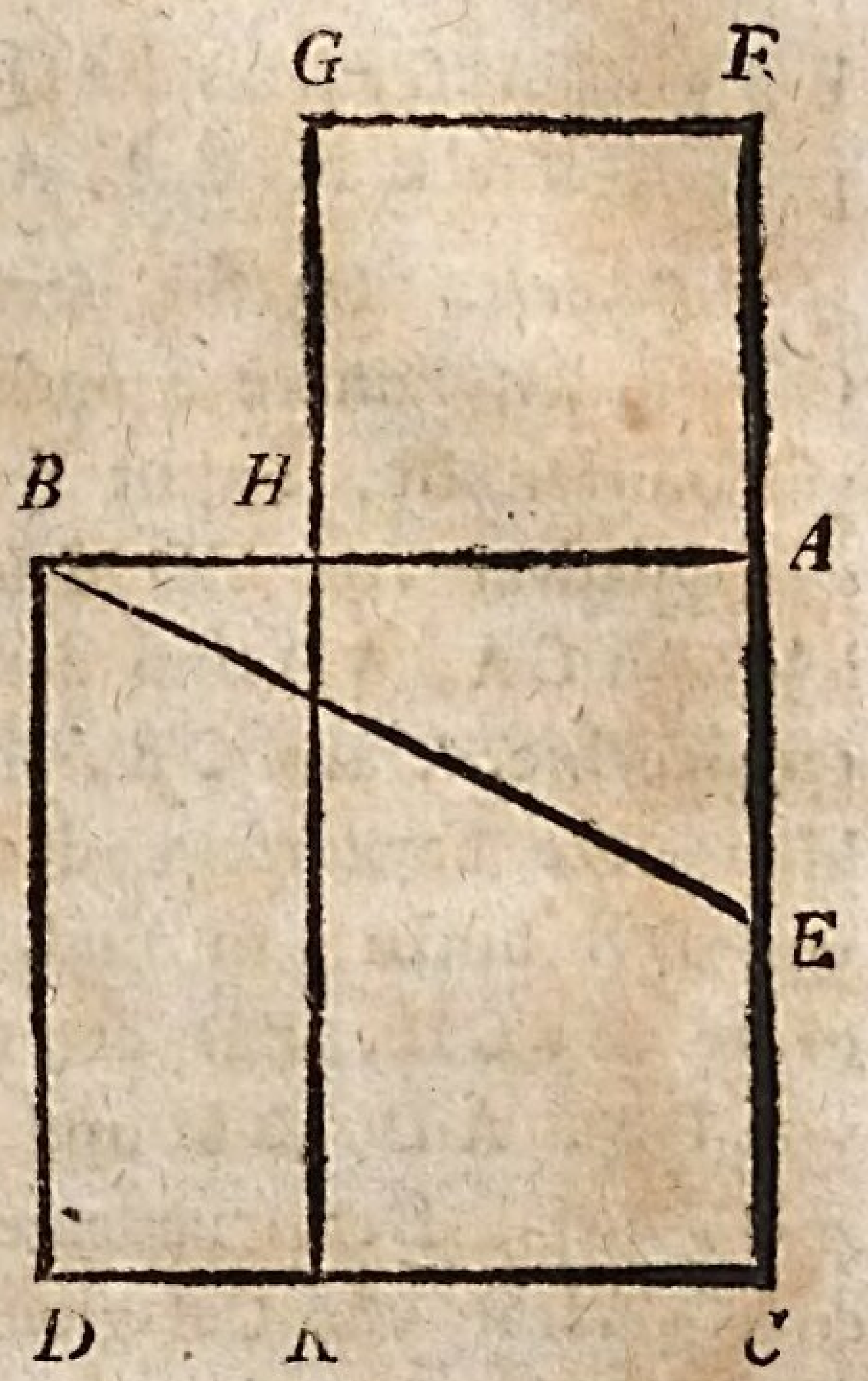
11. *Saz.*

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ſo zu ſchneiden, daſs das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abſchnitte dem Quadrate des andern Abſchnitts gleich ſey.

Es ſey die gegebene gerade Linie AB, und man ſoll ſie ſo ſchneiden, daſs das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abſchnitte dem Quadrate des andern Abſchnitts gleich ſey.

Auflöſung. Man beſchreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ABDC, halbire (1, 10. S.) die AC in dem Punkte E, und ziehe die BE; alsdann verlängere man die CA bis nach F, und mache (1, 3. S.) die FE der BE gleich; hierauf beſchreibe man von AF das Quadrat FH, und verlängere die GH bis nach K, ſo behaupte ich, daſs die gerade Linie AB in dem Punkte H ſo geſchnitten ſey, daſs das Rechteck aus AB, BH dem Quadrate von AH gleich ſey.

Beweis. Da die gerade Linie AC in dem Punkte E halbirt, und ihr die AF angeſezt worden iſt, ſo iſt (2, 6. S.) das Rechteck aus CF, FA ſammt dem Quadrate von AE dem Quadrate von EF gleich. Es iſt aber die EF der EB gleich; folglich iſt auch das Rechteck aus CF, FA ſammt dem Quadrate von AE dem Quadrate von EB gleich. Aber dem Quadrate von



von EB ſind (1, 47. S.) die Quadrate von BA, AE gleich, denn der Winkel bey A iſt ein rechter; folglich iſt das Rechteck aus CF, FA ſammt dem Quadrate von AE den Quadraten von BA, AE gleich. Man nehme beyderſeits das Quadrat von AE hinweg, ſo iſt das übrigbleibende Rechteck aus CF, FA dem Quadrate von BA gleich. Nun iſt FK das Rechteck aus CF, FA denn die AF iſt der FG gleich, das Quadrat von AB aber iſt AD; folglich iſt das Parallelogramm FK dem Quadrate AD gleich. Man nehme beyderſeits das Parallelogramm AK hinweg, ſo iſt das übrigbleibende Parallelogramm FH dem Parallelogramme HD gleich. Es iſt aber HD das Rechteck aus AB, BH, denn die AB iſt der BD gleich, FH aber iſt das Quadrat von AH; Folglich iſt das Rechteck aus AB, BH dem Quadrate von AH gleich; und mithin iſt die gegebene gerade Linie AB in dem Punkte H ſo geſchnitten worden, daſs das Rechteck aus AB, BH dem Quadrate von AH gleich iſt w. z. v. w.

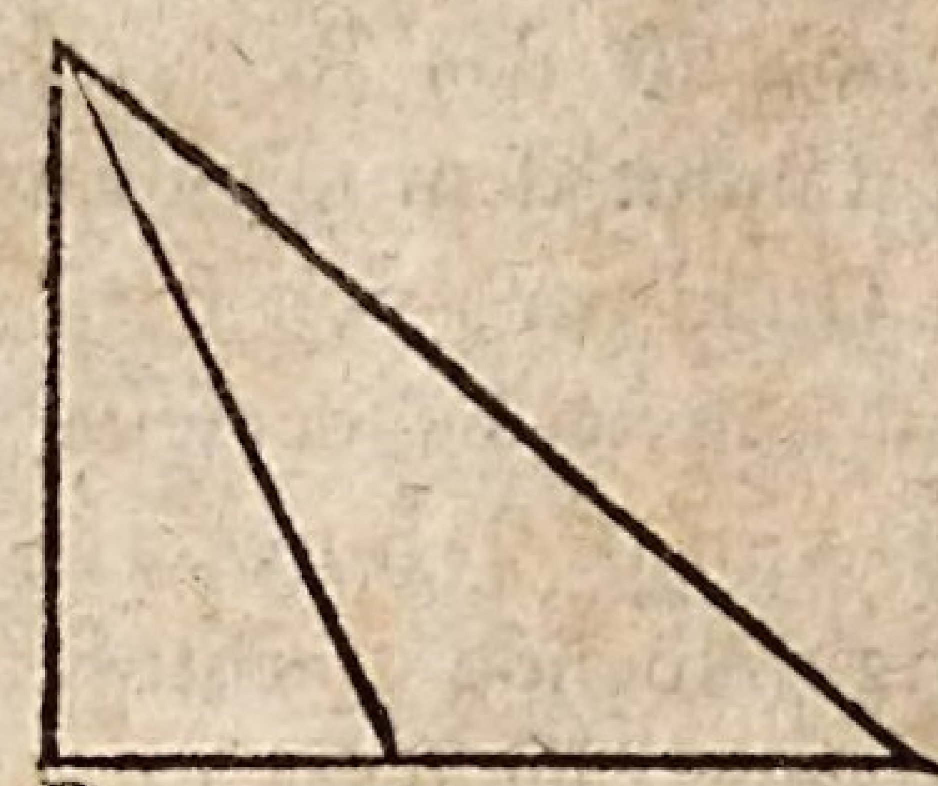
12. *Saz.*

Lehrſaz. In den ſtumpfwinklichten Dreyecken iſt das Quadrat der dem ſtumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite gröſſer, als die Quadrate der ihn einſchlieſſenden Seiten, um das doppelte Rechteck aus einer der einſchlieſſenden Seiten, auf welche, nachdem ſie verlängert worden, das Loth fällt, und der auſſerhalb von dem Lothe an bis an den ſtumpfen Winkel eingeſchloſſenen Linie.

Es ſey das ſtumpfwinklichte Dreyeck ABC, deſſen ſtumpfer Winkel BAC, und man fälle von dem Punkte B auf die verlängerte CA das Loth BD, ſo behaupte ich, daſs das Quadrat von

BC

BC gröſſer ſey, als die Quadrate von BA, AC, um das doppelte Rechteck aus CA, AD.



Beweis. Da die gerade Linie CD in dem Punkte A nach Belieben geſchnitten iſt, ſo iſt (2, 4. S.) das Quadrat von CD den Quadraten von CA, AD und dem doppelten Rechtecke aus CA, AD gleich. Man ſeze beyderſeits das Quadrat von DB hinzu; ſo ſind die Quadrate von CD, BD den Quadraten von CA, AD, BD und dem doppelten Rechtecke aus CA, AD gleich. Den Quadraten von CD, DB aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von CB gleich, denn der Winkel bey D iſt ein rechter, den Quadraten von AD, DB hingegen iſt das Quadrat von AB gleich; folglich iſt das Quadrat von CB den Quadraten von CA, AB und dem doppelten Rechtecke aus CA, AD gleich; und mithin iſt das Quadrat von CB gröſſer als die Quadrate von CA, AB um das doppelte Rechteck aus CA, AD.

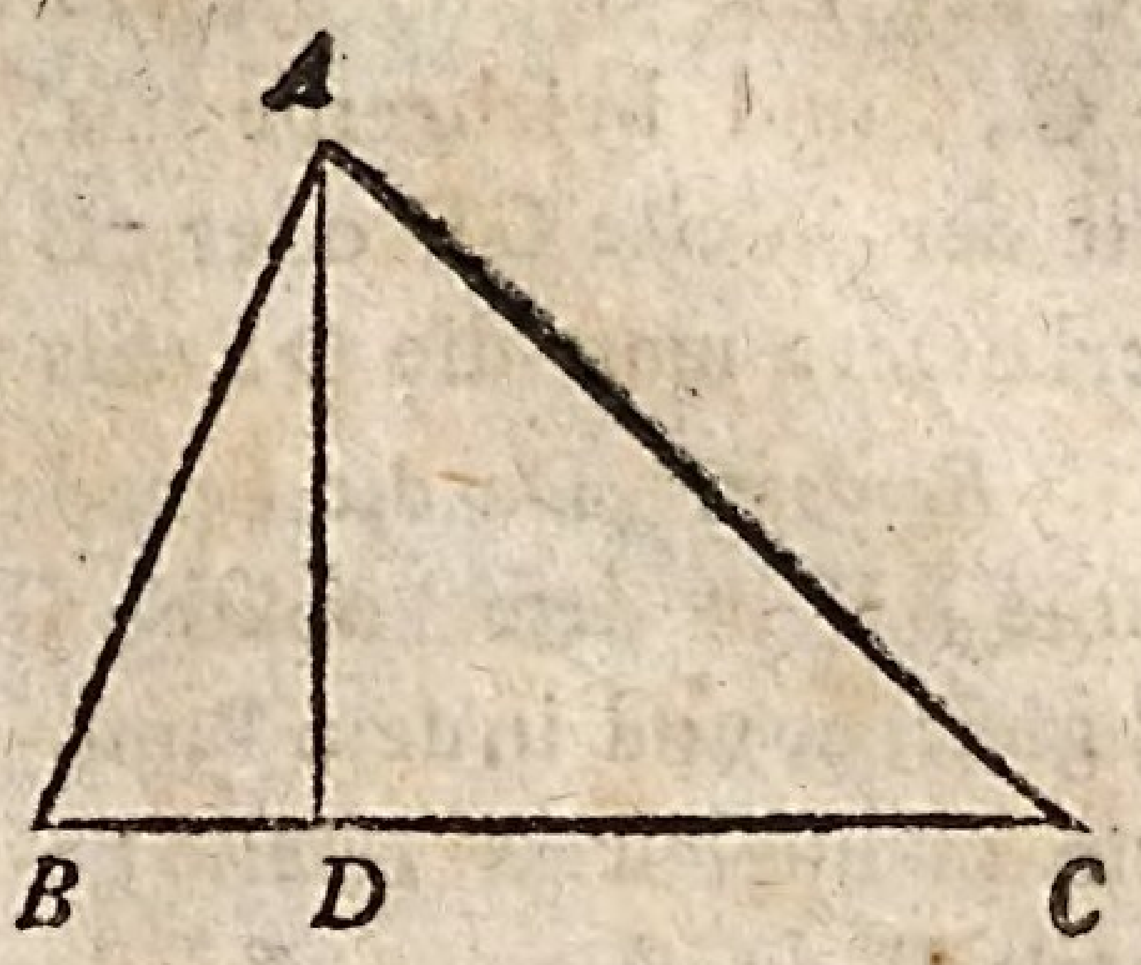
Demnach iſt u. ſ. w. w. z. e. w.

13. *Saz.*

Lehrſaz. In den ſpizwinklichten Dreyecken iſt das Quadrat der dem ſpizen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner, als die Quadrate der ihn einſchlieſſenden Seiten, um das doppelte Rechteck aus einer der einſchlieſſenden Seiten, auf welche das Loth fällt, und der innerhalb von dem Lothe an bis an den ſpizen Winkel eingeſchloſſenen Linie.

Es ſey das ſpizwinklichte Dreyeck ABC, deſſen ſpizer Winkel bey B, und man fälle von dem Punkt A auf die BC das Loth AD, ſo behaupte ich, daſs das Quadrat von AC kleiner ſey, als die Quadrate von CB, BA, um das doppelte Rechteck aus BC, BD.

Be-



Beweis. Da die gerade Linie CB nach Belieben in dem Punkte D geschnitten ist, so sind (2, 7. S.) die Quadrate von CB, BD dem doppelten Rechtecke aus CB, BD und dem Quadrate von DC gleich. Man seze beyderseits das Quadrat von AD hinzu, so sind die Quadrate von CB, BD, AD dem doppelten Rechtecke aus CB, BD, und den Quadraten von AD, DC gleich. Aber den Quadraten von BD, DA ist (1, 47. S.) das Quadrat von AB gleich, denn der Winkel bey D ist ein rechter; den Quadraten von AD, DC hingegen ist das Quadrat von AC gleich; folglich sind die Quadrate von CB, BA dem Quadrate von AC, und dem doppelten Rechtecke aus CB, BD gleich. Und mithin ist das Quadrat von AC allein kleiner, als die Quadrate von CB, BA, um das doppelte Reckteck aus BC, BD.

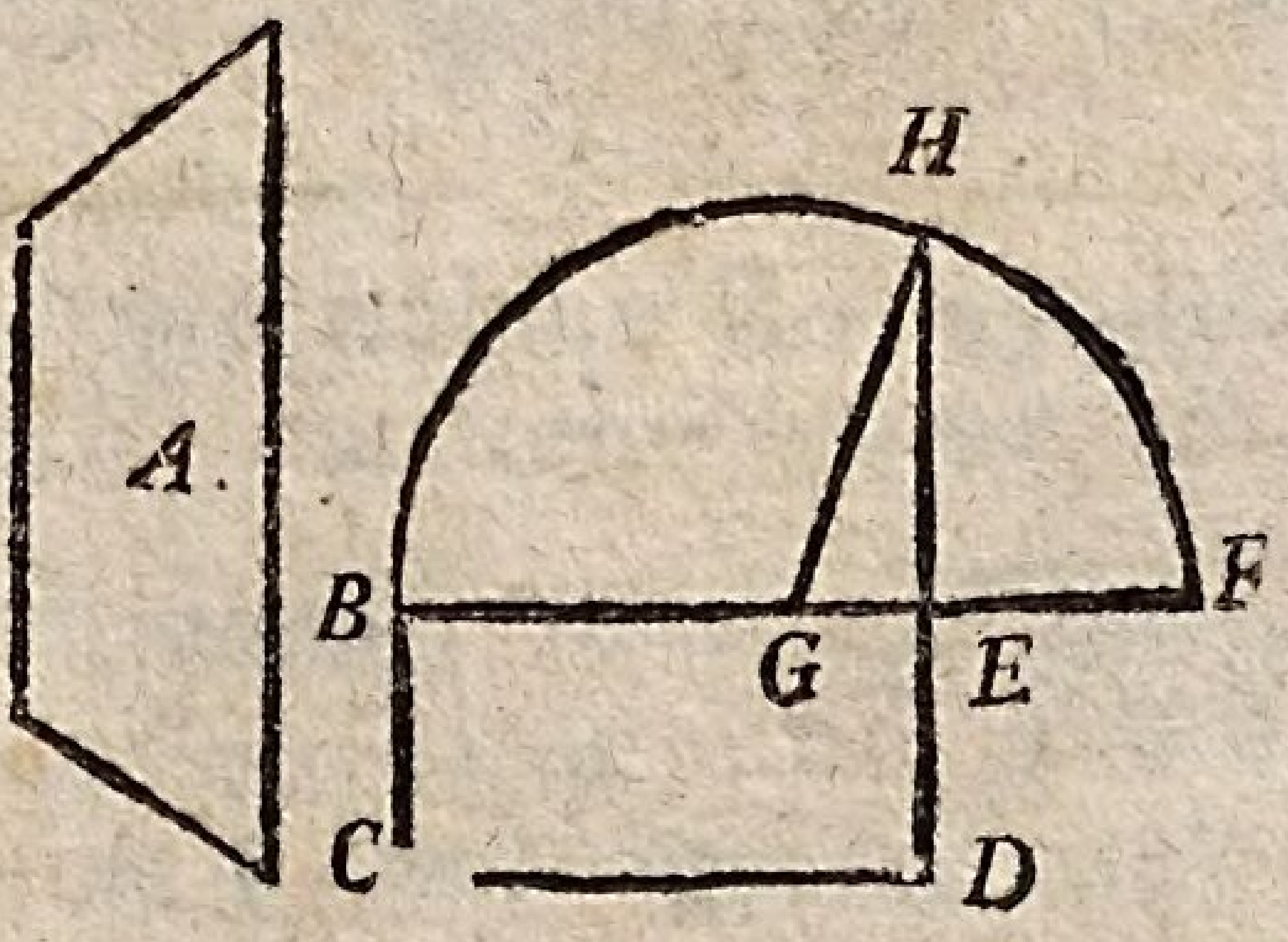
Demnach ist u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

Aufgabe. Einer gegebenen geradlinigten Figur ein Quadrat gleich zu machen.

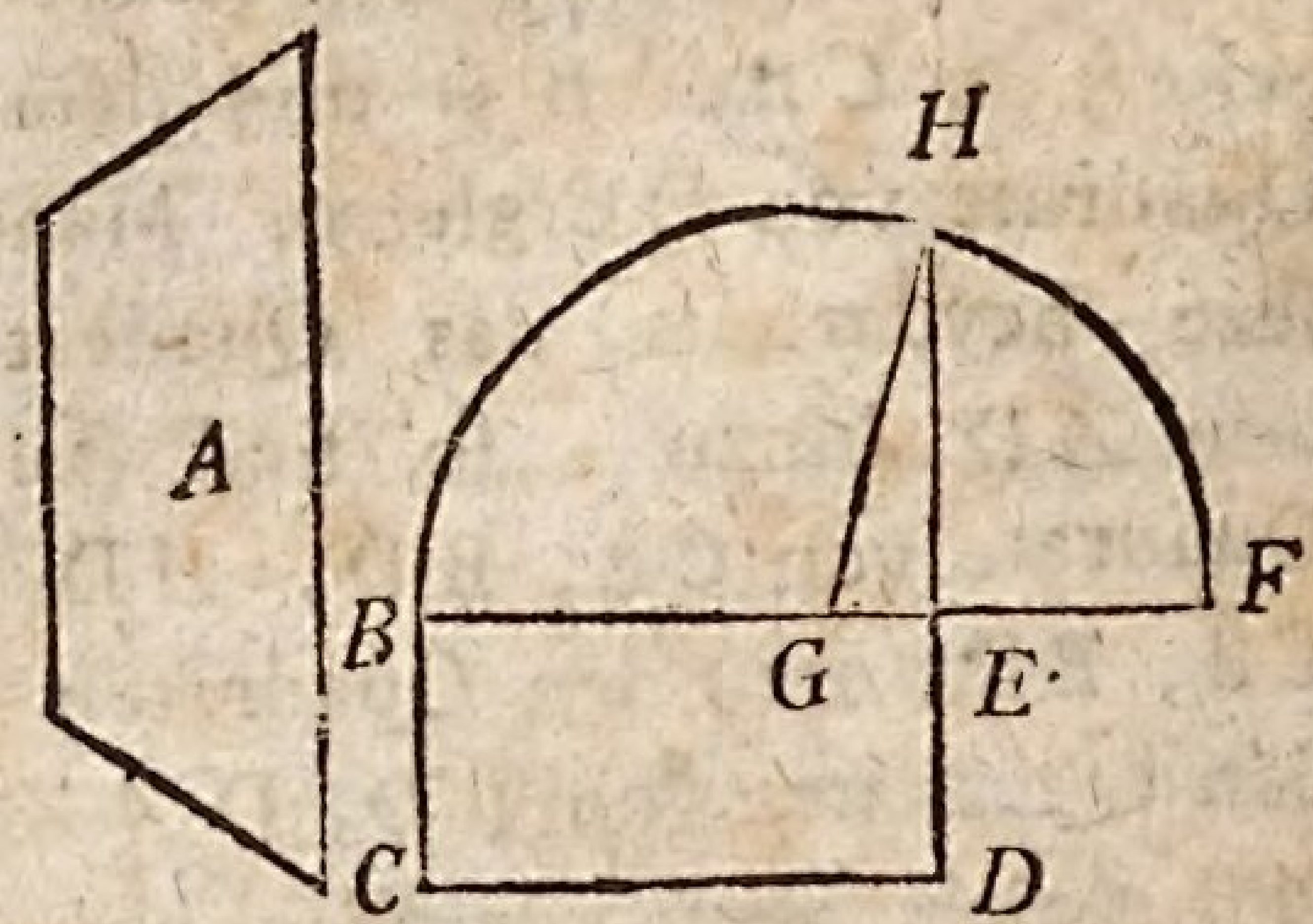
Es sey die gegebene geradlinigte Figur A, und man soll derselbigen ein Quadrat gleich machen.

Auflösung. Man mache (1, 45. S.) der geradlinigten Figur A das Rechteck BD gleich; wenn nun die Seite BE der Seite ED gleich ist, so ist das verlangte geschehen, denn es ist ein der geradlinigten Figur gleiches Quadrat beschrieben worden. Wo aber nicht, so ist eine von beyden, die BE oder ED, grösser, als die andere. Es sey die BE die grössere,



so verlängere man sie bis nach F und mache (1, 3. S.) die

FE der ED gleich, alsdann halbire man die FB in dem Punkte G, und beschreibe (3. Ford.) aus dem Mittelpunkte G, mit der Weite GF oder GB, den Halbkreis BHF, hierauf verlängere man die DE bis nach H, und ziehe die GH.



Beweis. Da die gerade Linie BF in dem Punkte G in gleiche, und in dem Punkte E in ungleiche Theile getheilt ist, so ist (2, 5. S.) das Rechteck aus BE, EF sammt dem Quadrate von EG dem Quadrate von GF gleich. Die GF aber ist der GH gleich; folglich ist das Rechteck aus BE, EF, sammt dem Quadrate von GE dem Quadrate von GH gleich. Dem Quadrate von GH aber sind (1, 47. S.) die Quadrate von EH, GE gleich; folglich ist das Rechteck aus BE, EF sammt dem Quadrate von GE den Quadraten von HE, EG gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von GE hinweg, so ist das übrigbleibende Rechteck aus BE, EF dem Quadrate von EH gleich. Nun ist aber BD das Rechteck aus BE, EF, denn die EF ist der ED gleich; folglich ist das Parallelogramm BD dem Quadrate von EH gleich. Es ist aber BD der geradlinigten Figur A gleich; folglich ist auch die geradlinigte Figur A dem Quadrate von EH gleich.

Demnach ist der gegebenen geradlinigten Figur A ein Quadrat gleich gemacht worden, dasjenige nämlich, welches von der Linie EH beschrieben werden kann, w. z. v. w.

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

DRITTES BUCH.

Erklärungen.

1. *Gleiche* Kreiſe ſind ſolche, in welchen die Durchmeſſer, oder die vom Mittelpunkte ausgehende Linien (*Halbmeſſer*), einander gleich ſind.

2. Man ſagt, eine gerade Linie *berühre* den Kreis, wenn ſie den Kreis trift, und verlängert ihn doch nicht ſchneidet. (Sie heiſst auch *Tangente* des Kreiſes.)

3. Man ſagt von Kreiſen, daſs ſie einander *berühren*, wenn ſie einander treffen, ohne einander zu ſchneiden.

4. Man ſagt gerade Linien ſtehen im Kreiſe *gleichweit vom Mittelpunkte ab*, wenn die vom Mittelpunkte aus auf ſie gefällten Lothe einander gleich ſind.

5. Von derjenigen aber, auf welche ein gröſſeres Loth fällt, ſagt man, ſie ſtehe *weiter* ab.

6. Ein *Kreisabſcknitt* (*Segment*) iſt die Figur, welche von einer geraden Linie und einem Theile des Umkreiſes (*Kreisbogen*) eingeſchloſſen wird.

7. Der *Winkel des Kreisabſchnitts* iſt der, welcher von eben dieſer geraden Linie und dem Kreisbogen eingeſchloſſen wird.

8. Der *Winkel im Kreisabſchnitte* iſt der, welcher von zwey geraden Linien eingeſchloſſen wird, die von einem im Kreisbogen nach Belieben angenommenen Punkte an die Endpunkte der geraden Linie gehen, welche die Grundlinie des Kreisabſchnitts iſt.

9. Da die einen ſolchen Winkel einſchlieſſenden Linien einen Kreisbogen abſchneiden, ſo ſagt man auch, dieſer Winkel *ſtehe auf ſolchem Kreisbogen.*

10. Ein *Kreisausſchnitt (Sector)* iſt die Figur, welche von den Schenkeln eines Winkels am Mittelpunkte des Kreiſes (*Centriwinkels*) und dem von ihnen abgeſchnittenen Kreisbogen eingeſchloſſen wird.

11. *Aehnliche* Kreisabſchnitte ſind ſolche, welche gleiche Winkel faſſen, oder in welchen die Winkel einander gleich ſind.

1. *Saz.*

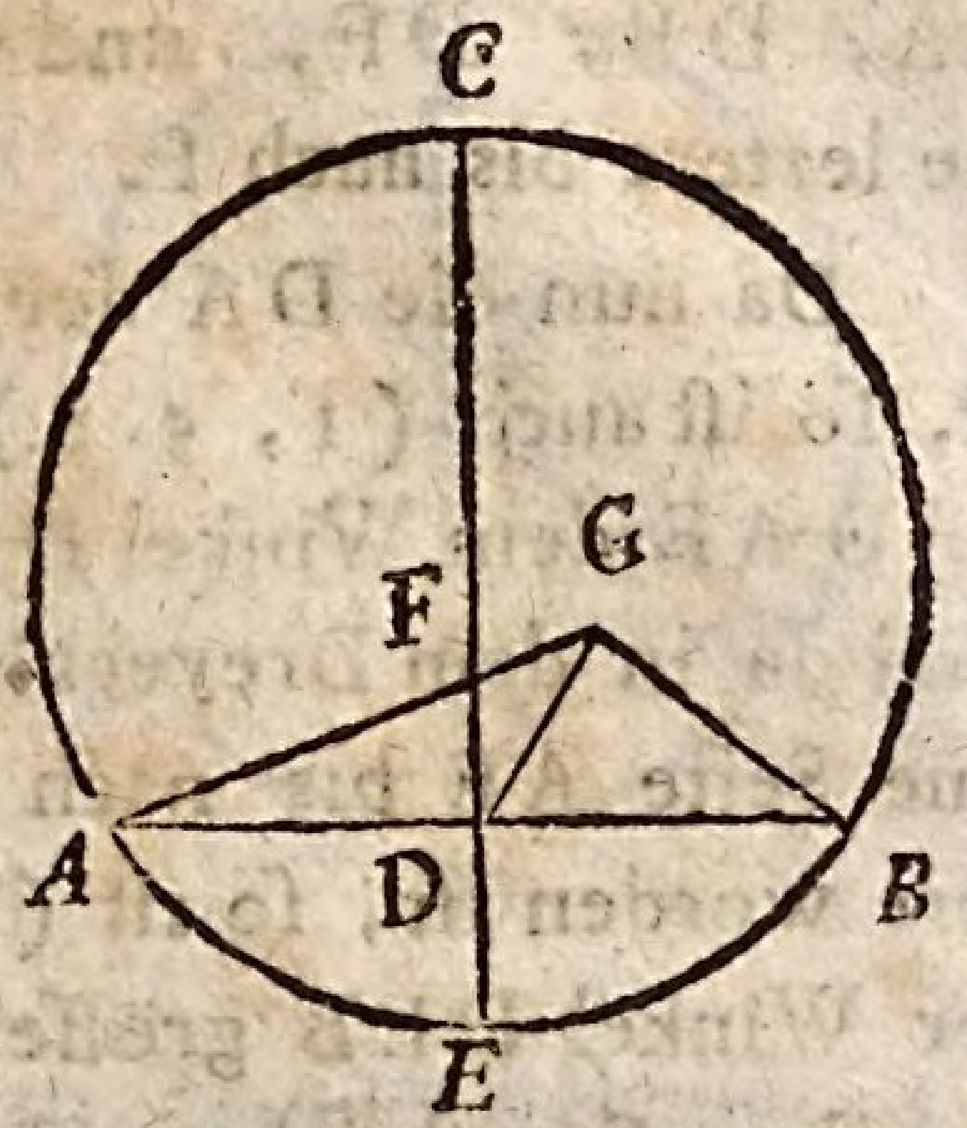
Aufgabe. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreiſes zu finden.

Es ſey der gegebene Kreis A B C, und man ſoll deſſen Mittelpunkt finden.

Aufløſung. Man ziehe in demſelben eine gerade Linie A B nach Belieben, halbire ſie (1, 10 S.) in dem Punkte D, errichte (1, 11. S.) auf ihr in eben dieſem Punkte die D C lothrecht, und verlängere ſolche bis nach E; alsdann halbire man die C E in dem Punkte F, ſo behaupte ich, daſs F der Mittelpunkt des Kreiſes A B C ſey.

Beweis. Es ſey nicht der Punkt F, ſondern, die Möglichkeit angenommen, irgend ein anderer, wie der Punkt G, der Mittelpunkt, ſo ziehe man G A, G D, G B.

Da



Da nun die AD der DB gleich, und die GD gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AD, DG den beyden GD, DB stückweise gleich, auch ist (1, 15. Erkl.) die Grundlinie GA der Grundlinie GB gleich, denn sie gehen beyde von dem Mittelpunkte G aus; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel ADG dem Winkel GDB gleich. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie gleiche Nebenwinkel macht, so ist (1, 10. Erkl.) jeder der gleichen Winkel ein rechter. Es ist also GDB ein rechter Winkel. Aber auch FDB ist ein rechter; folglich ist der Winkel GDB dem Winkel FDB, also der kleinere dem grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Demnach ist der Punkt G nicht der Mittelpunkt des Kreises ABC. Eben so kann dies aber auch von jedem andern Punkte, ausser dem Punkte F, gezeigt werden; folglich ist der Punkt F der Mittelpunkt des Kreises ABC. w. z. v. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn im Kreise eine gerade Linie eine andere halbirt und lothrecht schneidet, in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreises sey.

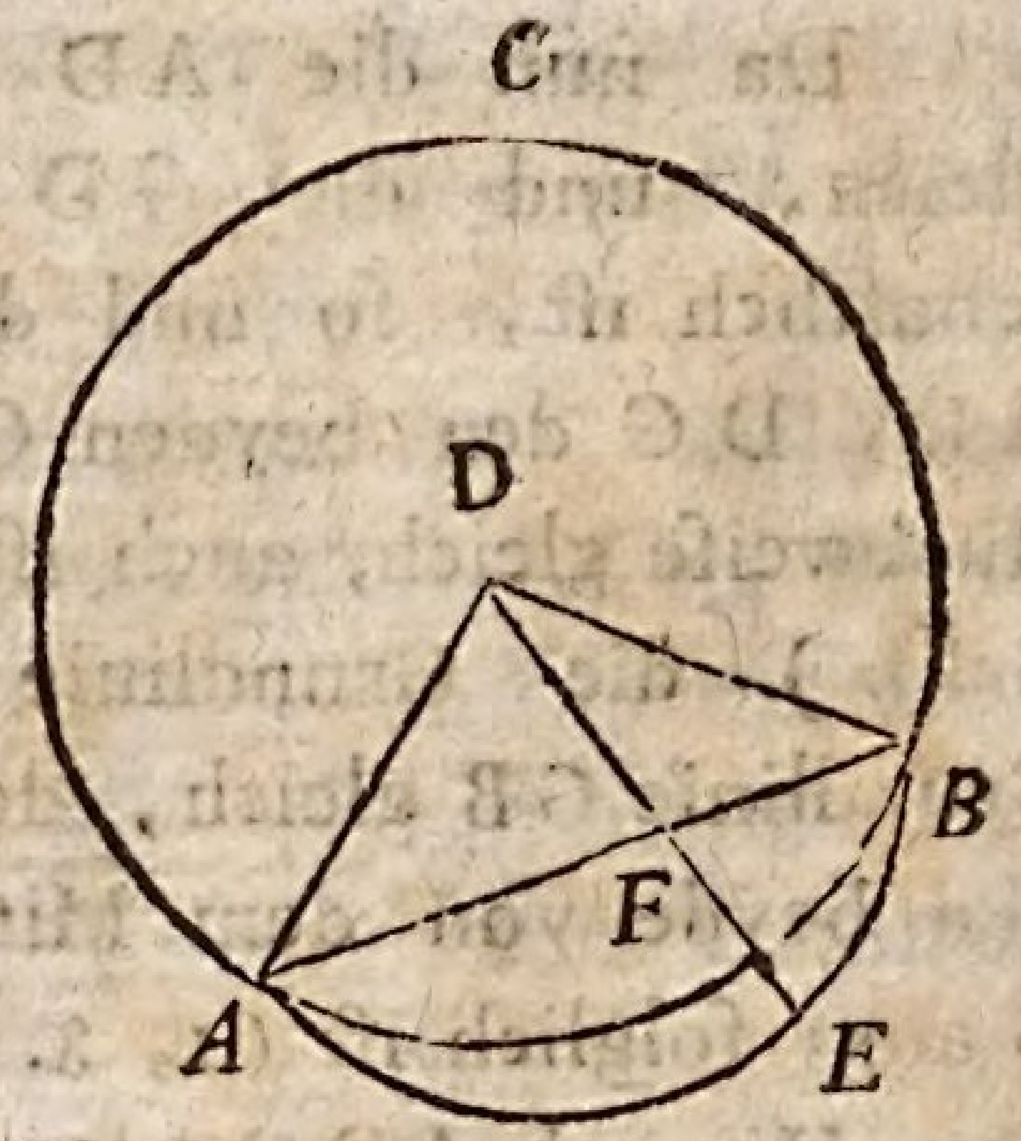
2. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in der Peripherie eines Kreises zwey beliebige Punkte angenommen werden, so fällt die gerade Linie, welche solche verbindet, innerhalb des Kreises.

Es sey der Kreis ABC, und man nehme in der Peripherie desselben nach Belieben die beyden Punkte A, B an, so behaupte ich, dass die von A nach B gezogene gerade Linie innerhalb des Kreises falle.

Beweis. Wäre dies nicht, sondern fiele sie, die Möglichkeit angenommen, ausserhalb des Kreises, wie die AEB, so nehme man (3, 1. S.) den Mittelpunkt des Kreises ABC;

die-



dieſer ſey D. Nun ziehe man die DA, DB, DF, und verlängere die leztere bis nach E.

Da nun die DA der DB gleich iſt, ſo iſt auch (1, 5. S.) der Winkel DAE dem Winkel DBE gleich. Und da in dem Dreyecke DAE die eine Seite AE bis nach B verlängert worden iſt, ſo iſt (1, 16. S.) der Winkel DEB gröſſer, als der DAE. Es iſt aber der Winkel DAE dem Winkel DBE gleich; folglich iſt der Winkel DEB auch gröſſer, als der DBE. Nun liegt aber (1, 18. S.) dem gröſſern Winkel auch die gröſſere Seite gegenüber; folglich iſt auch die DB gröſſer als die DE. Es iſt aber die DB der DF gleich, und mithin iſt die kleinere DF gröſſer, als die gröſſere DE, welches unmöglich iſt. Folglich fällt die von A nach B gezogene gerade Linie nicht auſſerhalb des Kreiſes. Eben ſo kann aber auch gezeigt werden, daſs ſie nicht in die Peripherie falle; folglich fällt ſie innerhalb des Kreiſes.

Wenn demnach in der Peripherie eines u. ſ. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

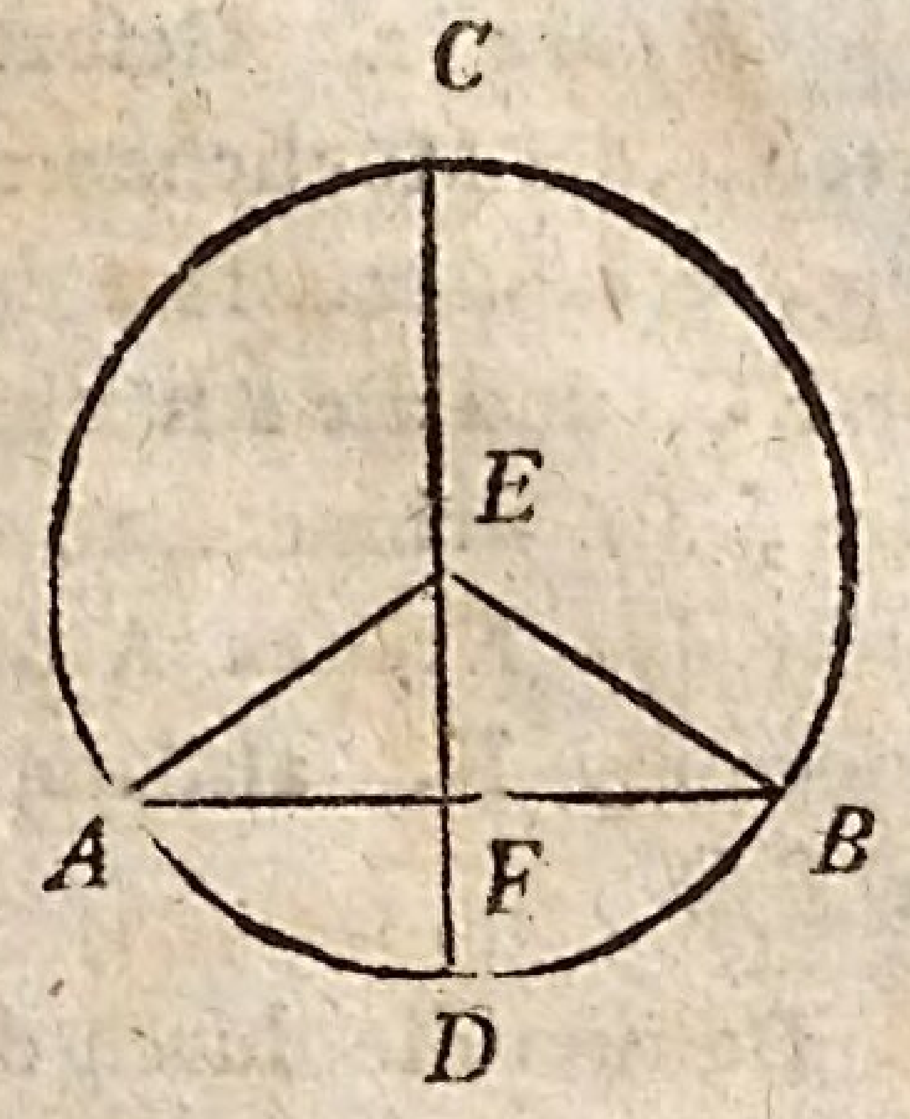
Lehrſaz. Wenn im Kreiſe eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende halbirt, ſo ſchneidet ſie dieſelbe lothrecht; und wenn ſie dieſelbe lothrecht ſchneidet, ſo halbirt ſie ſolche auch.

Es ſey der Kreis ABC, und in demſelben halbire die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie CD eine nicht durch den Mittelpunkt gehende AB in dem Punkte F, ſo behaupte ich, daſs ſie dieſelbe auch lothrecht ſchneide.

Beweis. Man nehme (3, 1. S.) den Mittelpunkt des Kreiſes ABC, und dieſer ſey E, nun ziehe man die EA, EB.

Da nun die AF der FB gleich und die FE gemeinſchaftlich iſt, ſind zwey und zwey Seiten einander ſtückweiſe gleich, und da

auch



auch die Grundlinie E A der Grundlinie E B gleich ist, so ist (1, 8. S.) auch der Winkel A F E dem Winkel E F B gleich. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie die Nebenwinkel einander gleich macht, so ist jeder der gleichen Winkel ein rechter; folglich ist jeder der Winkel A F E, E F B ein rechter, und mithin schneidet die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie C D, welche die nicht durch den Mittelpunkt gehende A B halbirt, solche auch lothrecht.

Nun seze man aber, die C D schneide die A B lothrecht so behaupte ich, dass sie solche auch halbire, das ist, dass die A F der F B gleich sey.

Denn da, nach der nämlichen Construction, die E A, E B, als Halbmesser, einander gleich sind, so ist (1, 5. S.) auch der Winkel E A F dem Winkel E B F gleich; es ist aber A F E ein rechter Winkel, und dem rechten Winkel E F B gleich; folglich sind in diesen beyden Dreyecken zwey Winkel einander stückweise gleich, auch ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, nämlich die beyden gemeinschaftliche, und in beyden einem der gleichen Winkel gegenüberliegende Seite E F; folglich sind (1, 26. S.) in beyden auch die übrigen Seiten einander gleich; die A F also ist der F B gleich.

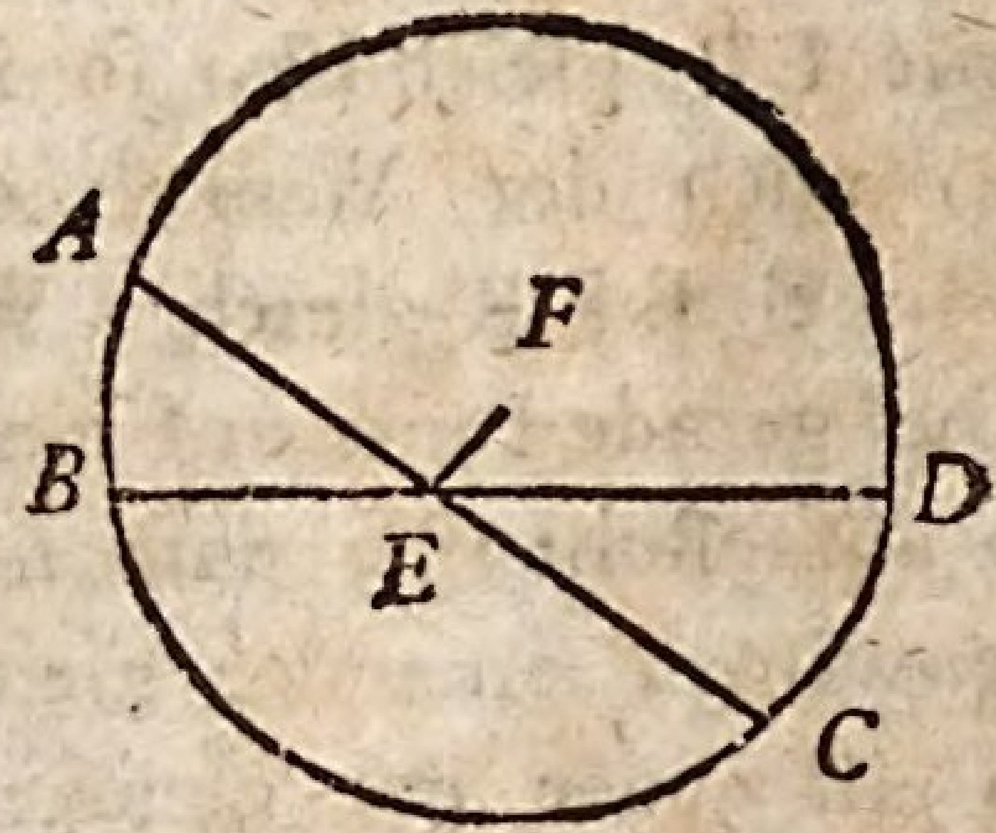
Wenn demnach im Kreise eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie u. s. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn im Kreise zwey nicht durch den Mittelpunkt gehende gerade Linien einander schneiden, so halbiren sie einander nicht.

Es sey der Kreis A B C D, in demselben schneiden die nicht durch den Mittelpunkt gehenden geraden Linien A C, B D einander in dem Punkte E, so behaupte ich dass sie einander nicht halbiren.

Beweis. Gesezt, sie halbirten, die Möglichkeit angenommen, einander, so, dass die AE der EC, und die BE der ED gleich wäre, so nehme man den Mittelpunkt des Kreises ABCD, und dieser sey F, alsdann ziehe man die FE



Da nun die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie FE die nicht durch den Mittelpunkt gehende AC halbirt, so schneidet sie (3, 3. S.) dieselbige auch lothrecht; und es ist also der Winkel FEA ein rechter Winkel. Da ferner die gerade Linie FE die nicht durch den Mittelpunkt gehende Linie BD halbirt, so schneidet sie solche auch lothrecht, und es ist also auch der Winkel FEB ein rechter Winkel. Es ist aber gezeigt worden, dass auch FEA ein rechter Winkel sey; folglich ist der Winkel FEA dem Winkel FEB, also der kleinere dem grösseren, gleich; welches unmöglich ist, Die AC, BD halbiren also einander nicht.

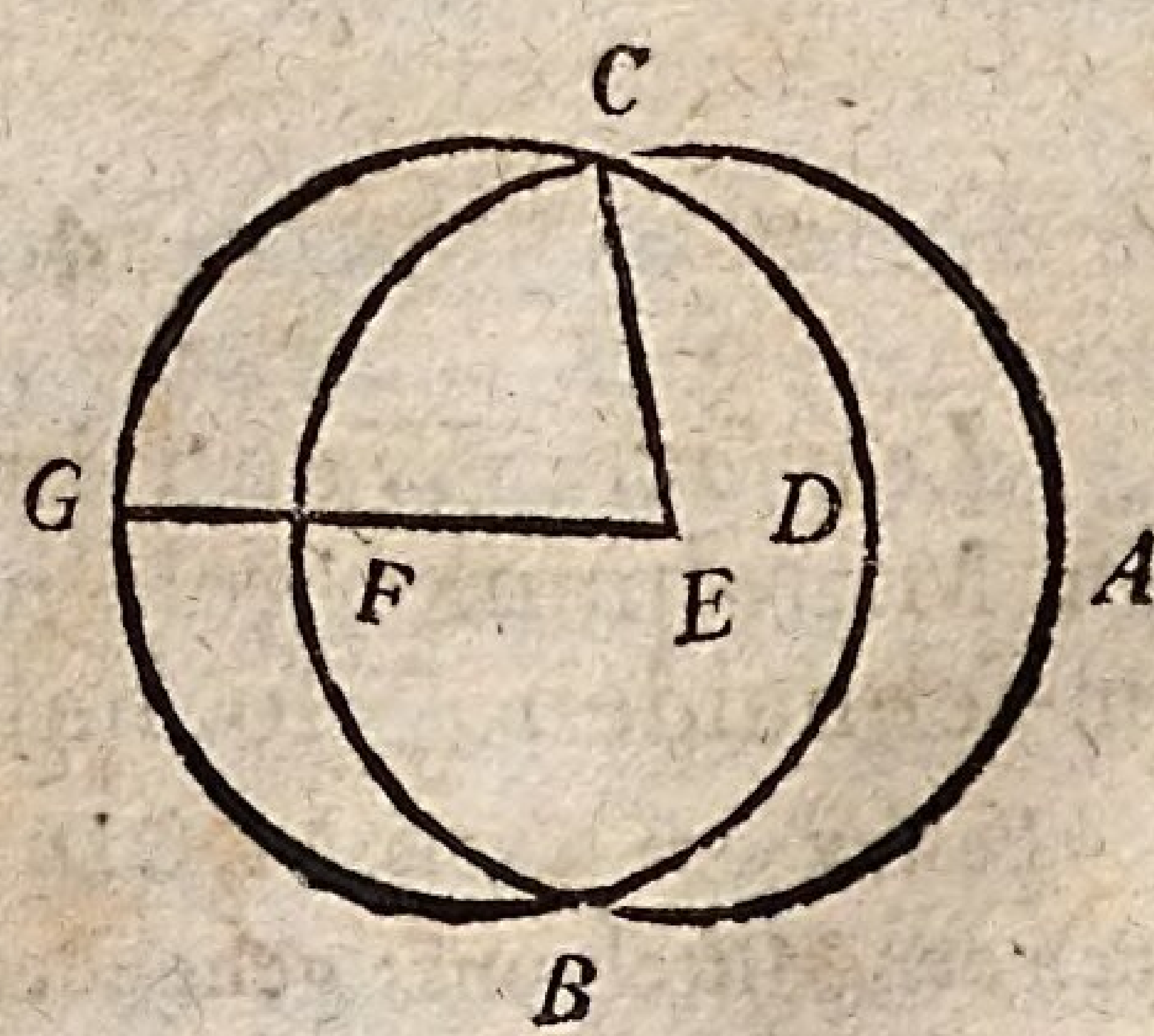
Wenn demnach im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

5. Saz.

Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander schneiden, so haben sie nicht einerley Mittelpunkt.

Die beyden Kreise ABC, CDG schneiden einander in den Punkten B, C so behaupte ich, dass sie nicht einerley Mittelpunkt haben.

Beweis. Es sey, die Möglichkeit angenommen, ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt E, so ziehe man die EC, und nach Belieben die EFG.



Da nun E der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so ist (1, 15. Erkl.) die EC der EF gleich. Da ferner E auch der Mittelpunkt des

Kreis

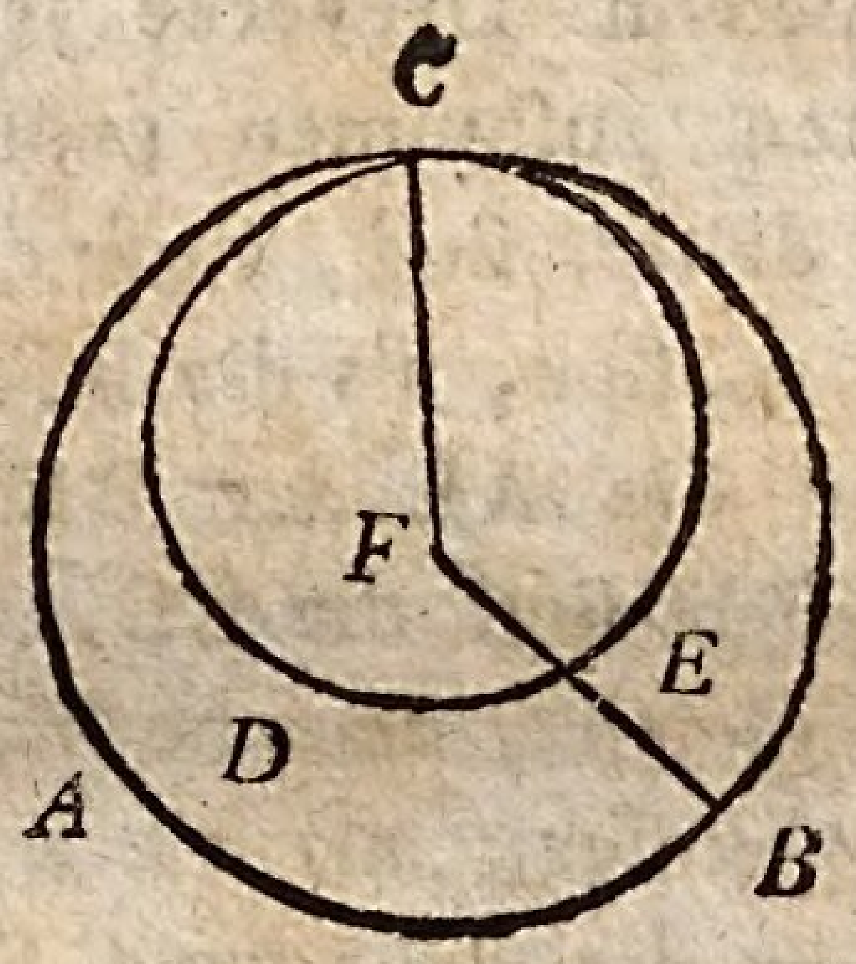
Kreises CDG ist, so ist die EC der EG gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass die EC auch der EF gleich sey; folglich ist die EF der EG, also die kleinere der grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Der Punkt E ist also nicht der Mittelpunkt der beyden Kreise ABC, CDG.

Wenn demnach zwey Kreise u. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander inwendig berühren, so haben sie nicht einerley Mittelpunkt.

Die beyden Kreise ABC, CDE berühren einander inwendig in dem Punkte C, so behaupte ich, dass sie nicht einerley Mittelpunkt haben.



Beweis. Es sey, die Möglichkeit angenommen, F ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt, so ziehe man die FC, und nach Belieben die FEB.

Da nun F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so ist die FC der FB gleich. Da ferner F der Mittelpunkt des Kreises CDE ist, so ist die FC der FE gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass die FC auch der FB gleich sey; folglich ist die FE der FB, also die kleinere der grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Es ist also nicht der Punkt F der Mittelpunkt der beyden Kreise ABC, CDE.

Wenn demnach zwey Kreise u. s. w. w. z. e. w.

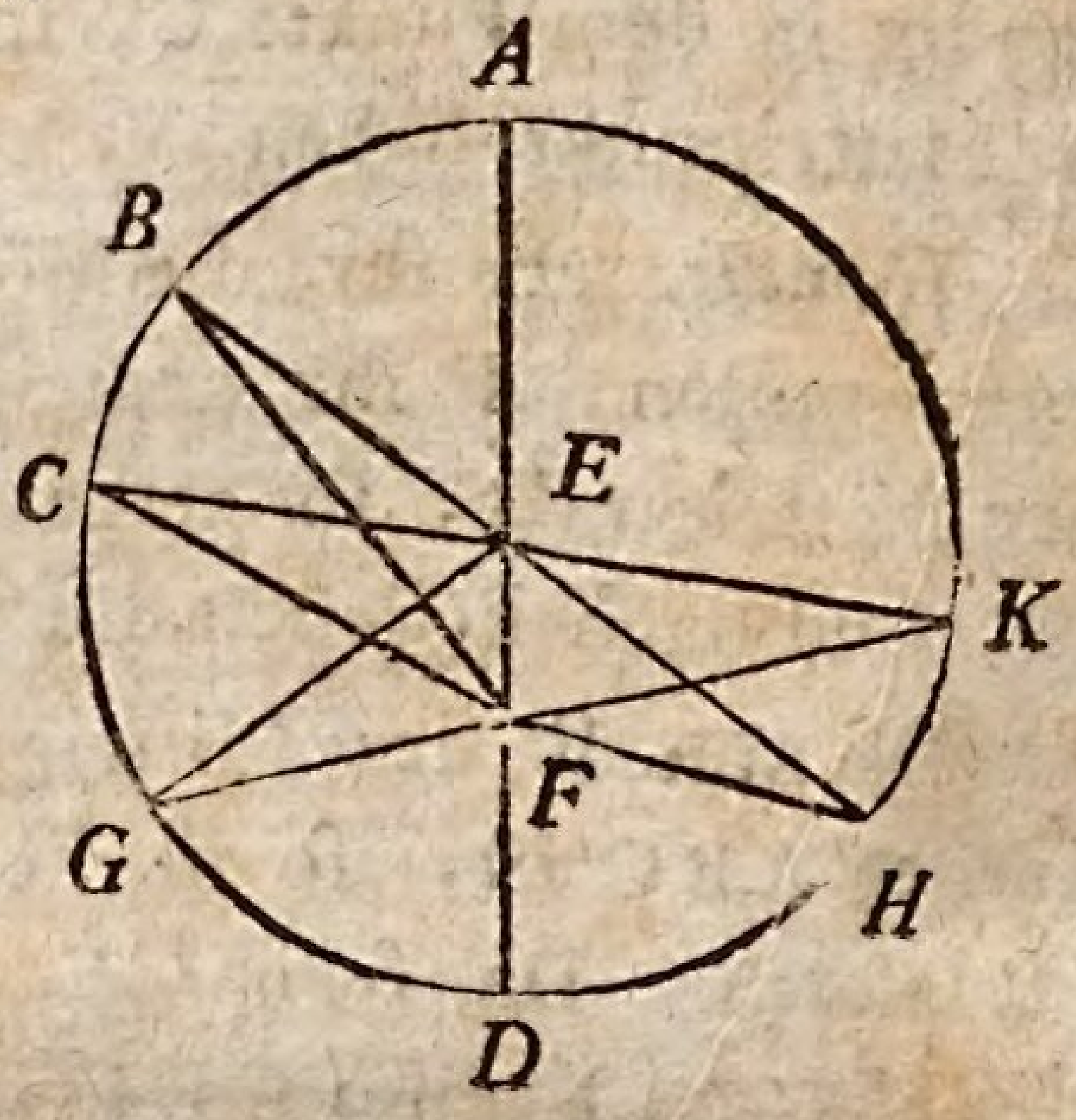
7. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man im Durchmesser eines Kreises einen Punkt annimmt, der nicht der Mittelpunkt ist, und es gehen von diesem Punkte aus gerade Linien an den Kreis, so ist die grösste von ihnen diejenige, in welcher

der

der Mittelpunkt liegt, ihr Reſt aber die kleinſte; und von den übrigen iſt immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, gröſſer, als die entferntere; auch gehen von dieſem Punkte aus nur zwey gleiche gerade Linien auf beyden Seiten der kleinſten an den Kreis.

Es ſey der Kreis ABCD, deſſen Durchmeſſer AD, und auf demſelben nehme man den Punkt F an, der nicht der Mittelpunkt des Kreiſes iſt, deſſen Mittelpunkt aber ſey E, und von dem Punkte F aus gehen die geraden Linien FB, FC, FG an den Kreis, ſo behaupte ich, daſs die FA die gröſste, die FD hingegen die kleinſte, von den übrigen aber die FB gröſſer, als die FC, und die FC gröſſer, als die FG ſey. Man ziehe noch die BE, CE, GE.



Beweis. Da (1, 20. S.) in jedem Dreyecke jede zwey Seiten zuſammen gröſſer, als die dritte, ſind, ſo ſind die EB, EF gröſſer, als die BF. Es iſt aber die AE der BE gleich; folglich ſind die BE, EF der AF gleich, und mithin iſt die AF gröſſer, als die BF. Da ferner die BE der CE gleich, die FE aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden BE, FE den beyden CE, FE ſtückweiſe gleich, aber der Winkel BEF iſt gröſſer, als der Winkel CEF; folglich iſt (1, 24. S.) auch die Grundlinie BF gröſſer, als die Grundlinie CF. Aus eben den Gründen iſt auch die CF gröſſer, als die GF.

Da ferner die GF, FE gröſſer ſind, als die GE, aber die GE der ED gleich iſt, ſo ſind die GF, FE auch gröſſer, als die ED. Man nehme beyderſeits die FE hinweg, ſo iſt der Reſt FG gröſſer, als der Reſt FD. Und folglich iſt FA die gröſste, und FD die kleinſte, auch FB gröſſer, als FC, und FC gröſſer, als FG.

Ich behaupte aber ferner, daſs von dem Punkte F nur zwey gleiche gerade Linien, auf beyden Seiten der kleinſten FD, an den Kreis ABCD gehen.

Man

Man ſeze (1, 23. S.) an den Punkt E der Linie EF, den Winkel FEH, welcher dem Winkel GEF gleich ſey, und ziehe die FH. Da nun die GE der EH gleich, und die EF gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden GE, EF den beyden EH, EF ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel GEF dem Winkel HEF gleich; folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie FG der Grundlinie FH gleich. Nun behaupte ich, daſs von dem Punkte F aus keine andere, der FG gleiche, gerade Linie an den Kreis gehe. Denn geſezt, es gehe, die Möglichkeit angenommen, noch die Linie FK, welche der FG gleich ſey, an den Kreis, ſo iſt, da die FK der FG, die FG aber der FH gleich iſt, auch die FK der FH, alſo die, der durch den Mittelpunkt gehenden, nähere der entfernteren gleich, welches unmöglich iſt.

Wenn man demnach im Durchmeſſer eines Kreiſes u. ſ. w. w. z. e. w.

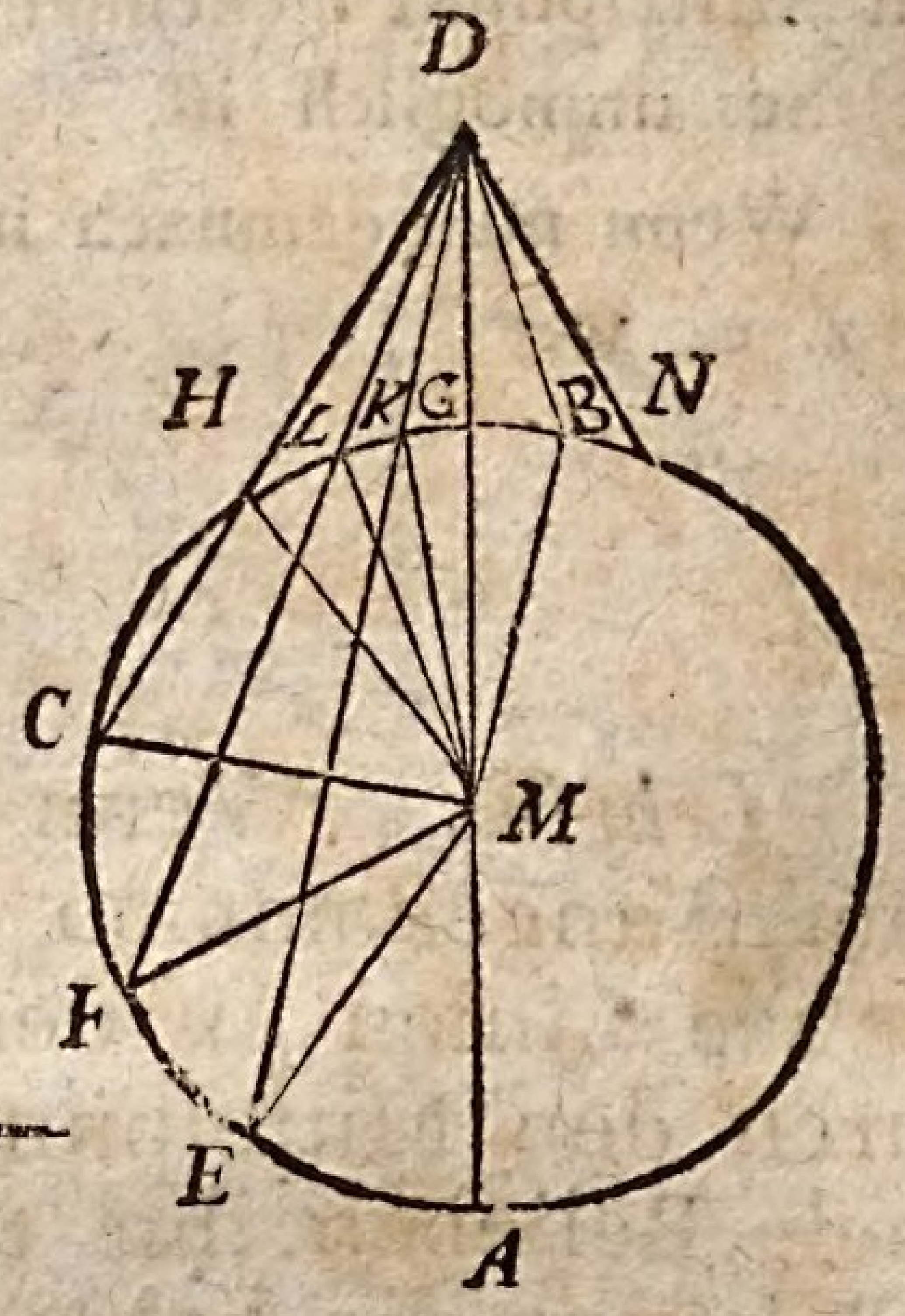
8. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn auſſerhalb eines Kreiſes ein Punkt angenommen wird, und von demſelben gerade Linien an den Kreis gehen, wovon eine durch den Mittelpunkt gehet, die übrigen aber nach Belieben ihn treffen, ſo iſt unter denen, welche an die hohle Peripherie gehen, diejenige die gröſste, welche durch den Mittelpunkt gehet, und von den übrigen jede der durch den Mittelpunkt gehenden nähere gröſſer, als die entferntere; unter denen aber, welche an die erhabene Peripherie gehen, iſt die zwiſchen dem angenommenen Punkte und dem Durchmeſſer liegende die kleinſte, und von den übrigen jede der kleinſten nähere kleiner, als die entferntere; auch gehen von dem angenommenen Punkte aus nur zwey gleiche gerade Linien auf beyden Seiten der kleinſten an den Kreis.

Es ſey der Kreis ABC; man nehme auſſerhalb deſſelben einen Punkt D an, und ziehe von demſelben an den Kreis die ge-

geraden Linien DA, DE, DF, DC, unter welchen die DA durch den Mittelpunkt gehe, so behaupte ich, dafs unter den an die hohle Peripherie AEFC gehenden geraden Linien die durch den Mittelpunkt gehende DA die gröfste, und die zwischen dem angenommenen Punkte und dem Durchmesser AG befindliche, DG, die kleinste, dafs aber die DE gröffer, als die DF, und die DF gröffer, als die DC sey; dafs ferner unter denen, welche in den Punkten H, L, K, G die erhabene Peripherie treffen, immer die der kleinsten DG nähere kleiner sey, als die entferntere, nämlich die DK kleiner, als die DL, und die DL kleiner, als die DH.

Beweis. Man nehme den Mittelpunkt des Kreises ABC, und dieser sey M, alsdann ziehe man die ME, MF, MC, MH, ML, MK.



Da nun die AM der EM gleich ist, so seze man beyderseits die MD hinzu, und es ist die AD den beyden EM, MD gleich. Aber die EM, MD sind (1, 20. S.) gröffer, als die ED; folglich ist auch die AD gröffer, als die ED. Da ferner die ME der MF gleich, die MD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden EM, MD den beyden FM, MD gleich; aber der Winkel EMD ist gröffer, als der Winkel FMD; folglich ist (1, 24. S.) auch die Grundlinie ED gröffer, als die Grundlinie FD. Eben so kann nun auch bewiesen werden, dafs die FD gröffer, als die CD, sey. Demnach ist DA die gröfste, und DE gröffer, als DF, die DF aber gröffer als die DC.

Da ferner (1, 20. S.) die MK, KD gröffer sind, als die MD, aber die MG der MK gleich ist, so ist auch der Rest KD gröffer, als der Rest GD, und mithin GD kleiner, als KD, folglich GD die kleinste. Und da in dem Dreyecke MLD auf einer seiner Seiten MD zwey gerade Linien MK, KD inwendig aufgestellt sind, so sind diese (1, 21. S.) kleiner

ner als ML, LD. Da nun die MK der ML gleich ist, so ist der Rest DK kleiner, als der Rest DL. Eben so kann nun auch bewiesen werden, daſs DL kleiner sey, als DH. Demnach ist DG die kleinste, und DK kleiner als DL, die DL aber kleiner als die DH.

Ich behaupte endlich noch, daſs von dem Punkte D aus nur zwey gleiche gerade Linien, auf beyden Seiten der kleinsten DG, an den Kreis gehen. Man seze (1, 23. S) an den Punkt M der geraden Linie MD einen Winkel DMB welcher dem Winkel KMD gleich sey, und ziehe die DB. Da nun die MK der MB gleich, die MD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden KM, MD den beyden BM, MD stückweise gleich, auch ist der Winkel KMD dem Winkel DMB gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie DK der Grundlinie DB gleich. Nun behaupte ich, daſs von dem Punkte D aus keine andere, der DK gleiche, gerade Linie an den Kreis gehe. Es gehe, die Moglichkeit angenommen, noch eine andere; der DK gleiche, an den Kreis wie die DN. Da nun die DK der DN, aber auch die DK der DB gleich ist, so ist auch die DB der DN, also die der kleinsten DG nähere der entfernteren, gleich, welches, nach dem bereits erwiesenen, unmöglich ist.

Wenn demnach ausserhalb eines Kreises u. s. w. w. z. e. w.

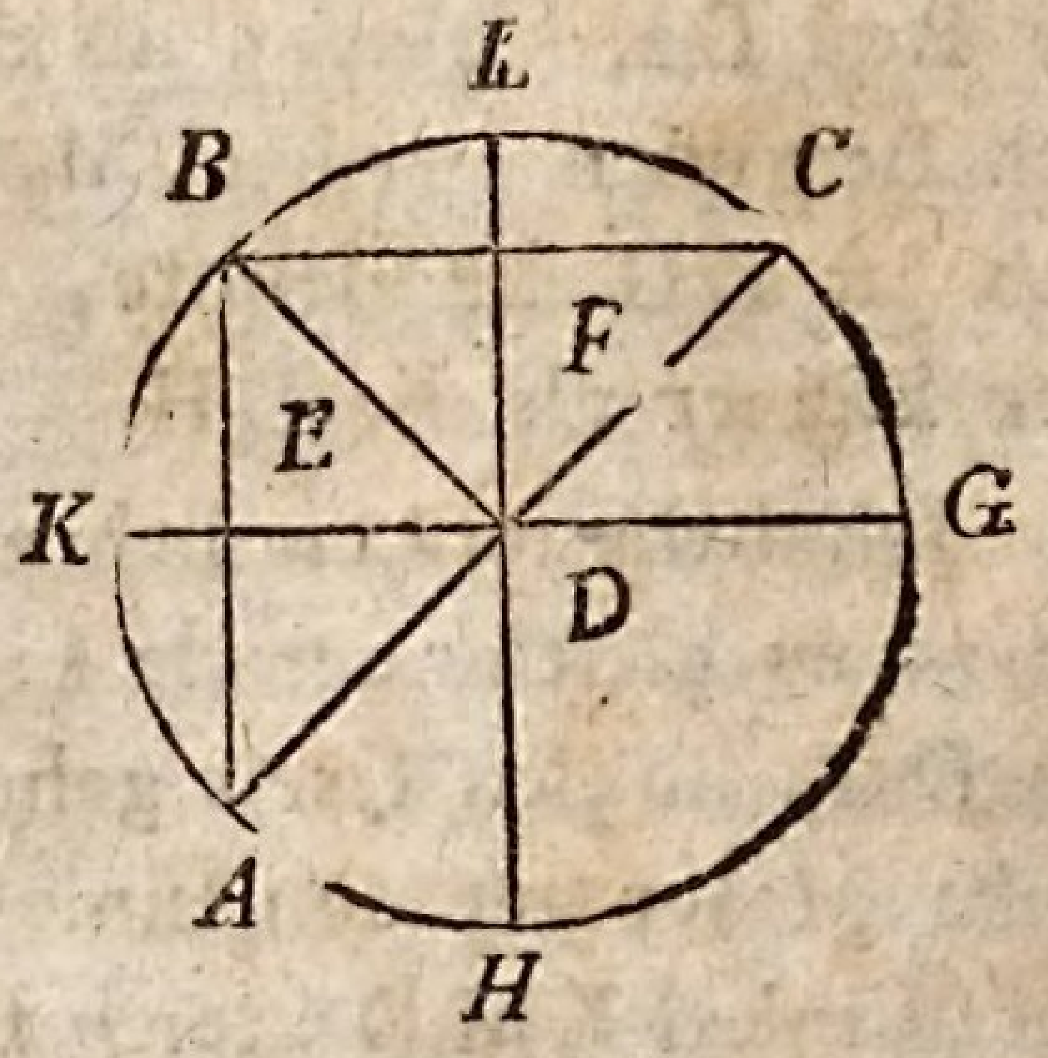
9. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in einem Kreise ein Punkt angenommen wird, und von demselben mehr, als zwey, gleiche gerade Linien an den Kreis gehen, so ist der angenommene Punkt der Mittelpunkt des Kreises.

Es sey der Kreis ABC, und in demselben der Punkt D, und von diesem Punkte D gehen an den Kreis ABC mehr, als zwey, gleiche gerade Linien DA, DB, DC, so behaupte ich, daſs der Punkt D der Mittelpunkt des Kreises sey.

Beweis. Man ziehe die AB, BC und halbire sie (1, 10. S.) in den Punkten E, F, ziehe alsdann die ED, DF und verlängere

längere ſie bis zu den Punkten G, K und H, L.



Da nun die A E der E B gleich, die E D aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden A E, E D den beyden B E, E D ſtückweiſe gleich, auch iſt die Grundlinie D A der Grundlinie D B gleich; folglich iſt (1, 8. S.) auch der Winkel A E D dem Winkel BED gleich, und mithin iſt (1, 10. Erkl.) jeder der beyden Winkel A E D, B E D ein rechter, und die Linie G K, welche die A B halbirt, ſchneidet ſie alſo lothrecht. Da nun wenn im Kreiſe eine gerade Linie eine andre halbirt und lothrecht ſchneidet (3, 1. Zuſ.) in der ſchneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreiſes iſt, ſo iſt in der Linie G K der Mittelpunkt des Kreiſes A B C Nun wird eben ſo bewieſen, daſs auch in der H L der Mittelpunkt des Kreiſes A B C ſey. Da nun die beyden Linien G K, H L keinen andern Punkt mit einander gemein haben, als den Punkt D, ſo iſt folglich D der Mittelpunkt des Kreiſes A B C.

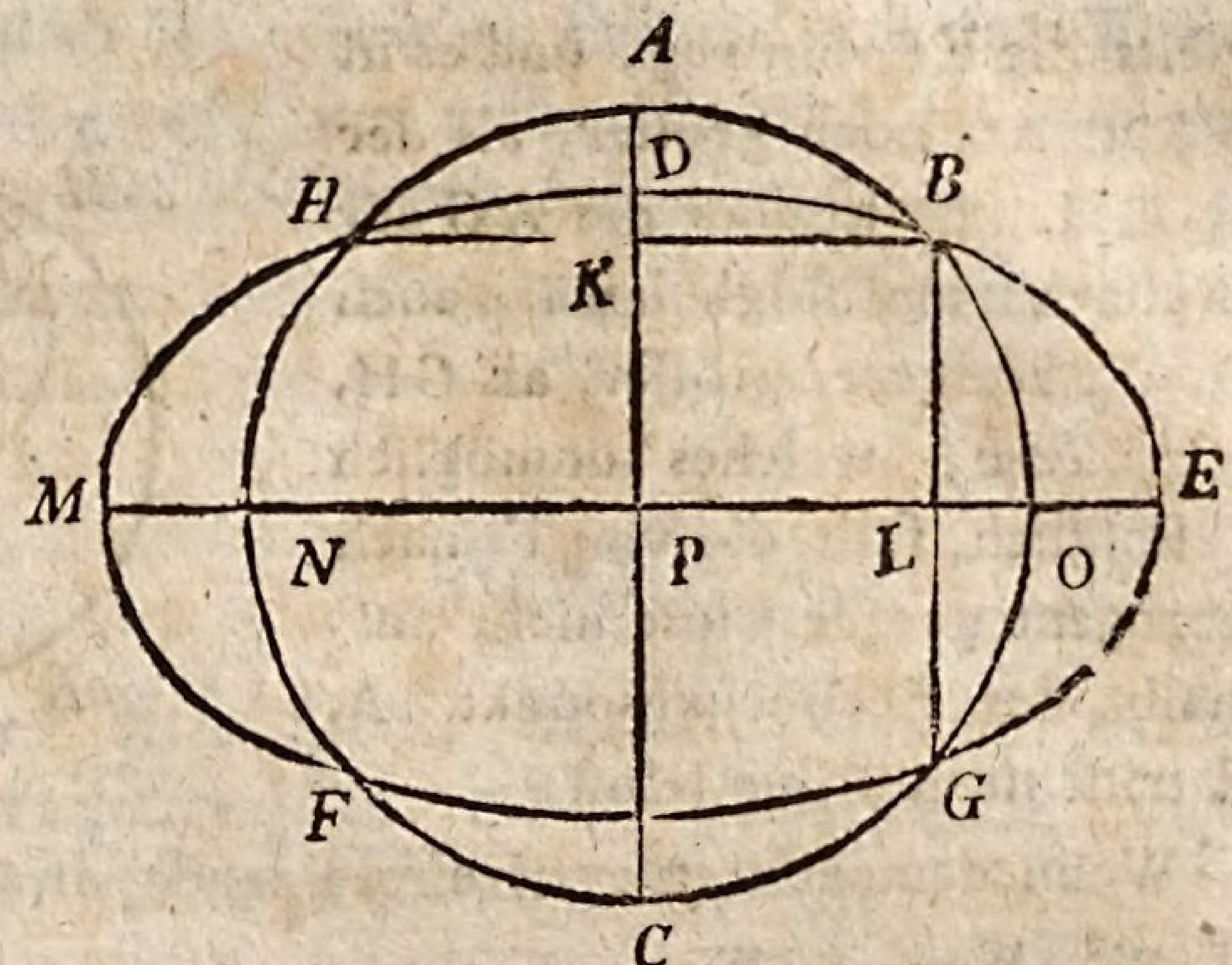
Wenn demnach in einem Kreiſe ein Punkt angenommen wird u. ſ. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrſaz. Ein Kreis ſchneidet einen andern nicht in mehr als zwey Punkten.

Geſezt, es ſchnitte, die Möglichkeit angenommen, der Kreis A B C den Kreis D E F in mehr, als zwey, Punkten, nämlich in B, G, H, ſo ziehe man die geraden Linien B H, B G, und halbire ſie in den Punkten K, L alsdann errichte man in dieſen Punkten K, L auf den Linien B H, B C die K C, L M lothrecht, und verlängere ſolche bis nach A, E.

Beweis. Da in dem Kreiſe A B C die gerade Linie A C eine andere B H halbirt und lothrecht ſchneidet, ſo iſt (3, 1. Zuſ.) in der Linie A C der Mittelpunkt des Kreiſes A B C. Da ferner in eben dieſem Kreiſe die gerade Linie N O eine andere B G halbirt und lothrecht ſchneidet, ſo iſt der Mittelpunkt des



des Kreiſes ABC in der Linie NO. Es iſt aber gezeigt worden, daſs er auch in der Linie AC liege, und die geraden Linien AC, NO begegnen einander in keinem Punkte, als im Punkte P, folglich iſt der Punkt P der Mittelpunkt des Kreiſes ABC. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs der Punkt P, auch der Mittelpunkt des Kreiſes DEF ſey, und folglich hätten die beyden einander ſchneidenden Kreiſe ABC, DEF einerley Mittelpunkt P, welches (3, 5. S.) unmöglich iſt.

Ein Kreis ſchneidet alſo einen andern nicht in mehr, als zwey, Punkten, w. z. e. w

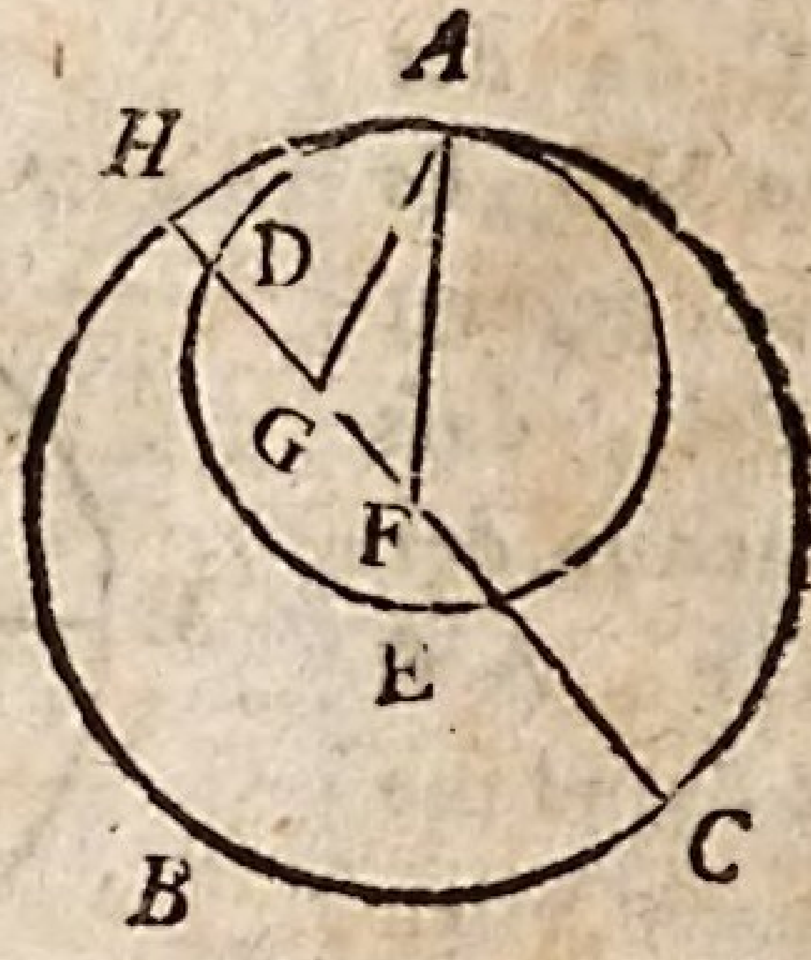
11. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey Kreiſe einander inwendig berühren, und man nimmt ihre Mittelpunkte, ſo trift die gerade Linie, welche durch ihre Mittelpunkte gehet, verlängert an den Berührungspunkt der beyden Kreiſe.

Die beyden Kreiſe ABC, ADE berühren einander inwendig in dem Punkte A, und man nehme des Kreiſes ABC Mittelpunkt F, und des Kreiſes ADE Mittelpunkt G, ſo behaupte ich, daſs die von F nach G gezogene gerade Linie verlängert an den Punkt A treffe.

Beweis. Wenn dies nicht wäre, ſo habe ſie, die Möglichkeit angenommen, die Lage FGDH, und man ziehe die AF, AG. Da nun die AG, GF (1, 20. S.) zuſammen gröſſer ſind, als die FA, das iſt gröſſer, als FH, (denn FH, FA ſind, als Halbmeſſer, einander gleich) ſo nehme man beyder-

derseits die FG hinweg, und es ist der Rest AG noch grösser, als der Rest GH. Es ist aber die AG der GD gleich; und folglich wäre auch GD, die kleinere, grösser, als GH, die grössere, welches unmöglich ist. Folglich fällt die von F nach G gezogene gerade Linie nicht ausserhalb des Berührungspunkt A, und trifft mithin ihn selbst.



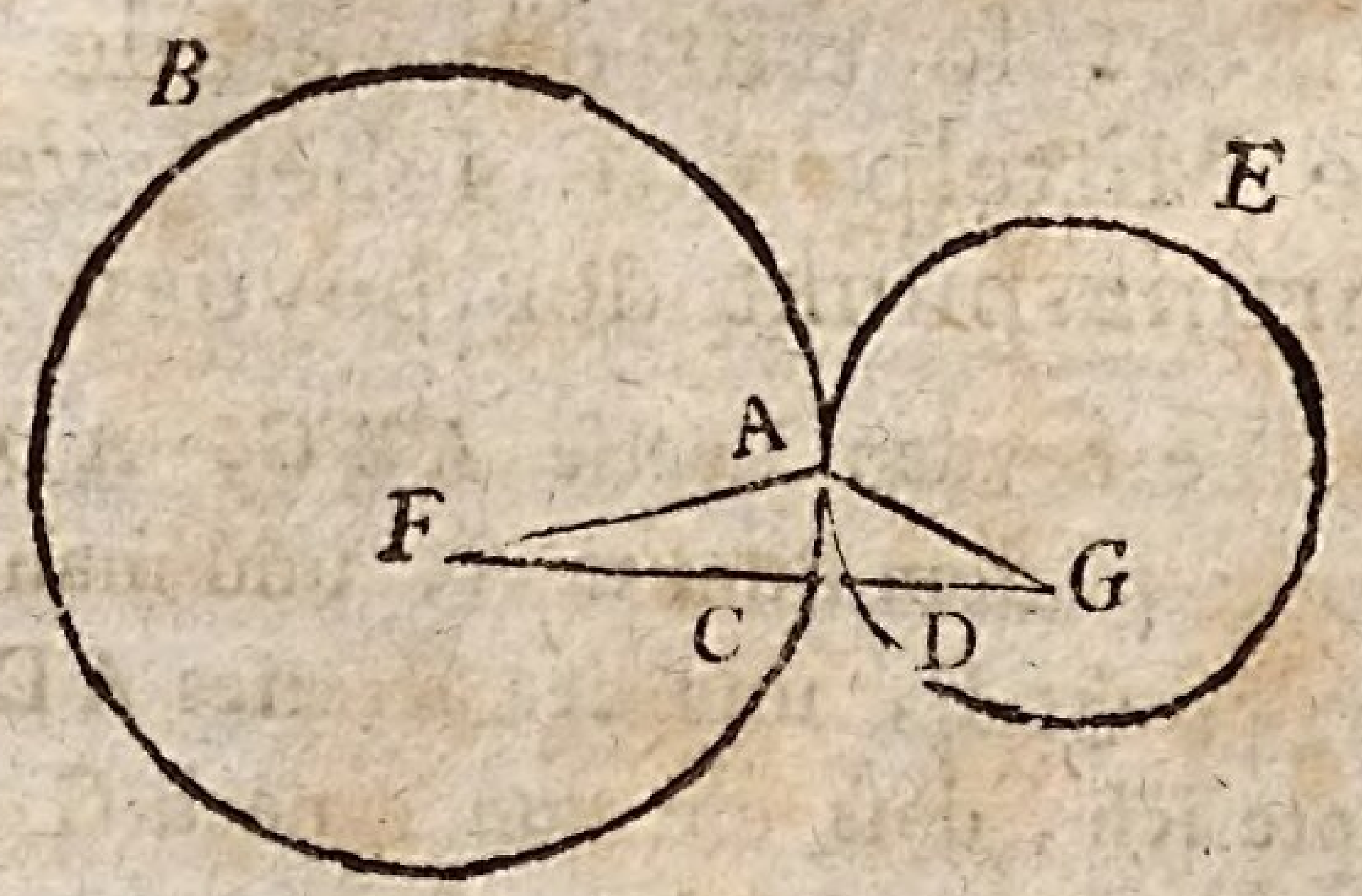
Wenn demnach zwey Kreise einander inwendig berühren u. s. w. w. z. e. w.

12. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander auswendig berühren, so gehet die durch ihre Mittelpunkte gezogene gerade Linie durch den Berührungspunkt.

Die beyden Kreise ABC, ADE berühren einander auswendig in dem Punkte A, und man nehme des Kreises ABC Mittelpunkt F, und des Kreises ADE Mittelpunkt G, so behaupte ich, dass die von F nach G gezogene gerade Linie durch den Berührungspunkt A gehe.

Beweis. Wenn dies nicht wäre, so habe sie, die Mögligkeit angenommen, die Lage FCDG und man ziehe die AF, AG. Da nun F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so ist die FA der FC gleich; Da ferner G der Mittelpunkt des Kreises ADE ist, so ist die GA der GD gleich. Nun ist aber gezeigt worden, dass die FA auch der FC gleich sey; folglich sind die beyden FA, AG den beyden FC, DG gleich, und mithin ist die ganze FG grösser, als die beyden FA, AG. Aber sie ist (1, 20. S.) auch kleiner, als diese, wel-

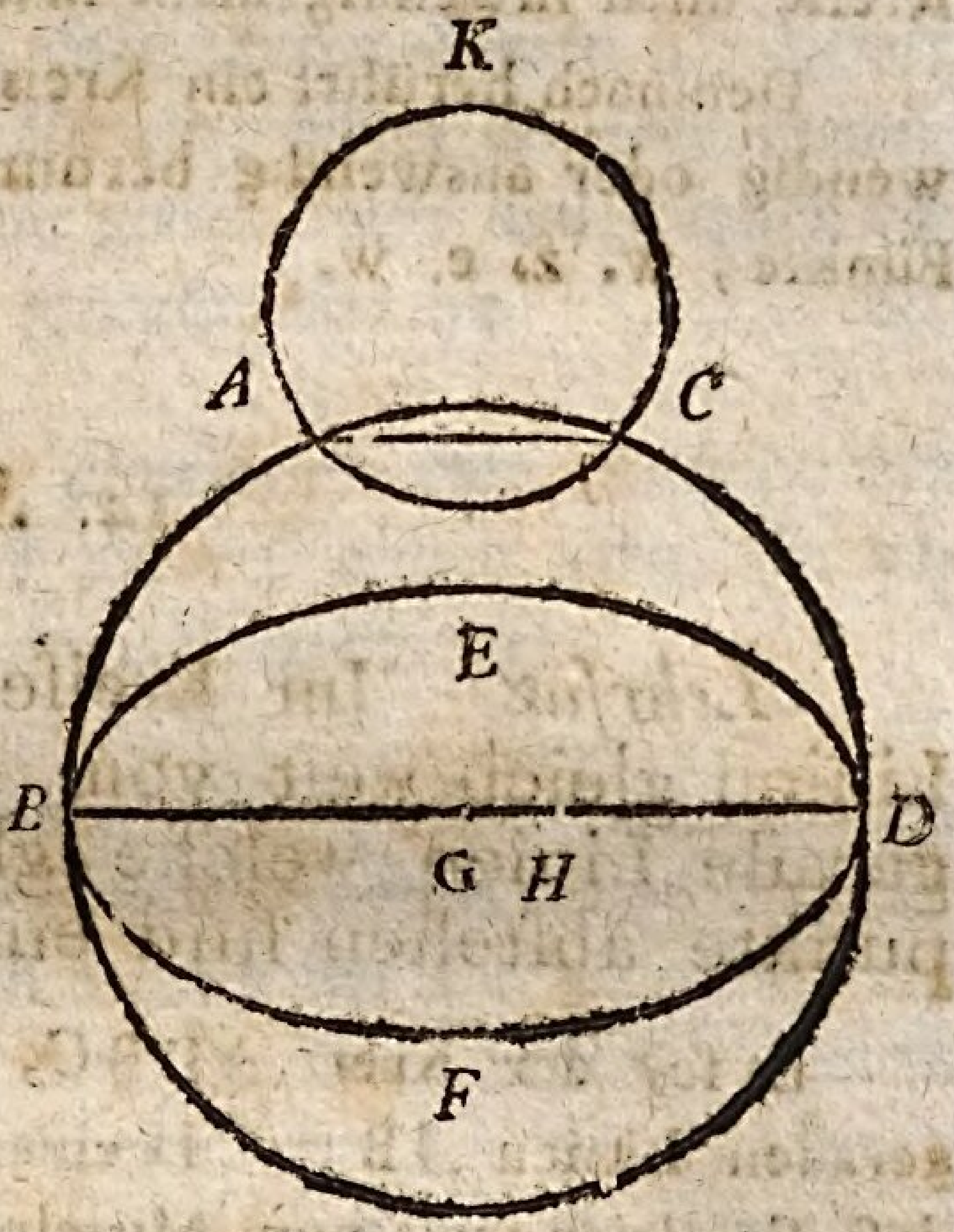


welches unmöglich ist. Folglich fällt die von dem Punkte F nach G gezogene gerade Linie nicht ausserhalb des Berührungspunkts A, und gehet also durch denselben.

Wenn demnach zwey *Kreise* einander auswendig berühren u. s. w. w. z. e. w.

13. *Saz.*

Lehrsaz. Ein Kreis berührt einen andern, er mag ihn inwendig oder auswendig berühren, nicht in mehr als *einem* Punkte.



Beweis. Gesezt, der Kreis ABDC berühre, die Möglichkeit angenommen, den Kreis EBFD zuerst inwendig in mehr als *einem* Punkte, nämlich in den Punkten B, D so nehme man (3, 1. S.) des Kreises ABDC Mittelpunkt G, und des Kreises EBFD Mittelpunkt H, und die gerade Linie von G nach H wird (3, 11. S.) durch die Punkte B, D gehen. Gesezt sie habe die Lage BGHD. Da nun G der Mittelpunkt des Kreises ABDC ist, so ist die BG der GD gleich, und folglich die BG grösser, als die HD, also noch vielmehr die BH grösser, als die HD. Da ferner H der Mittelpunkt des Kreises EBFD ist, so ist die BH der HD gleich; es ist aber gezeigt worden, dass die BH auch viel grösser, als die HD, sey, welches unmöglich ist. Ein Kreis berührt also einen andern inwendig nicht in mehr als *einem* Punkte

Ich behaupte aber ferner, dass ein Kreis einen andern auch auswendig nicht in mehr als *einem* Punkte berühre.

Denn gesezt, der Kreis A C K berühre, die Möglichkeit angenommen, den Kreis A B D C auswendig in mehr als *einem* Punkte, nämlich in den Punkten A, *C* so ziehe man die A *C*. Da nun in der Peripherie eines jeden der Kreise A B D C, A C K zwey beliebige Punkte A, C angenommen worden, so fällt die durch dieselbigen gezogene gerade Linie (3, 2. S) innerhalb eines jeden der beyden Kreise. Fällt sie aber innerhalb des Kreises A B D *C*, so fällt sie (3, 3. E kl) ausserhalb des Kreises A C K, welches unmöglich ist. Folglich berührt ein Kreis einen andern auswendig nicht in mehr als *einem* Punkte

Es ist aber gezeigt worden, dass die Berührung zweyer Kreise auch inwendig nicht in mehr als *einem* Punkte geschehe.

Demnach berührt ein Kreis einen andern, er mag ihn inwendig oder auswendig berühren, nicht in mehr als *einem* Punkte, w. z. e. w.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise stehen gleiche gerade Linien gleich weit vom Mittelpunkte ab; und, gerade Linien welche gleich weit vom Mittelpunkte abstehen sind einander gleich.

Es sey der Kreis A D B C, und in demselben seyen die geraden Linien *A* B, C D einander gleich, so behaupte ich, dass sie gleich weit vom Mittelpunkte abstehen.

Beweis. Man nehme des Kreises A B D *C* Mittelpunkt E, fälle von dem Punkte E auf die Linien A B, C D die Lothe E F, E G, und ziehe A E, E C.



Da nun die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie E F die nicht durch den Mittelpunkt gehende A B lothrecht schneidet, so halbirt sie (3, 3. S.) solche auch; es ist also die A F der F B gleich, und mithin *A* B das Doppelte von A F. *A*us eben den Gründen aber ist C D das Doppelte von C G; Ferner ist die

die AB der CD, und folglich auch die AF der CG gleich; und da die AE der EC gleich ist, so ist auch das Quadrat von AE dem Quadrate von EC gleich. Nun sind aber (1, 47. S.) dem Quadrate von AE die Quadrate von AF, FE gleich, denn der Winkel bey F ist ein rechter, dem Quadrate von EC aber sind die Quadrate von CG, GE gleich, denn der Winkel bey G ist ein rechter; folglich sind die Quadrate von AF, EF den Quadraten von CG, GE gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von AF dem Quadrate von CG gleich, weil die AF selbst der CG gleich ist; folglich ist auch, wenn man beyderseits gleiches wegnimmt, das Quadrat von FE dem Quadrate von GE, und mithin auch die FE der EG gleich. Man sagt aber (3, 4. Erkl.) dass gerade Linien im Kreise gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, wenn die vom Mittelpunkte aus auf sie gefällten Lothe gleich sind; und folglich stehen AB, CD gleichweit vom Mittelpunkte ab.

Nun sollen aber AB, CD gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, das ist, es soll die EF der EG gleich seyn, so behaupte ich, dass auch die AB der CD gleich sey.

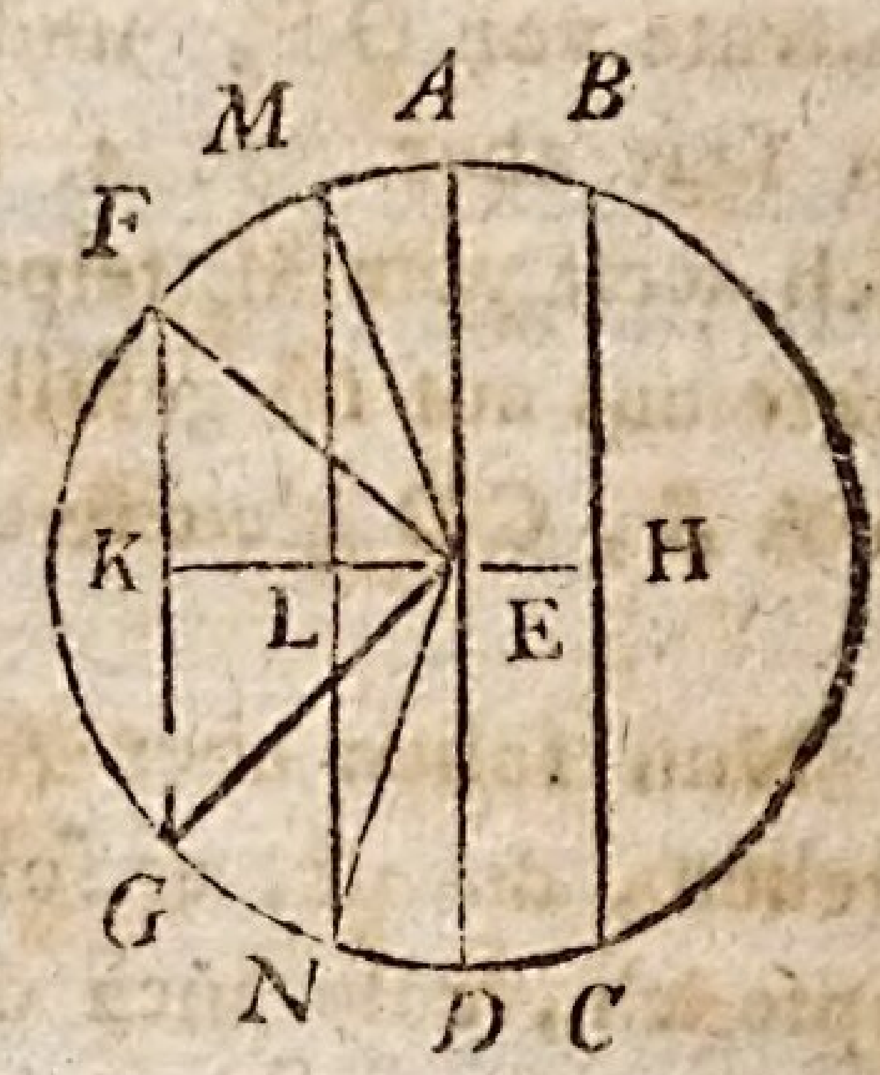
Denn man kann, nach der nämlichen Construction eben so, wie vorhin, zeigen, dass AB das Doppelte von AF, und CD das Doppelte von CG sey. Da nun die AE der CE gleich ist, so ist auch das Quadrat von AE dem Quadrate von CE gleich. Nun sind (1, 47. S.) dem Quadrate von AE die Quadrate von EF, FA, dem Quadrate von CE aber die Quadrate von GE, CG gleich; folglich sind die Quadrate von EF, FA den Quadraten von GE, CG gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von EF dem Quadrate von EG gleich, denn die EF selbst ist der EG gleich; folglich ist auch, wenn man beyderseits gleiches abziehet, das Quadrat von FA dem Quadrate von CG und mithin auch die AF selbst der GC gleich. Nun ist AB das Doppelte von AF, und CD das Doppelte von CG; folglich ist auch die AB der CD gleich.

Demnach stehen im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

15. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise ist der Durchmesser die grösste Linie, von den übrigen aber jede dem Mittelpunkte nähere grösser, als die entferntere.

Es sey der Kreis ABCD dessen Durchmesser AD, und sein Mittelpunkt E, ferner sey die BC dem Mittelpunkte E näher, die FG aber weiter von ihm entfernt, so behaupte ich, dass die AD die grösste, die BC aber grösser, als die FG, sey.



Beweis. Man fälle aus dem Mittelpunkte E auf die Linien BC, FG die Lothe EH, EK, so ist, da die BC dem Mittelpunkte näher, die FG aber von ihm entfernter ist, (3, 5. Erkl.) die EK grösser, als die EH. Man mache also die EL der EH gleich, verlängere die in dem Punkte L auf der EK lothrecht aufgerichtete ML bis nach N, und ziehe EM, EN und EF, EG.

Da nun die EH der EL gleich ist, so ist (3, 14. S.) auch die BC der MN gleich. Da ferner die AE der EM, und die ED der EN gleich ist, so ist die AD den beyden EM, EN gleich. Aber EM, EN sind zusammen grösser, als MN; folglich ist auch die AD grösser, als die MN. Es ist aber die MN der *B*C gleich; mithin ist auch die AD grösser, als die BC. Da nun die beyden ME, EN den beyden FE, EG gleich sind, aber der Winkel MEN grösser ist, als der Winkel FEG, so ist (1, 24. S.) auch die Grundlinie MN grösser, als die Grundlinie FG. Es ist aber gezeigt worden, dass die MN der BC gleich sey; folglich ist auch die BC grösser, als die FG. Mithin ist der Durchmesser AD die grösste, die BC aber grösser, als die FG.

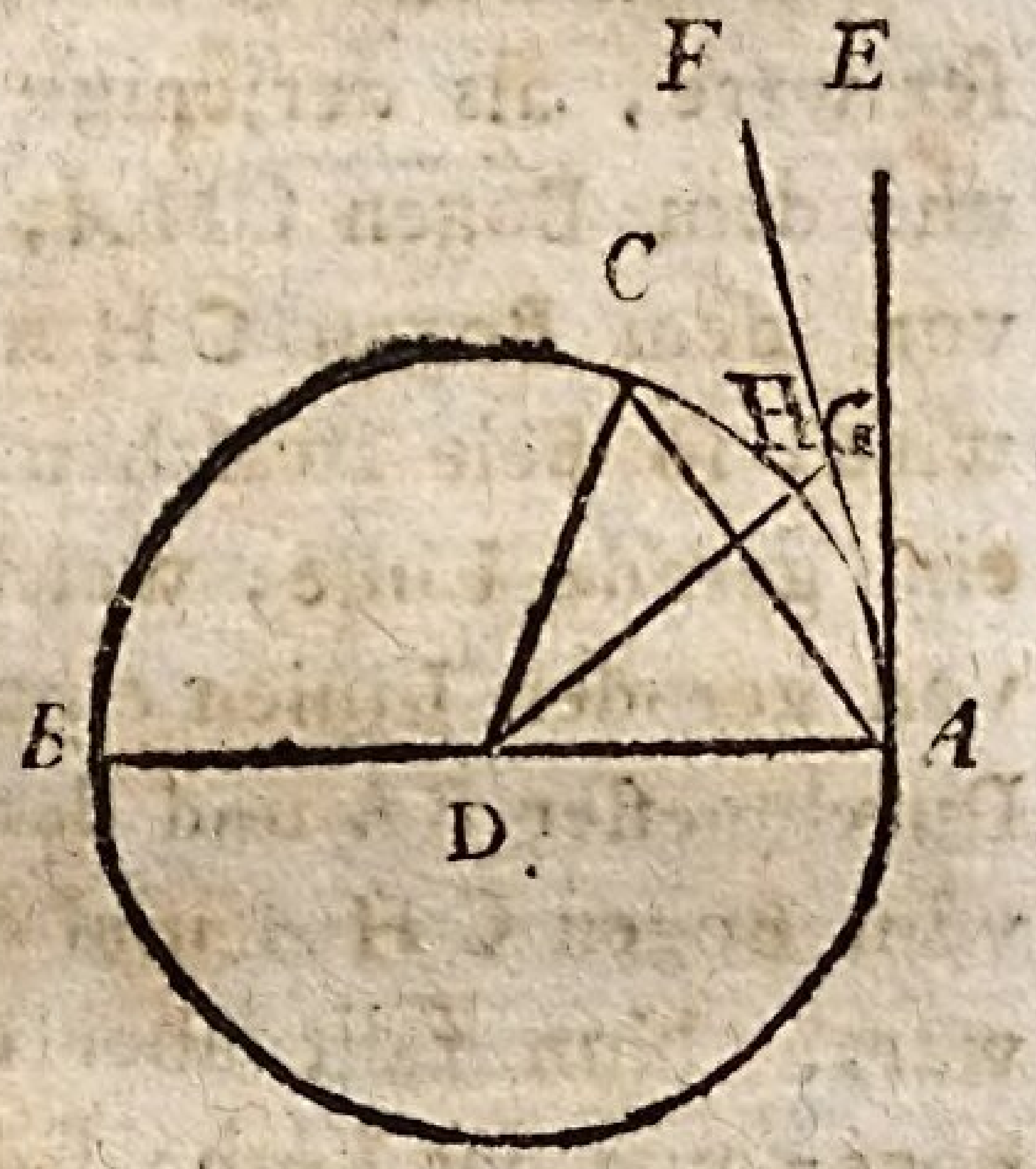
Demnach ist im Kreise der Durchmesser u. s. w. w. z. e. w.

16. *Saz.*

16 *Saz.*

Lehrſaz. Ein auf dem Durchmeſſer eines Kreiſes in deſſen Endpunkte aufgerichtetes Loth fällt auſſerhalb des Kreiſes, und zwiſchen das Loth und die Peripherie fällt keine andere gerade Linie; auch iſt der Winkel des Halbkreiſes gröſſer, ſein Reſt aber kleiner, als jeder geradlinigte ſpize Winkel.

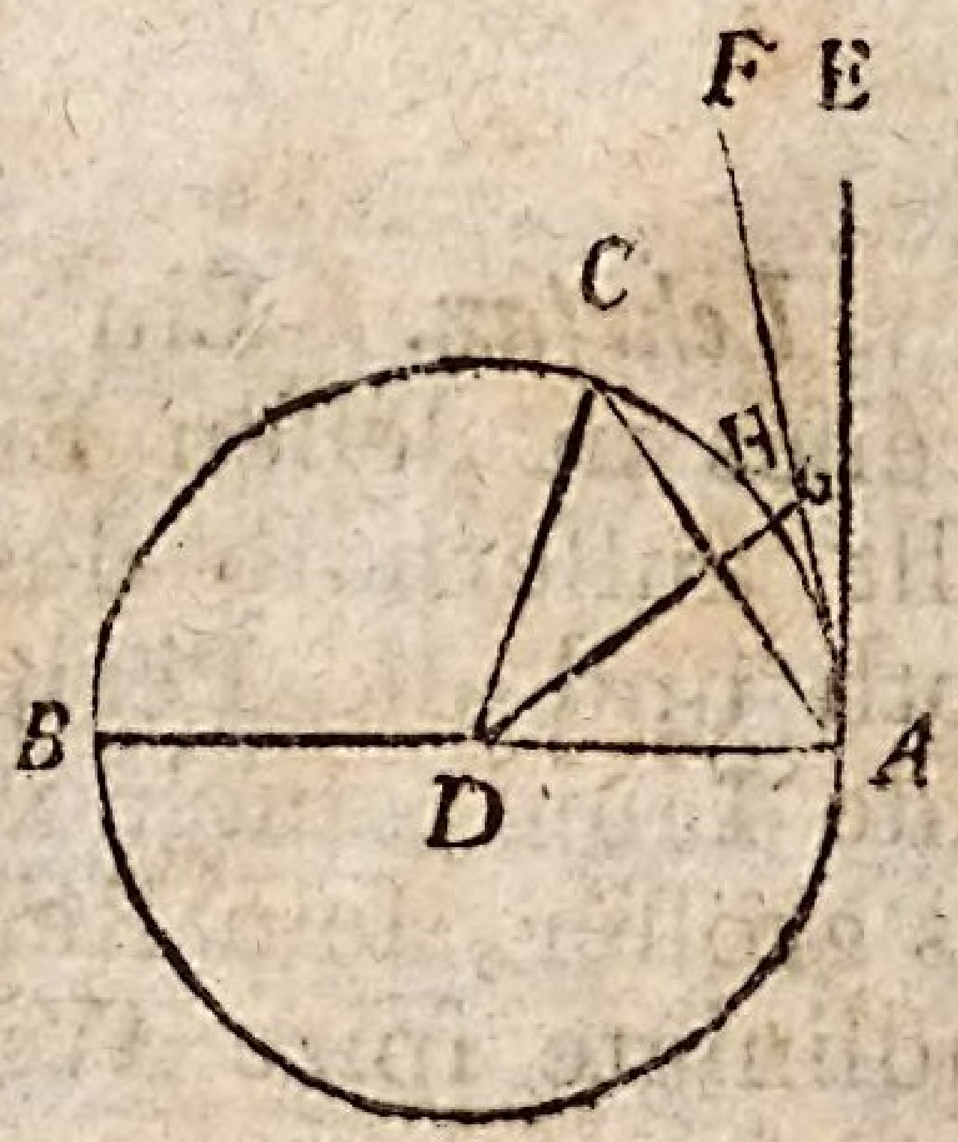
Es ſey der Kreis ABC, um den Mittelpunkt D, und den Durchmeſſer AB, ſo behaupte ich, daſs das im Endpunkte A des Durchmeſſers AB auf demſelben errichtete Loth auſſerhalb des Kreiſes falle.



Beweis. Geſezt, dieſes wäre nicht, ſondern es fiele, die Möglichkeit angenommen, innerhalb des Kreiſes, wie die AC, ſo ziehe man die DC.

Da nun die DA der DC gleich iſt, ſo iſt (1, 5. S.) auch der Winkel DAC dem Winkel ACD gleich. Es iſt aber DAC ein rechter Winkel; folglich iſt auch ACD ein rechter, und mithin ſind DAC, ACD zuſammen zwey rechte Winkel, welches (1, 17. S.) unmöglich iſt; folglich fällt das in dem Punkte *A* auf B*A* errichtete Loth nicht innerhalb des Kreiſes. Es kann aber eben ſo gezeigt worden, daſs es auch nicht in die Peripherie folle; folglich fällt es auſſerhalb deſſelben wie AE.

Nun behaupte ich ferner, daſs zwiſchen das Loth *A*E und den Kreisbogen keine andere gerade Linie falle. Denn geſezt, es fiele, die Möglichkeit angenommen, noch eine andere dazwiſchen, wie die F*A*, ſo fälle man von dem Punkte D auf die FA das Loth DG. Da nun AGD ein rechter Winkel, aber D*A*G kleiner, als ein rechter iſt, ſo iſt (1, 19. S.) auch *A*D görſſer, als DG. Es iſt aber die DA der DH gleich, und mithin iſt auch DH, die kleinere, gröſſer, als DG, die gröſ-



gröſſere, welches unmöglich iſt; Folglich fällt zwiſchen das Loth und den Kreisbogen keine andere gerade Linie.

Endlich behaupte ich noch, daſs der Winkel des Halbkreiſes, welcher vom Durchmeſſer B A, und dem Bogen C H A eingeſchloſſen wird, gröſſer, ſein Reſt aber, der vom Bogen C H A und dem Lothe A E eingeſchloſſen wird, kleiner ſey, als jeder geradlinigte ſpize Winkel.

Denn wenn es einen geradlinigten Winkel gäbe, der gröſſer wäre, als derjenige, welcher von dem Durchmeſſer B A und dem Bogen C H A, aber kleiner, als derjenige, welcher von dem Bogen C H A und dem Lothe A E eingeſchloſſen wird, ſo fiele zwiſchen den Bogen C H A und das Loth A E eine gerade Linie, welche einen Winkel machte, der, da er von geraden Linien eingeſchloſſen wird, gröſſer, als der vom Durchmeſſer B A und dem Bogen C H A, aber kleiner, als der vom Bogen C H A und dem Lothe A E eingeſchloſſene Winkel, wäre. Nun fällt aber eine ſolche Linie nicht zwiſchen den Bogen und das Loth; folglich giebt es auch keinen, von geraden Linien eingeſchloſſenen, Winkel, der gröſſer, als der vom Durchmeſſer B A und Kreisbogen C H A, aber kleiner, als der vom Bogen C H A und dem Lothe A E eingeſchloſſene Winkel, wäre.

Demnach fällt ein auf dem Durchmeſſer eines Kreiſes u. ſ. w. w. z. e. w.

Zuſaz. Hieraus erhellet alſo, daſs ein auf dem Durchmeſſer in deſſen Endpunkte errichtetes Loth, den Kreis berühre, und daſs eine gerade Linie den Kreis nur in *einem* Punkte berühre, indem (3, 2. S.) von einer geraden Linie, welche demſelben in zwey Punkten begegnet, gezeigt worden iſt, daſs ſie innerhalb deſſelben falle.

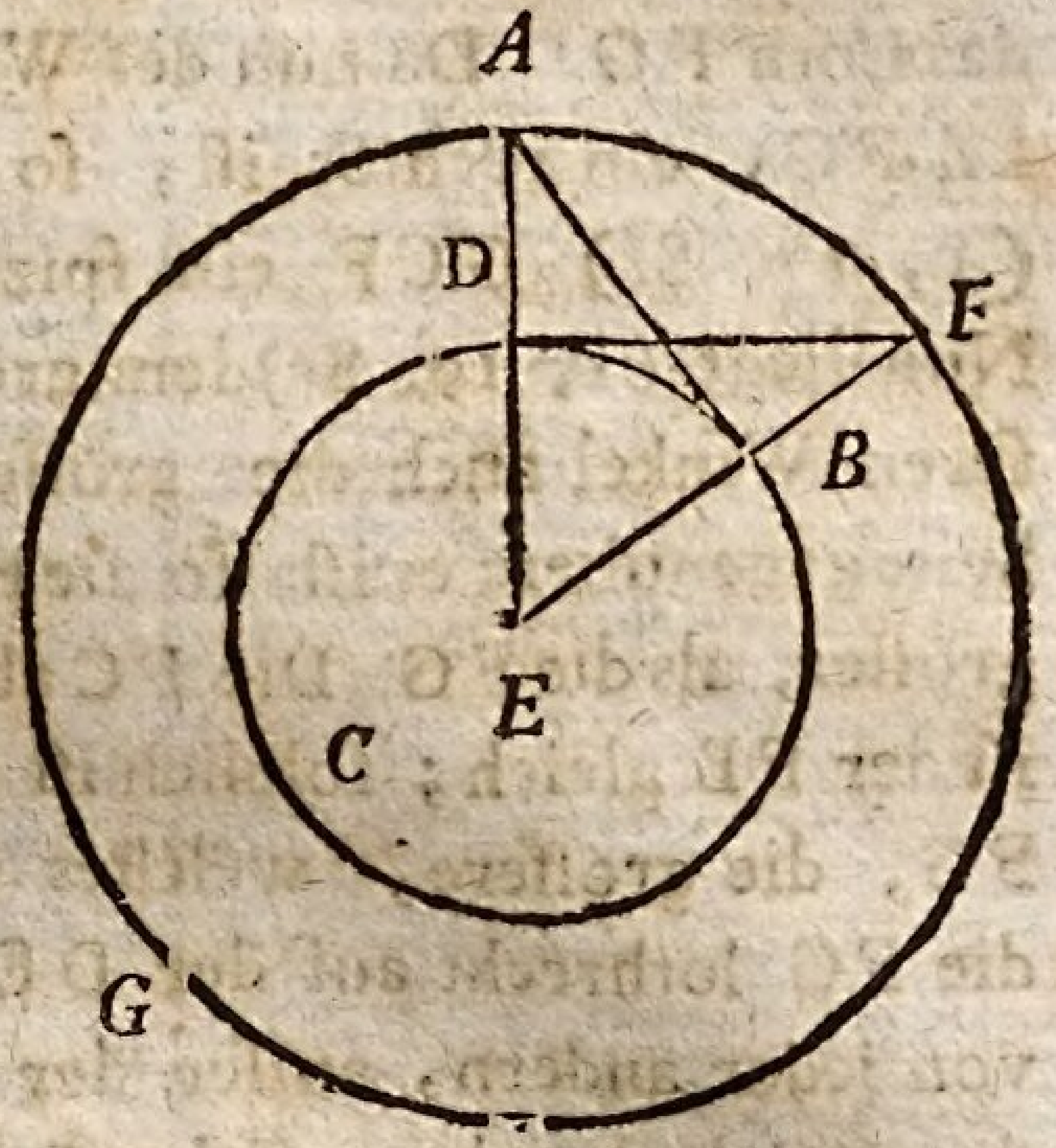
17. *Saz.*

17. *Saz.*

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte aus eine gerade Linie zu ziehen, die einen gegebenen Kreis berühre.

Es sey der gegebene Punkt A, der gegebene Kreis BCD, und man soll von dem Punkte *A* aus eine gerade Linie ziehen, welche den Kreis BCD berühre.

Auflösung. Man nehme des Kreises Mittelpunkt E, und ziehe die AE, alsdann beschreibe man (3 Ford.) aus dem Mittelpunkte E mit der Weite EA den Kreis AFG, errichte (1, 11, S) in dem Punkte D auf der AE die DF lothrecht, und ziehe die EBF, AB, so behaupte ich, daß die von dem Punkte A aus gezogene Linie AB den Kreis BCD berühre.



Beweis. Da E der Mittelpunkt der beyden Kreise BCD, AFG ist, so ist die EA der EF, und die ED der EB gleich; und mithin sind die beyden *A*E, EB den beyden FE; ED gleich, auch schliessen sie bey E einen gemeinschaftlichen Winkel ein; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundline DF der Grundlinie *A*B, und das ganze Dreyeck DEF dem ganzen Dreyecke A*B*E gleich, auch sind die übrigen Winkel in beyden Dreyecken einander gleich; folglich ist der Winkel EB*A* dem Winkel EDF gleich; es ist aber EDF ein rechter Winkel, mithin ist auch EBA ein rechter. Nun ist E*B* ein Halbmesser, und ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichtetes Loth berührt (3, 16. Zus.) den Kreis; folglich berührt die AB den Kreis.

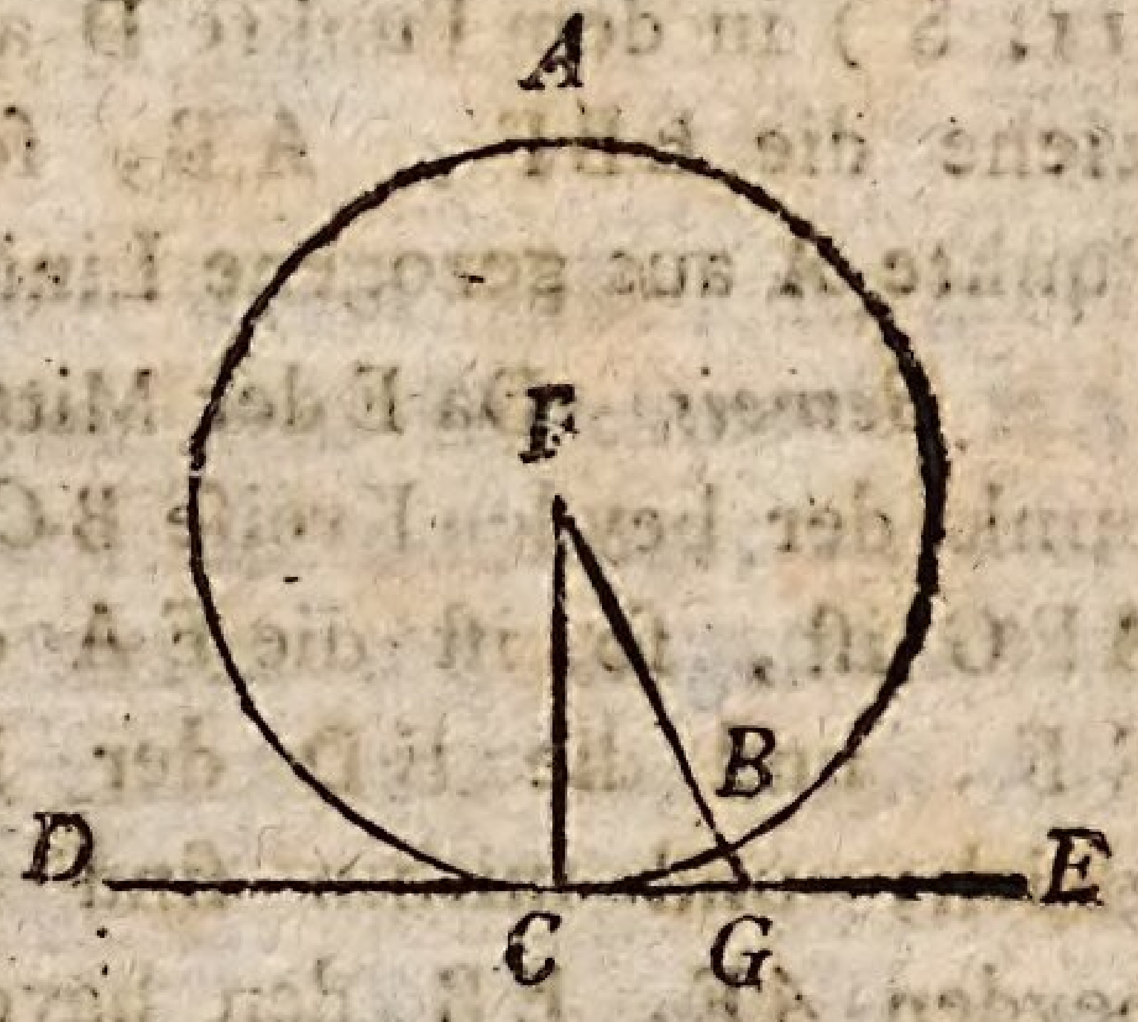
Demnach ist von dem gegebenen Punkte A aus die gerade Linie AB gezogen worden, welche den gegebenen Kreis BCD berührt, w. z. v. w.

18. *Saz.*

18. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und es wird von dem Mittelpunkte aus an den Berührungspunkt eine gerade Linie gezogen, so stehet diese auf der Tangente lothrecht.

Die gerade Linie DE berühre den Kreis ABC in dem Punkte C, und man nehme des Kreises ABC Mittelpunkt F, und ziehe von F nach C die Linie FC, so behaupte ich, dass die FC auf der DE lothrecht sey.



Beweis. Wenn dies nicht wäre, so fälle man (1, 12. S.) von dem Punkte F auf die DE das Loth FG. Da nun der Winkel FGC ein rechter ist, so ist (1, 17. S.) GCF ein spizer. Nun liegt (1, 19. S.) dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber; es ist also die FC grösser, als die FG. Die FC aber ist der FB gleich; folglich ist auch FB, die kleinere, grösser, als FG, die grössere, welches unmöglich ist. Es ist also nicht die FG lothrecht auf der DE. Eben so kann dies aber auch von jeder andern, ausser der FC, gezeigt werden; folglich ist die FC lothrecht auf der DE.

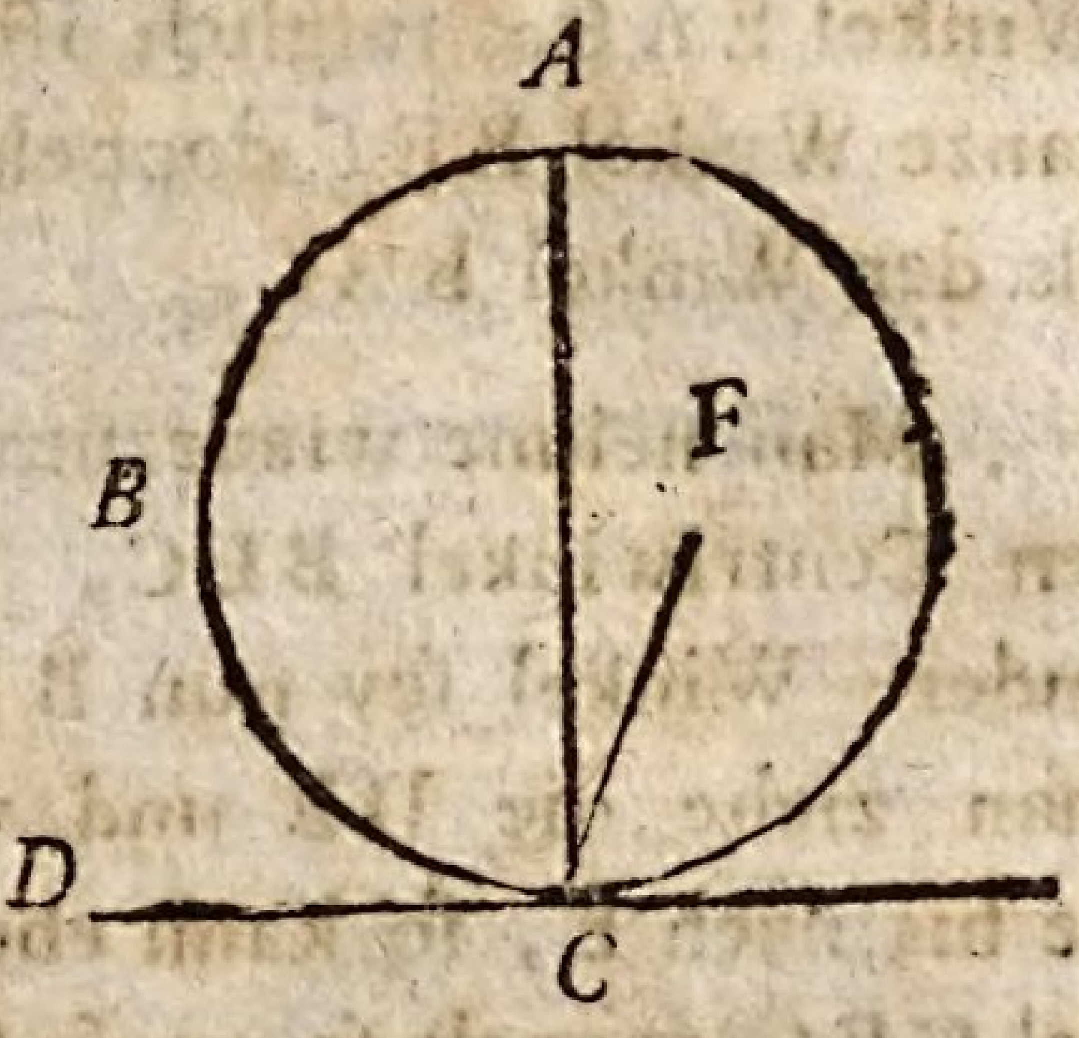
Wenn demnach eine gerade Linie den Kreis berührt, u. s. w. w. z. e. w.

19. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und man errichtet eine gerade Linie in dem Berührungspunkte auf der Tangente lothrecht, so ist in dieser des Kreises Mittelpunkt.

Die Linie DE berühre den Kreis ABC in dem Punkte C, und in eben diesem Punkte C sey die CA lothrecht auf der

DE aufgerichtet, so behaupte ich, dass in der Linie AC des Kreises Mittelpunkt sey.



Beweis. Wenn dies nicht wäre, so sey, die Möglichkeit angenommen, des Kreises Mittelpunkt F, und man ziehe die FC. Da nun die DE den Kreis ABC berührt, und FC von dem Mittelpunkte an den Berührungspunkt gezogen ist, so ist (3, 18. S.) die FC lothrecht auf der DE, und folglich ist FCE ein rechter Winkel. Es ist aber auch ACE ein rechter Winkel, und mithin ist der Winkel FCE, als der kleinere, dem Winkel ACE als dem grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Folglich ist nicht F der Mittelpunkt des Kreises ABC. Eben so kann dieses aber auch von jedem andern Punkte, ausser einem in der Linie AC, gezeigt werden. Folglich ist in der Linie AC des Kreises ABC Mittelpunkt.

Wenn demnach eine gerade Linie den Kreis berührt, u. s. w. w. z. e. w.

20. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise ist der Centriwinkel doppelt so gross, als der Peripheriewinkel, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Es sey der Kreis ABC, und an seinem Mittelpunkte der Winkel BEC, an seiner Peripherie aber der Winkel BAC, und beyde sollen auf dem nämlichen Bogen BC stehen, so behaupte ich, dass der Winkel BEC doppelt so gross sey, als der Winkel BAC.

Beweis. Da die EA der EB, und mithin (1, 5. S.) der Winkel EAB dem Winkel EBA gleich ist, so sind die Winkel EAB, EBA zusammen doppelt so gross, als der Winkel EAB. Es ist aber (1, 32. S.) der Winkel BEF den beyden Winkeln EBA, EAB gleich; folglich ist auch der Winkel BEF doppelt so gross, als der Winkel EAB. Aus eben

den



den Gründen aber ist auch der Winkel F E C doppelt so grofs, als der Winkel E A C; folglich ist auch der ganze Winkel B E C doppelt so grofs, als der Winkel B A C.

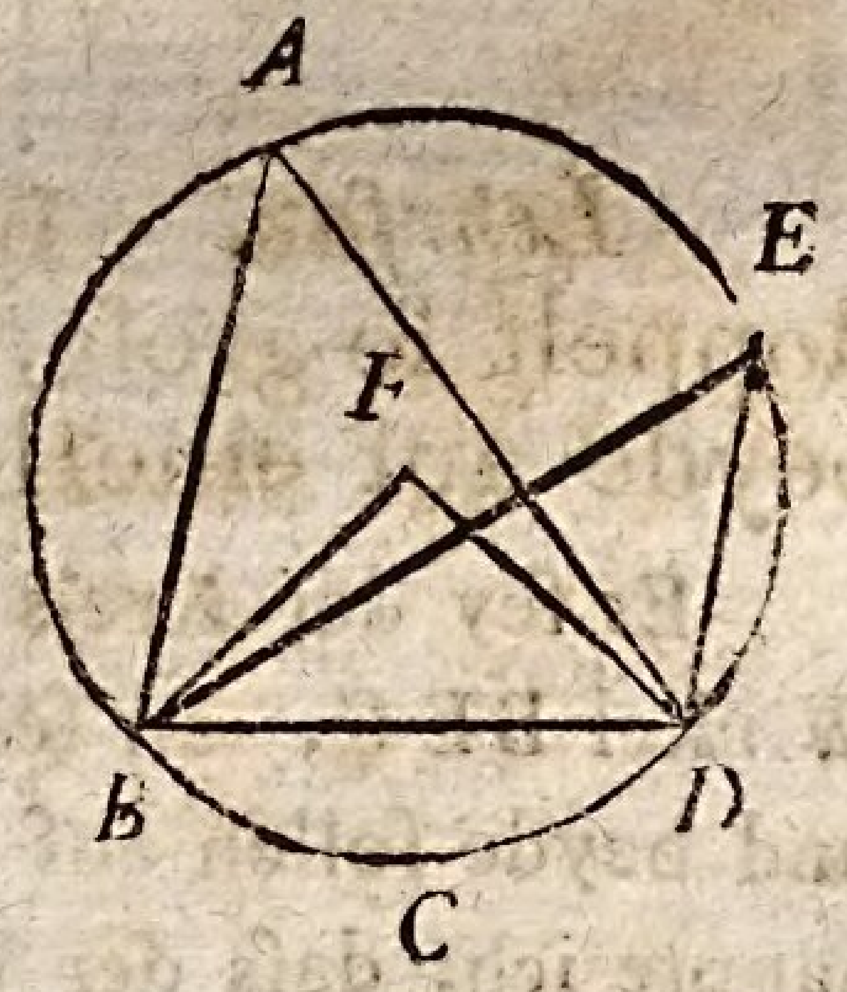
Man nehme wiederum eben diesen Centriwinkel B E C, aber der andere Winkel sey nun B D C, und man ziehe die D E und verlängere sie bis nach E, so kann eben so gezeigt werden, dafs der Winkel G E C doppelt so grofs sey, als der Winkel G D C. Von diesen aber ist G E B doppelt so grofs, als G D B; folglich ist auch der Rest B E C doppelt so grofs, als der Rest B D C.

Demnach ist im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise sind die Winkel in einerley Abschnitte einander gleich.

Es sey der Kreis A B C D und in dem Abschnitte B A E D seyen die Winkel B A D, B E D so behaupte ich, dafs die Winkel B A D, B E D einander gleich seyen.



Beweis. Man nehme (3, 1. S.) des Kreises A B C D Mittelpunkt, und dieser sey F; hierauf ziehe man die BF, FD.

Da nun der Winkel B F D ein Centriwinkel der Winkel B A D aber ein Peripheriewinkel ist, und da sie auf einerley Bogen B C D stehen, so ist (3, 20. S.) der Winkel B F D doppelt so grofs, als der Winkel B A D. Aus eben dem Grunde aber ist B F D auch doppelt so grofs, als B E D; folglich ist (7. Grundf.) der Winkel B A D dem Winkel B E D gleich.

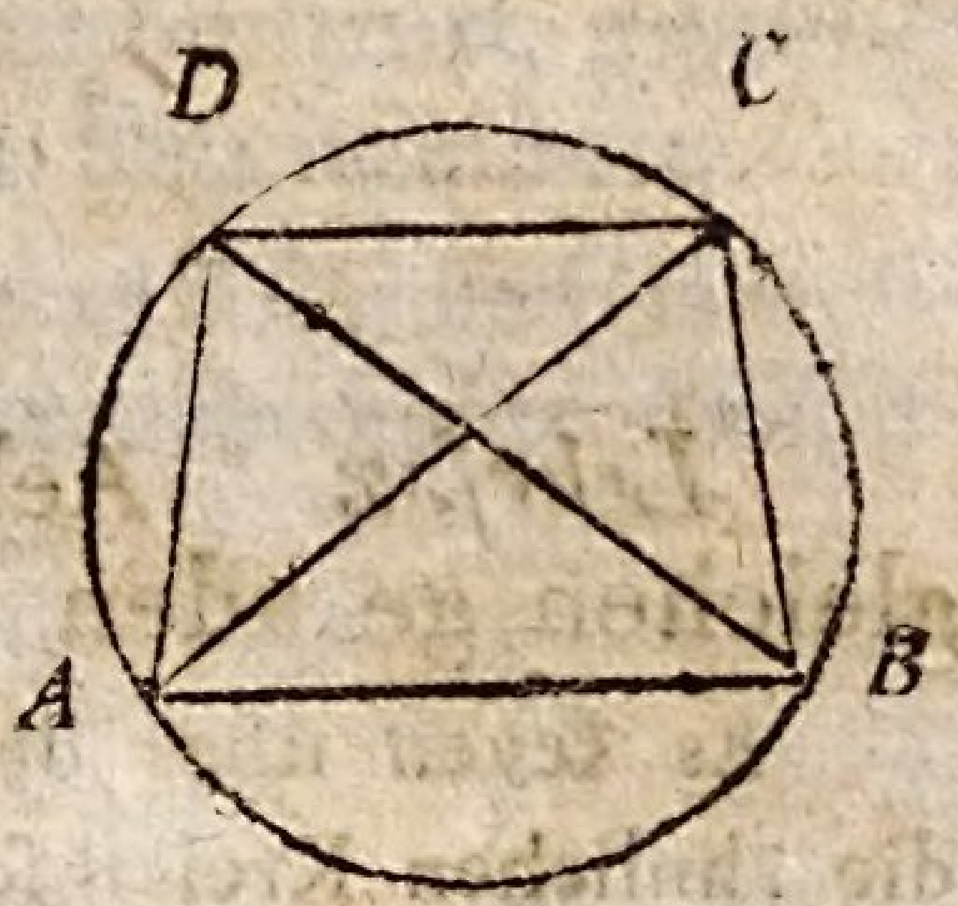
Im Kreise sind demnach die Winkel in einerley Abschnitte einander gleich. w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrsaz Die Gegenwinkel der vierseitigen Figuren im Kreise sind zwey rechten gleich.

Es sey der Kreis A B C D und in demselben die vierseitige Figur A B C D, so behaupte ich, dass die Gegenwinkel derselben zwey rechten gleich seyen.

Beweis. Man ziehe die A C, B D. Da nun die drey Winkel eines jeden Dreyecks (1, 32. S.) zwey rechten gleich sind, so sind des Dreyecks A B C drey Winkel, C A B, A B C, B C A zwey rechten gleich. Nun ist aber (3, 21, S.) der Winkel C A B dem Winkel B D C gleich, denn sie sind in einerley Abschnitte A D C B; folglich ist der ganze Winkel A D C den beyden B A C, A C B gleich. Man seze den Winkel A B C beyderseits hinzu, so sind die Winkel A B C, C A B, A C B den Winkeln A B C, A D C gleich. Aber die Winkel A B C, B A C, A C B sind zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel A B C, A D C zwey rechten gleich. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch die Winkel B A D, D C B zwey rechten gleich seyen.



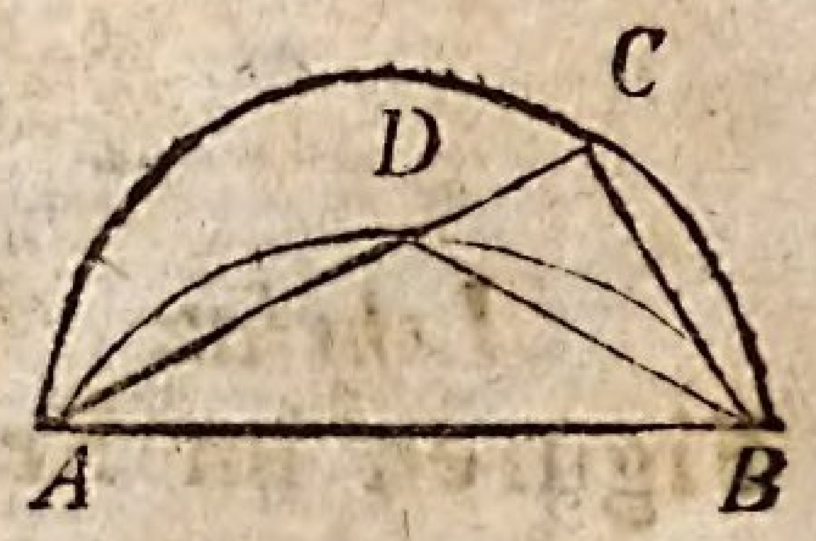
Demnach sind die Gegenwinkel der vierseitigen Figuren im Kreise zwey rechten gleich, w. z. e. w.

23. *Saz.*

Lehrsaz. Auf einerley geraden Linie können nicht zwey ähnliche und ungleiche Kreisabschnitte an einerley Seite beschrieben werden.

Beweis. Es seyen, die Möglichkeit angenommen, auf einerley geraden Linie A B an einerley Seite zwey ähnliche und ungleiche Kreisabschnitte A C B, A D B, so ziehe man die Linien A D C, C B, D B. Da nun der Abschnitt A C B, dem Abschnitte A D B ähnlich ist, ähnliche Kreisabschnitte aber

(3,



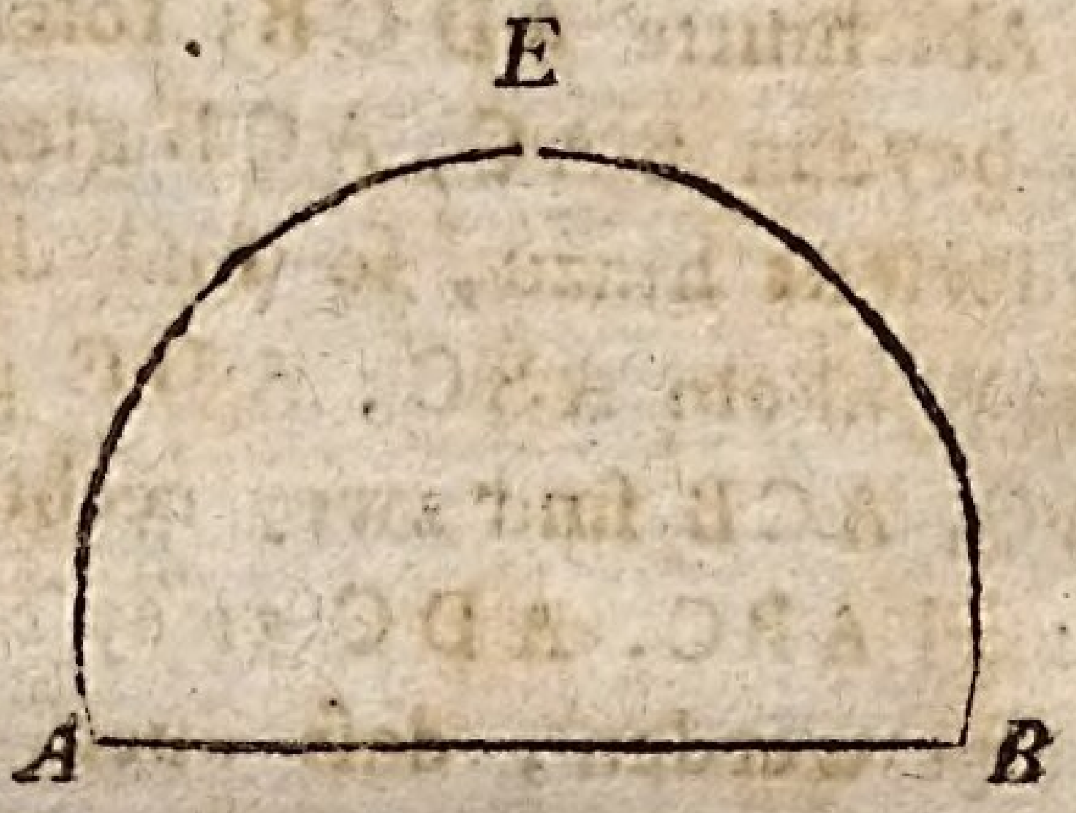
(3, 11. Erkl.) solche sind, welche gleiche Winkel einschliessen, so ist der Winkel *A* D B dem Winkel *A* C B, also der äussere dem innern gleich, welches (1, 16. S.) unmöglich ist.

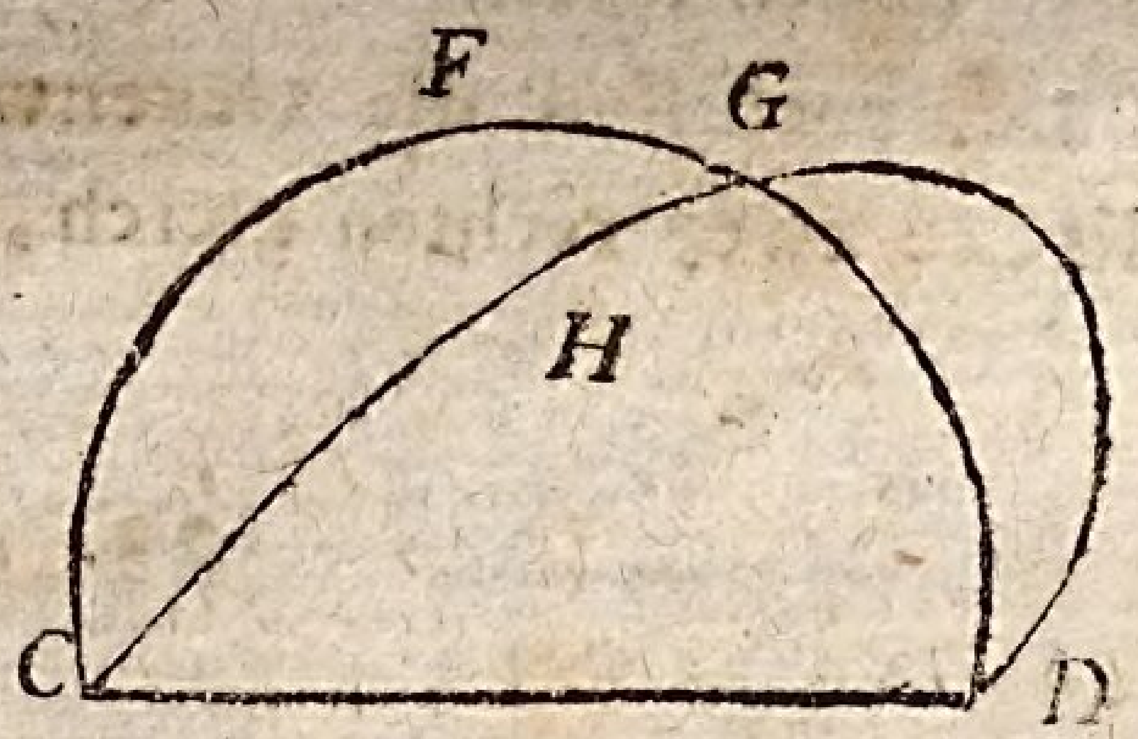
Folglich können auf einerley geraden Linie nicht zwey ähnliche und ungleiche Kreisabschnitte an einerley Seite beschrieben werden, w. z. e. w.

24. *Saz.*

Lehrsaz. Aehnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien sind einander gleich.

Es seyen über den gleichen geraden Linien A B, C D die ähnlichen Kreisabschnitte A E B, C F D, so behaupte ich, dass der Abschnitt *A* E B dem Abschnitte C F D gleich sey.





Beweis. Man bringe den Abschnitt *A* E B über den Abschnitt C F D, so, dass der Punkt A auf den Punkt C, und die Linie A *B* auf die Linie C D zu liegen komme, so wird, weil die A B der C D gleich ist, auch der Punkt B auf den Punkt D fallen. Wenn aber die gerade Linie A B die C D deckt, so wird auch der Abschnitt A E B den Abschnitt C F D decken. Denn wenn, da die gerade Linie A B die C D deckt, doch der Abschnitt A E B den Abschnitt C F D nicht deckte, sondern über denselben hervorragte, wie C H G D, so würde der Kreis C H G D den Kreis C F D in mehr als zwey Punkten, nämlich in den Punkten C, G, D schneiden. Nun schneidet aber ein Kreis einen andern (3, 10. S.) nicht in mehr als zwey Punkten; es ist also unmöglich, dass der Kreis C G D den Kreis C F D in den Punkten C, G, D schneide; und, folg-

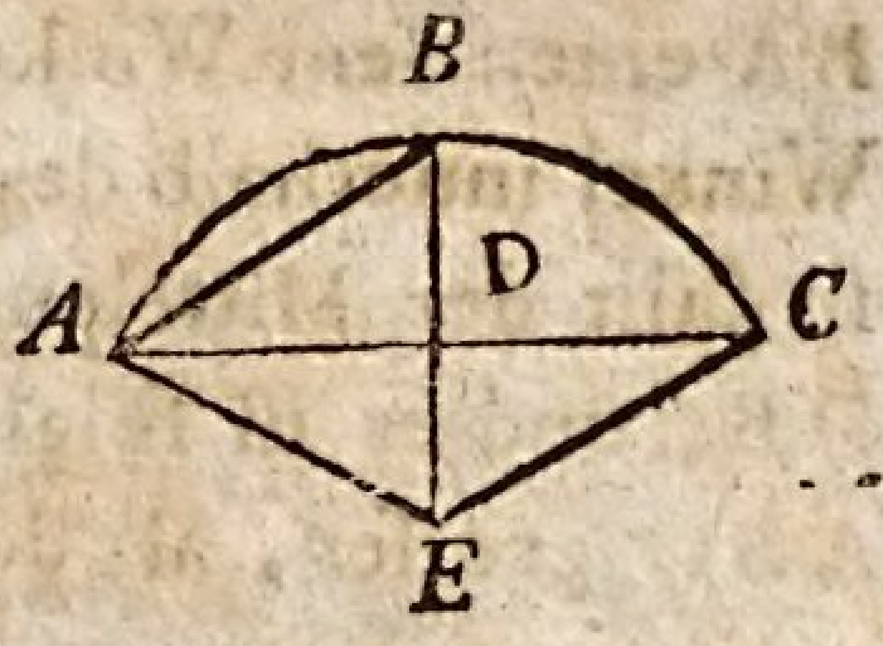
folglich ist es unmöglich, dass, wenn die Linie AB die CD deckt, doch der Abschnitt AEB den Abschnitt CFD nicht decken sollte. Er muss ihn also decken, und folglich ihm gleich seyn.

Demnach sind ähnliche Kreisabschnitte u. s. w. w. z. e. w.

25. Saz.

Aufgabe. Wenn ein Kreisabschnitt gegeben ist, den zugehörigen Kreis zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreisabschnitt ABC, und man soll den Kreis beschreiben, welcher dem Kreisabschnitte ABC zugehört.

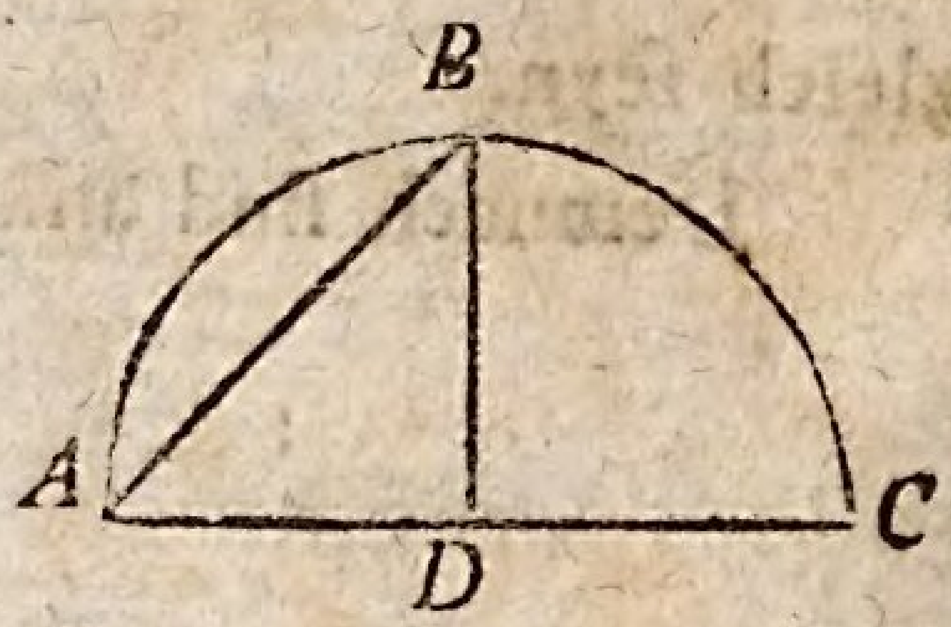


Auflösung und *Beweis.* Man halbire die Linie AC in dem Punkte D, errichte in dem Theilungspunkte die DB lothrecht auf der AC, und ziehe die AB, so ist der Winkel ABD entweder grösser, oder eben so gross, oder kleiner, als der Winkel BAD.

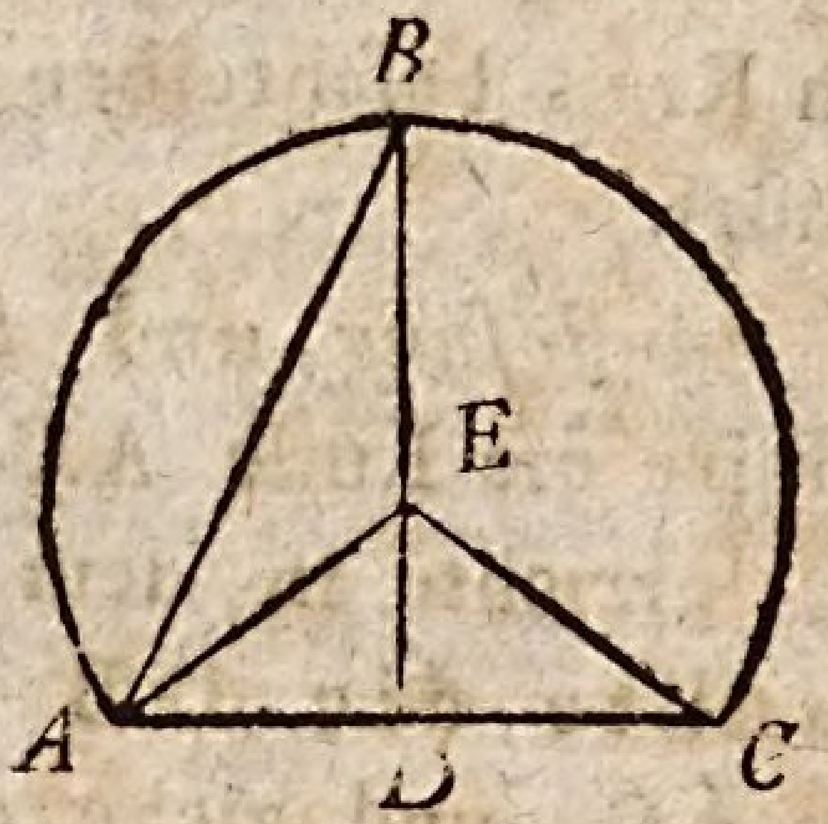
Er sey *erstlich* grösser, so seze man (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie BA den Winkel BAE, welcher dem Winkel ABD gleich sey, und ziehe die EC.

Da nun der Winkel ABE dem Winkel BAE gleich ist, so ist (1, 6. S.) auch die EB der AE gleich. Und da die AD der DC gleich, die DE aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AD, DE den beyden CD, DE stückweise gleich, auch ist der Winkel ADE dem Winkel CDE gleich, denn sie sind beyde rechte; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AE der Grundlinie CE gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass die AE der BE gleich sey; folglich ist auch die BE der CE gleich, und mithin sind die drey gerade Linien AE, EB, EC einander gleich. Demnach wird der aus dem Mittelpunkte E und mit der Weite einer von den drey Linien AE, EB, EC beschriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte gehen, und der dem gegebenen Abschnitte zugehörige Kreis seyn. Und so ist also der dem gegebenen Abschnitte zugehörige Kreis be-

beschrieben. Auch ist es offenbar, dass der Abschnitt ABC kleiner, als der Halbkreis, sey, weil der Mittelpunkt E ausserhalb desselben liegt.



Eben so kann nun, wenn der Winkel ABD dem Winkel BAD gleich ist, gezeigt werden, dass die AD jeder von den beyden BD, BC gleich sey, und mithin die drey Linien DA, DB, DC einander gleich seyen, wie auch dass D der Mittelpunkt des zu vollendenden Kreises, und mithin ABC ein Halbkreis sey.



Ist endlich der Winkel ABD kleiner, als der Winkel BAD, und man sezt an den Punkt A der Linie BA einen dem Winkel ABD gleichen Winkel innerhalb des Abschnitts ABC, so fällt der Mittelpunkt in die Linie DB, und es ist folglich der Abschnitt ABC grösser, als der Halbkreis.

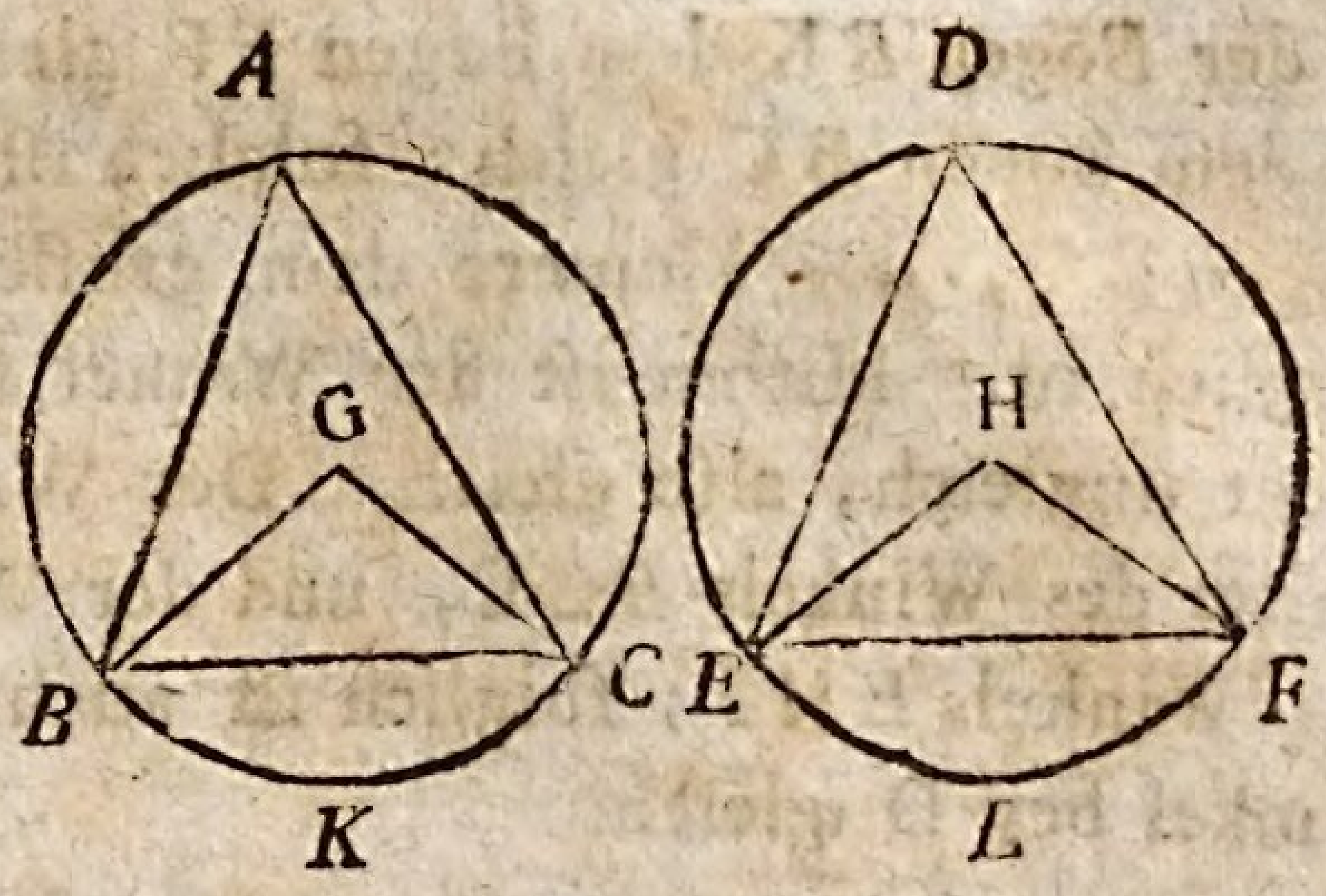
So ist demnach, wenn ein Kreisabschnitt gegeben worden, der demselben zugehörige Kreis beschrieben, w. z. v. w.

26. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel, es mögen Centriwinkel oder Peripheriewinkel seyn, auf gleichen Bogen.

Es seyen die Kreise ABC, DEF und in denselben Kreise die gleichen Centriwinkel BGC, EHF und die gleichen Periphewinkel BAC, EDF, so behaupte ich, dass der Bogen BKC dem Bogen ELF gleich sey.

Beweis. Man ziehe die BC, EF. Da nun die Kreise ABC, DEF gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich, und folglich sind die beyden BG, GC den beyden EH, HF gleich, auch ist der Winkel bey G dem Winkel bey H gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich. Und da der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich ist,



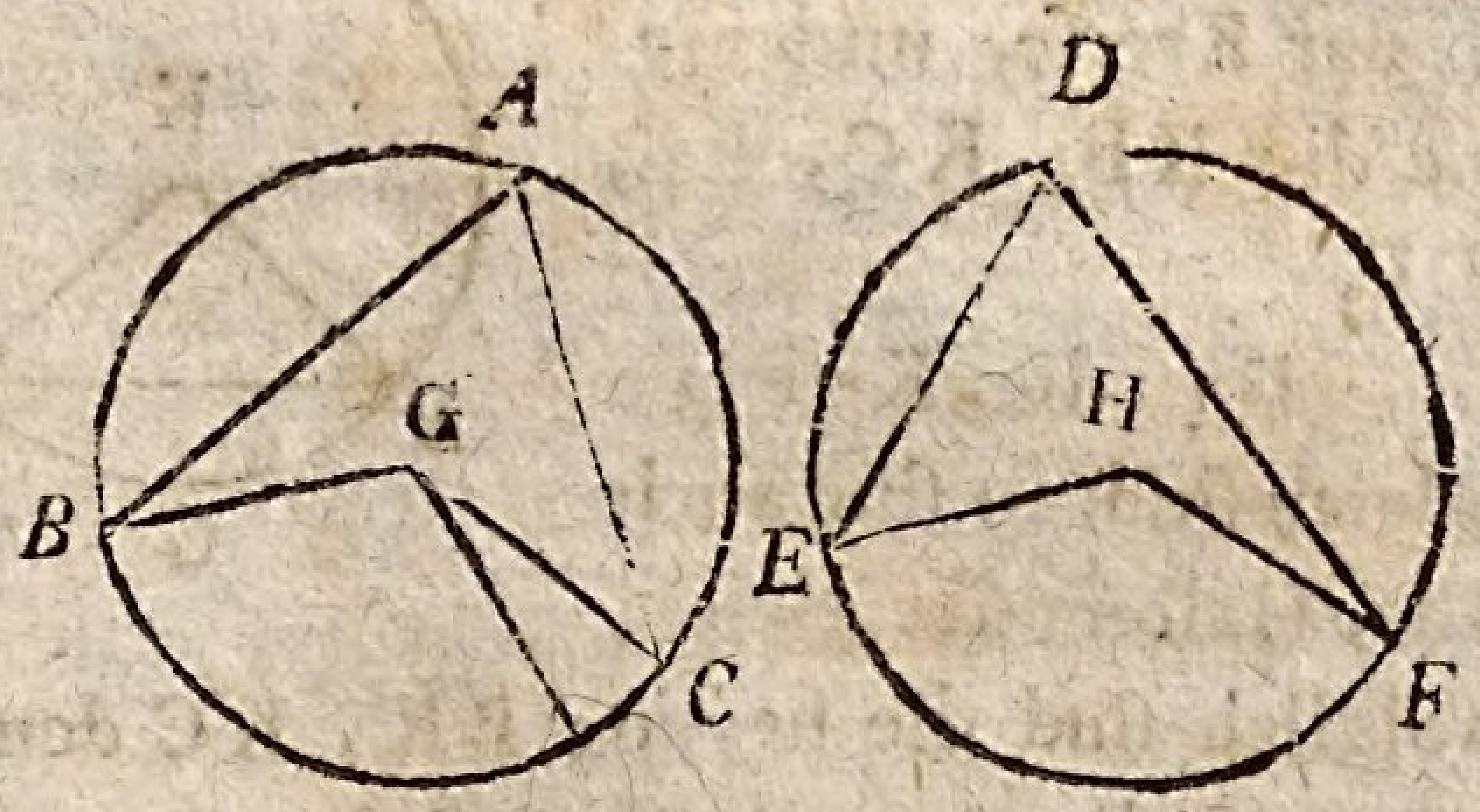
ist, so ist (3, 11. Erklär.) der Abschnitt BAC dem Abschnitte EDF ähnlich, auch sind sie über gleichen geraden Linien. Aber ähnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien sind (3, 24. S.) einander gleich; folglich ist der Abschnitt BAC dem Abschnitte EDF gleich. Es ist aber auch der ganze Kreis ABC dem ganzen Kreise EDF gleich; folglich ist auch der Rest BKC dem Reste ELF gleich.

Demnach stehen in gleichen Kreisen u. s. w. w. z. e. w.

27. *Saz.*

Aufgabe In gleichen Kreisen sind Winkel, die auf gleichen Bogen stehen, es mögen Centriwinkel oder Peripheriwinkel seyn, einander gleich.

In den gleichen Kreisen ABC, DEF stehen die Centriwinkel BGC, EHF auf gleichen Bogen BC, EF so behaupte ich, daſs der Winkel BGC dem Winkel EHF, und der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich sey.



Beweis. Wenn der Winkel BGC dem Winkel EHF gleich ist, so ist (3, 20. S.) auch der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich. Ist dies aber nicht, so ist einer von ihnen gröſser, als der andere. Es sey BCG der gröſsere; so setze man (1, 23. S.) an den Punkt G der Linie BG den Winkel BGK, welcher dem Winkel EHF gleich sey. Nun stehen gleiche Cintriwinkel (3, 26. S.) auf gleichen Bogen; folglich

ist

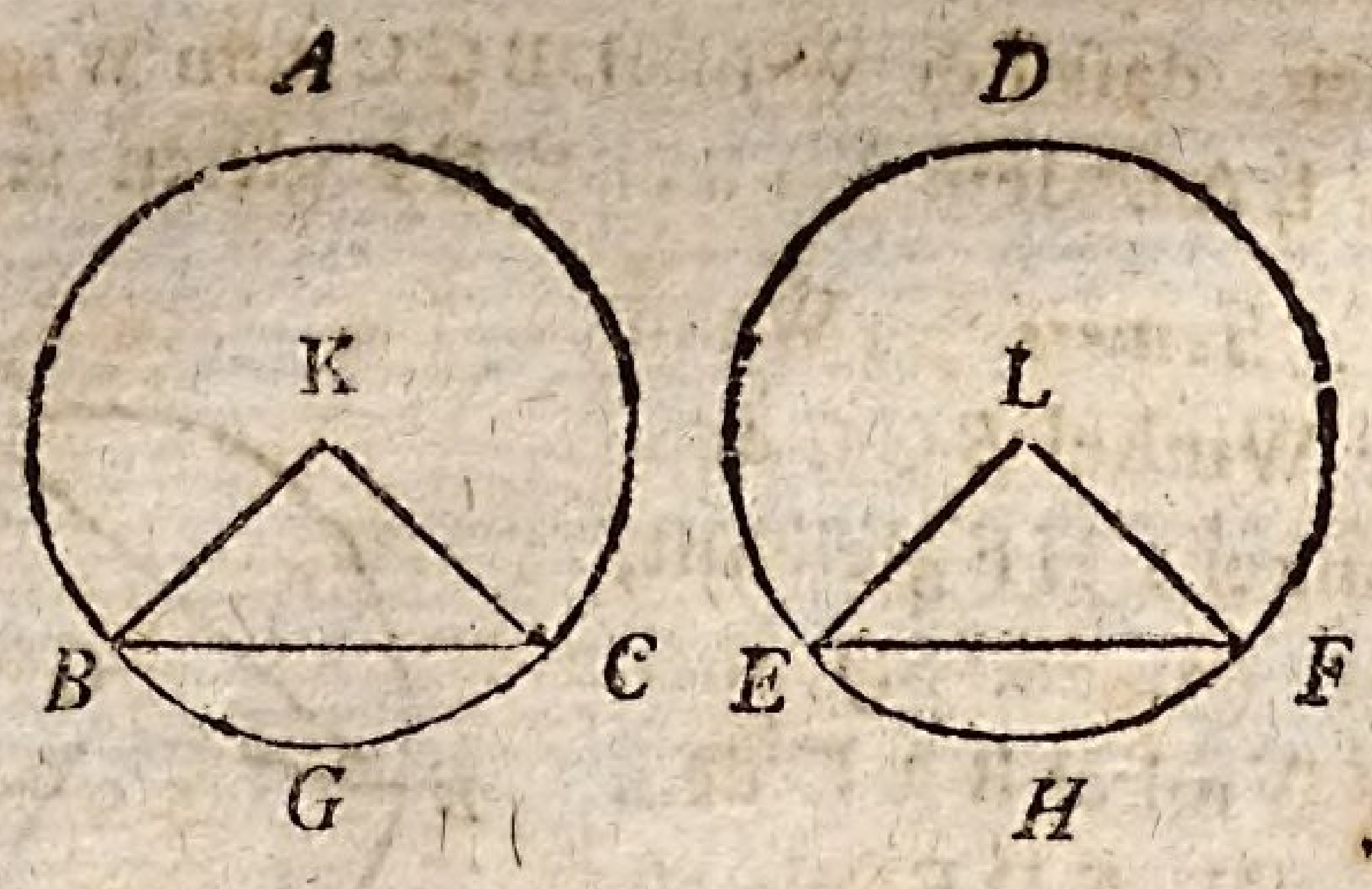
ist der Bogen *B* K dem Bogen E F gleich. Aber der Bogen E F ist dem Bogen B C gleich; folglich ist auch der Bogen B K dem Bogen B C, der kleinere dem gröſſern, gleich, welches unmöglich ist. Mithin ist der Winkel *B* G C dem Winkel E H F nicht ungleich, also gleich. Der Winkel bey A aber ist die Hälfte des Winkels *B* G C, und der Winkel bey D die Hälfte des Winkels E H F; folglich ist auch der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich.

Demnach sind in gleichen Kreisen u. s. w. w. z. e. w.

28. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kreisen schneiden gleiche gerade Linien gleiche Bogen ab; sie machen nämlich den gröſſern Bogen dem gröſſern und den kleinern Bogen dem kleinern gleich.

Es seyen die gleichen Kreise A B C, D E F und in denselben schneiden die gleichen geraden Linien B C, E F die gröſseren Bogen B A C, E D F und die kleinern B G C, E H F ab, so behaupte ich, daſs der gröſſere Bogen B A C dem gröſseren E D F, und der kleinere Bogen B G C dem kleinern E H F gleich sey.



Beweis. Man nehme die Mittelpunkte K, L der Kreise, und ziehe die K B, K C, E L, L F.

Da die Kreise gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich, folglich sind die beyden B K, K C den beyden E L, L F gleich, auch ist die Grundlinie B C der Grundlinie E F gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel B K C dem Winkel E L F gleich. Nun stehen (3, 26. S.) gleiche Centriwinkel auf gleichen Bogen; folglich ist der Bogen B C C dem Bogen E H F gleich. Es ist aber auch der ganze Kreis A B C dem ganzen

Kreise

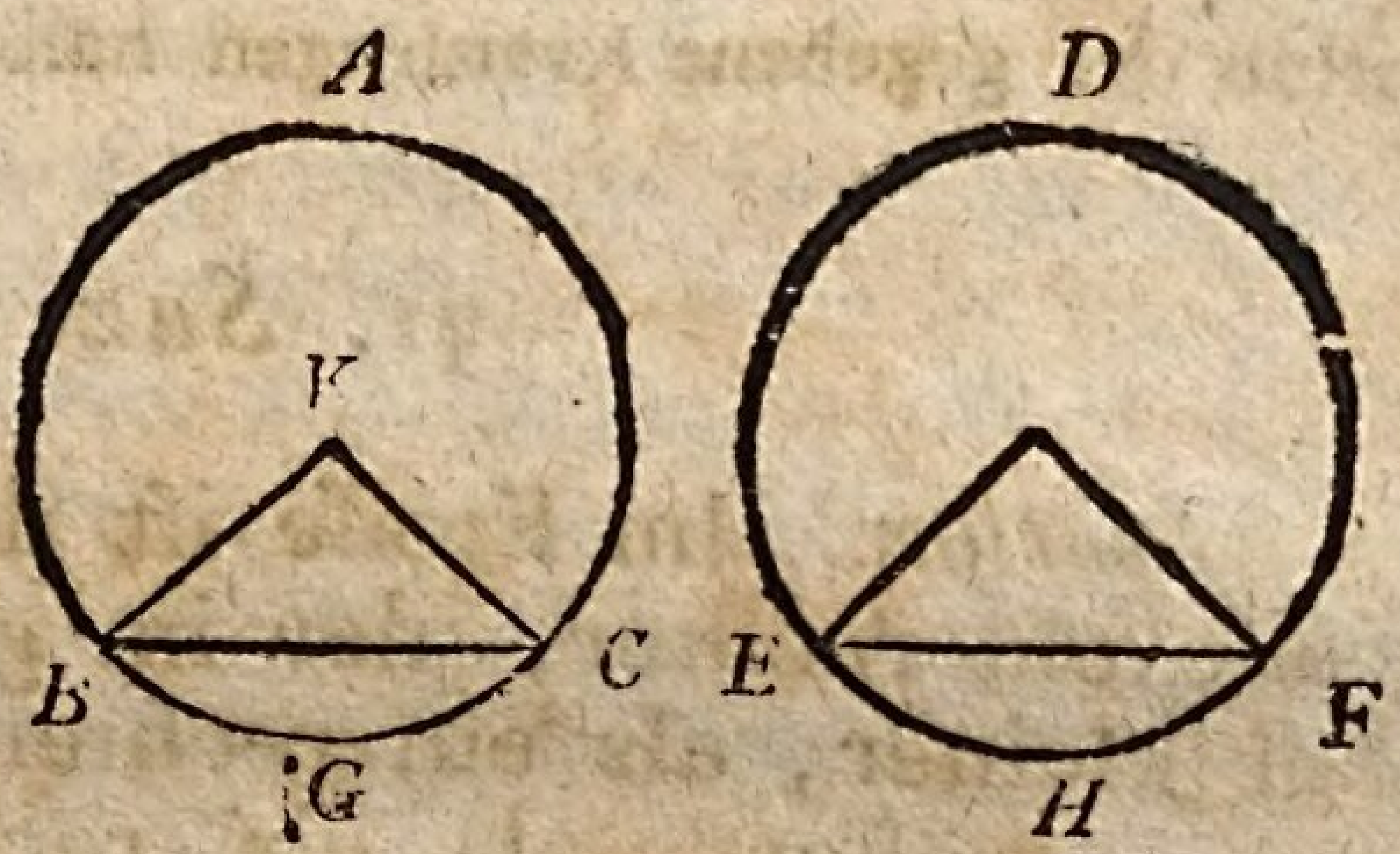
Kreise DEF gleich; folglich ist auch der übrige Bogen BAC dem übrigen Bogen EDF gleich.

Demnach schneiden in gleichen Kreisen u. s. w. w. z. e. w.

29. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kreisen sind die geraden Linien, welche gleiche Bogen abschneiden, einander gleich.

Es seyen die gleichen Kreise ABC, DEF und in denselben durch die geraden Linien BC, EF gleiche Bogen BGC, EHF abgeschnitten, so behaupte ich, dass die Linie BC der Linie EF gleich sey.



Beweis. Man nehme die Mittelpunkte K, L der Kreise, und ziehe die BK, KC, EL, LF.

Da nun der Bogen BGC dem Bogen EHF gleich ist, so ist (3. 27. S) auch der Winkel BKC dem Winkel ELF gleich, und da die Kreise ABC, DEF gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich; folglich sind die beyden BK, KC den beyden EL, LF gleich, auch schliessen sie gleiche Winkel ein; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich.

Demnach sind in gleichen Kreisen u. s. w. w. z. e. w.

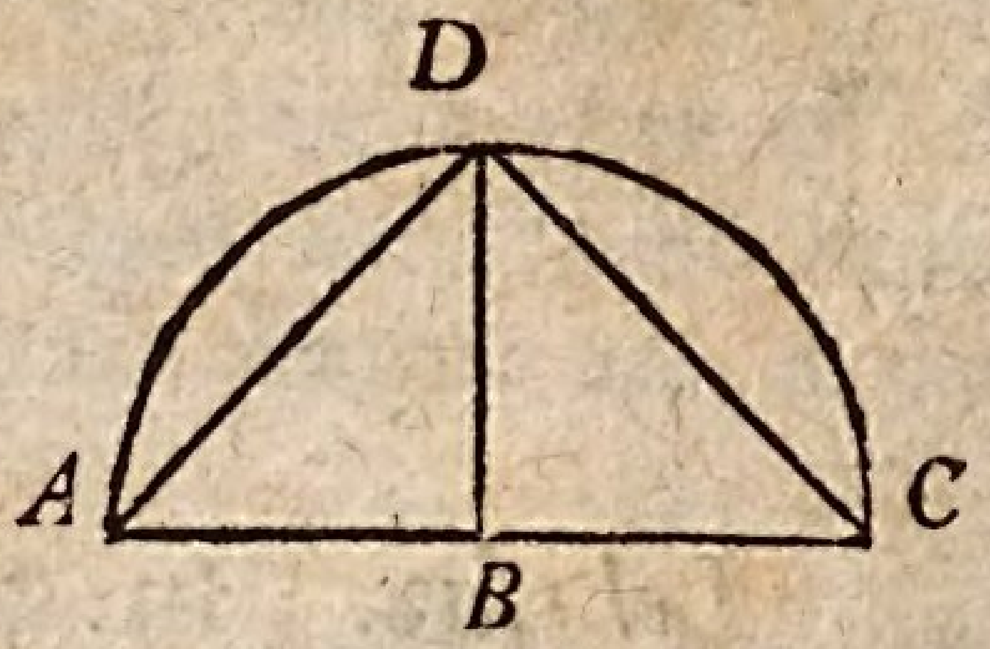
30. *Saz.*

Aufgabe. Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Es sey ADB der gegebene Kreisbogen, welcher halbiret werden soll.

Auflösung. Man ziehe die AB, halbire sie (1, 10. S.) in dem Punkte C, errichte (1, 11. S.) in eben diesem Punkte die CD lothrecht auf die AB, und ziehe die AD, DB.

Beweis. Da die AC der CB gleich, und die CD gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AC, CD den beyden BC, CD gleich, und der Winkel ABD, ist dem Winkel BCD gleich, denn es ist jeder ein rechter; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AD der Grundlinie DB gleich. Nun schneiden gerade Linien (3, 28. S.) gleiche Bogen ab, sie machen nämlich den grösseren Bogen dem grösseren, und den kleineren dem kleinern gleich; jeder von den Bogen AD, DB aber ist kleiner, als der Halbkreis; folglich ist der Bogen AD dem Bogen DB gleich, und mithin der gegebene Kreisbogen halbirt, w. z. v. w.



31. *Saz.*

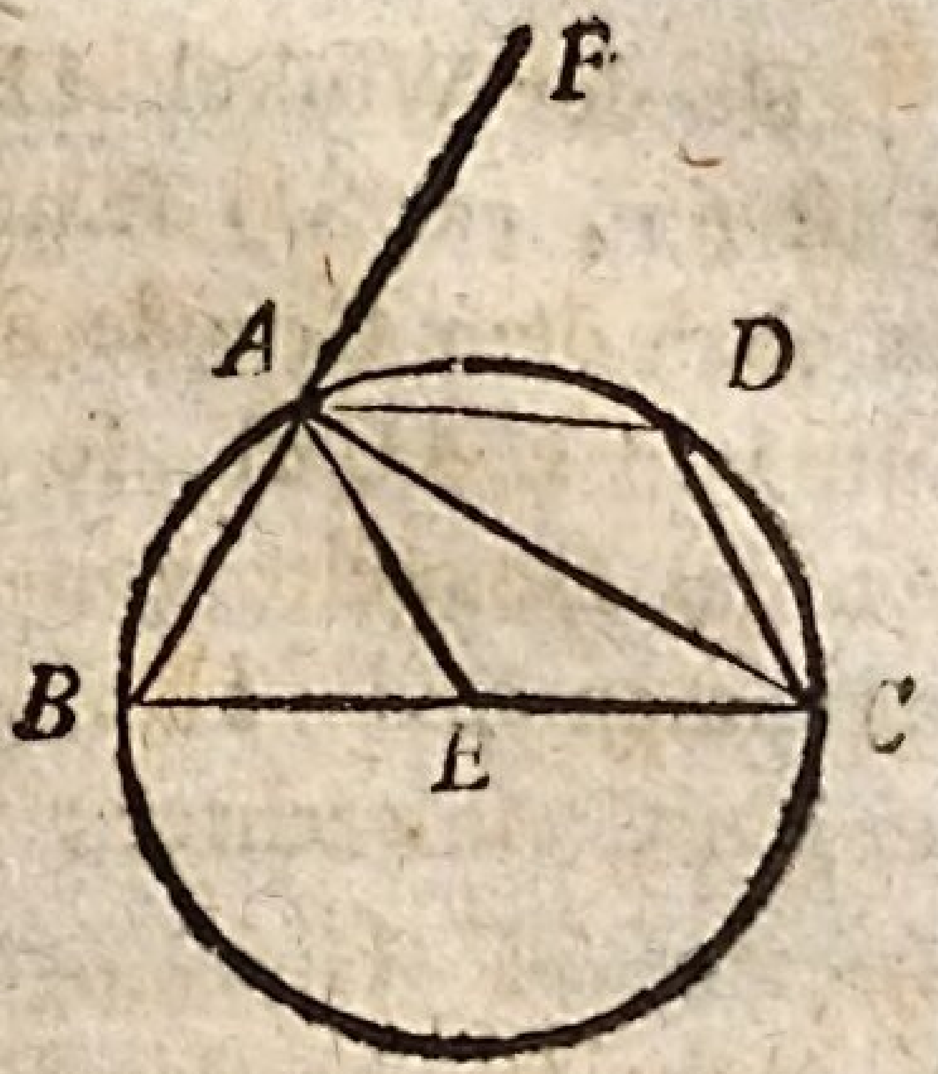
Lehrsaz. Im Kreise ist der Winkel im Halbkreise ein rechter, der im grösseren Abschnitte aber kleiner, als ein rechter, und der im kleinern, grösser, als ein rechter; auch ist der Winkel des grösseren Abschnitts grösser, als ein rechter, der Winkel des kleinern Abschnitts aber kleiner, als ein rechter.

Es sey der Kreis ABCD, dessen Durchmesser BC, sein Mittelpunkt E, und man ziehe die BA, AC, AD, DC, so behaupte ich, dass der Winkel im Halbkreise BAC ein rechter, der Winkel ABC aber in dem Abschnitte ABC, welcher grösser, als der Halbkreis, ist, kleiner, als ein rechter, und der Winkel in dem Abschnitte ADC, welcher kleiner, als der Halbkreis, ist, grösser, als ein rechter, sey.

Beweis. Man ziehe die AE, und verlängere die BA bis nach F.

Da nun die BE der EA gleich ist, so ist (1, 5. S.) auch der Winkel EAB dem Winkel EBA gleich. Da ferner die EA der EC gleich ist, so ist auch der Winkel ACE dem Winkel

kel CAE gleich, und folglich ist der ganze Winkel BAC den beyden Winkeln ABC, ACD gleich. Nun ist auch der Winkel FAC, als äusserer Winkel des Dreyecks ABC, (1, 32. S.) den beyden Winkeln ABC, ACB gleich; folglich ist auch der Winkel BAC dem Winkel FAC gleich, und mithin ist (1, 10. Erkl.) jeder von beyden ein rechter. Demnach ist also der Winkel BAC im Halbkreise BAC ein rechter. Und da die zwey Winkel ABC, BAC des des Dreyecks ABC (1, 17. S.) kleiner als zwey rechte sind, aber der Winkel BAC ein rechter ist, so ist der Winkel ABC kleiner, als ein rechter, und er ist in dem Abschnitte ABC, welcher grösser, als der Halbkreis, ist.



Da ferner ABCD eine vierseitige Figur im Kreise ist, und die Gegenwinkel einer vierseitigen Figur im Kreise (3, 23. S.) zwey rechten gleich sind, so sind die Winkel ABC, ADC zwey rechten Winkeln gleich, auch ist der Winkel ABC kleiner, als ein rechter; folglich ist der andere ADC grösser, als ein rechter, und dieser ist in dem Abschnitte ADC, welcher kleiner, als der Halbkreis, ist.

Ich behaupte ferner, dass der Winkel des grösseren Abschnitts, welcher von dem Bogen ABC und der geraden Linie AC eingeschlossen wird, grösser, als ein rechter, der Winkel des kleinern Abschnitts aber, welcher von dem Bogen ADC und der geraden Linie AC eingeschlossen wird, kleiner, als ein rechter, sey. Und dies ist für sich selbst klar; denn da der von den geraden Linien BA, AC eingeschlossene Winkel ein rechter ist, so ist der von dem Bogen ABC und der geraden Linie AC eingeschlossene grösser, als ein rechter. Da ferner der von den geraden Linien AC, AF eingeschlossene Winkel ein rechter ist, so ist der von der geraden Linie CA und dem Bogen ADC eingeschlossene Winkel kleiner, als ein rechter.

Demnach ist im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

Ein anderer Beweis, dass BAC ein rechter Winkel sey.

Da

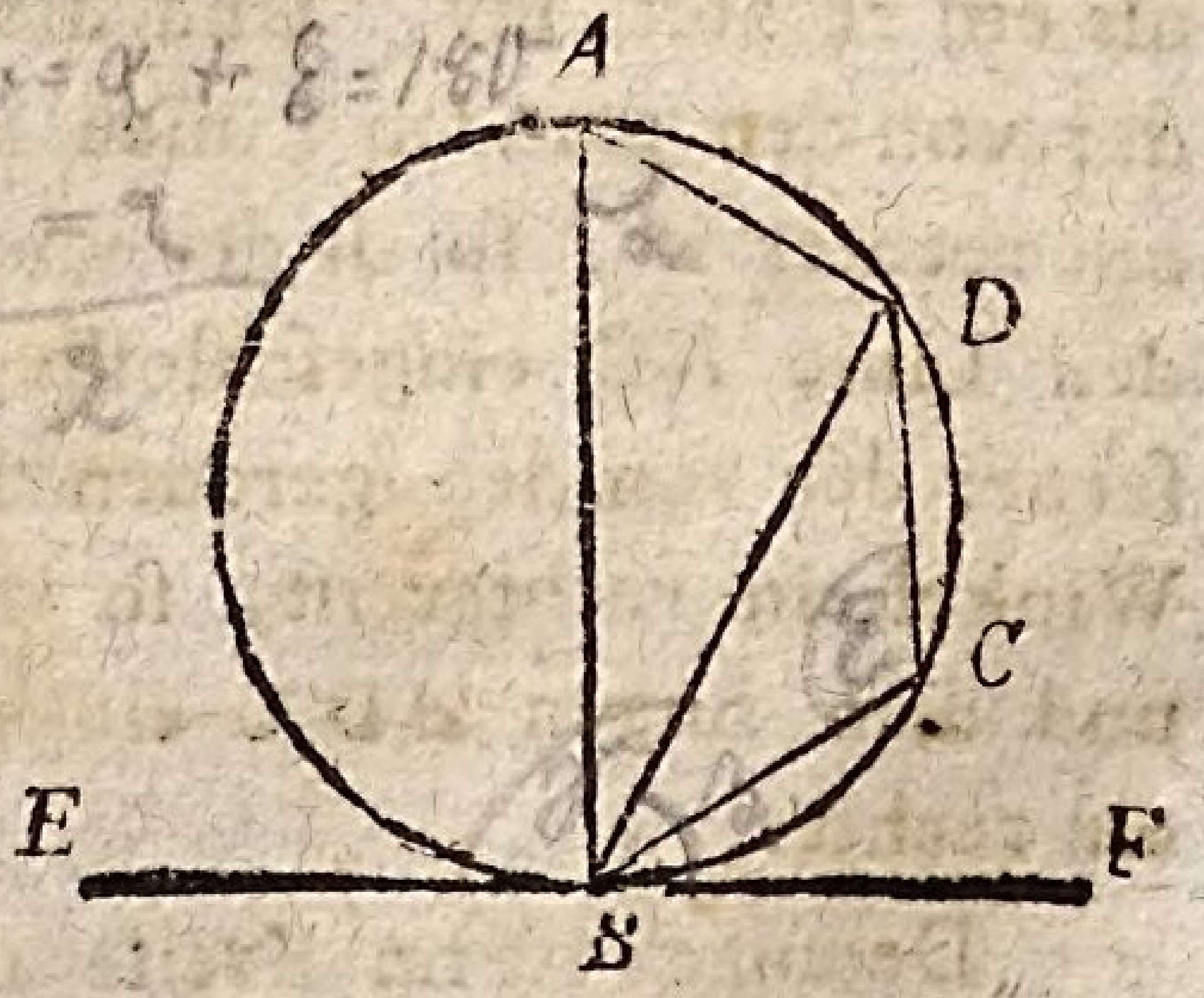
Da der Winkel *A* E C das Doppelte von B *A* E ist, denn er ist (1, 32. S.) seinen beyden innern Gegenwinkeln gleich, aus eben dem Grunde aber auch der Winkel *A* E B das Doppelte von E *A* C ist, so sind die Winkel *A* E *B*, *A* E C zusammen das Doppelte von B A C. Aber die Winkel *A* E B, *A* E C zusammen sind (1, 13. S.) zwey rechte; folglich ist der Winkel B A C ein rechter; w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn ein Winkel eines Dreyecks den beyden übrigen gleich ist, er ein rechter Winkel sey, weil alsdann auch sein Nebenwinkel diesen beyden gleich ist; Nebenwinkel aber die einander gleich sind, rechte sind.

32. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und von dem Berührungspunkte eine gerade Linie an den Kreis gehet, welche ihn schneidet, so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie macht, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich.

Es berühre den Kreis A B C D die gerade Linie E F in dem Punkte B, und von dem Punkte B gehe an den Kreis A B C D die Linie B D, welche ihn schneidet, so behaupte ich, dass die Winkel, welche die Linie B D mit der Tangente E F macht, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich seyen, das heisst, dass der Winkel F B D dem Winkel in dem Abschnitte B A D, der Winkel E *B* D aber dem Winkel in dem Abschnitte D C B gleich sey.



Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkte B auf der E F die B A lotrecht, nehme in dem Bogen B D nach Belieben einen Punkt C an, und ziehe *A* D, D C, C B.

Da die gerade Linie E F den Kreis *A* B C D in dem Punkte B berührt, und in dem Berührungspunkte *B* die

B A

BA auf der Tangente lothrecht aufgerichtet ist, so ist (3, 19. S.) in der Linie BA der Mittelpunkt des Kreises ABCD, folglich ist der Winkel ADB, als Winkel im Halbkreise, (3, 31. S.) ein rechter, und mithin sind die beyden übrigen BAD, ABD zu sammen einem rechten gleich. Es ist aber auch der Winkel ABF ein rechter, und folglich auch der Winkel ABF den Winkeln BAD, ABD gleich. Man nehme beyderseits den Winkel ABD weg, so ist der übrige Winkel DBF dem Winkel BAD in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich.

Da ferner ABCD eine vierseitige Figur im Kreise ist, so sind ihre Gegenwinkel (3, 22. S.) zwey rechten gleich; folglich die Winkel DBF, DBE (1, 13. S.) den Winkeln BAD, BCD gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel BAD dem Winkel DBF gleich sey; folglich ist auch der übrige Winkel DBE dem Winkel DCB in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich.

Wenn demnach eine gerade Linie den Kreis berührt, u. s. w. w. z. e. w.

33. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen Winkel fasst, welcher einem gegebenen geradlinigten Winkel gleich sey.

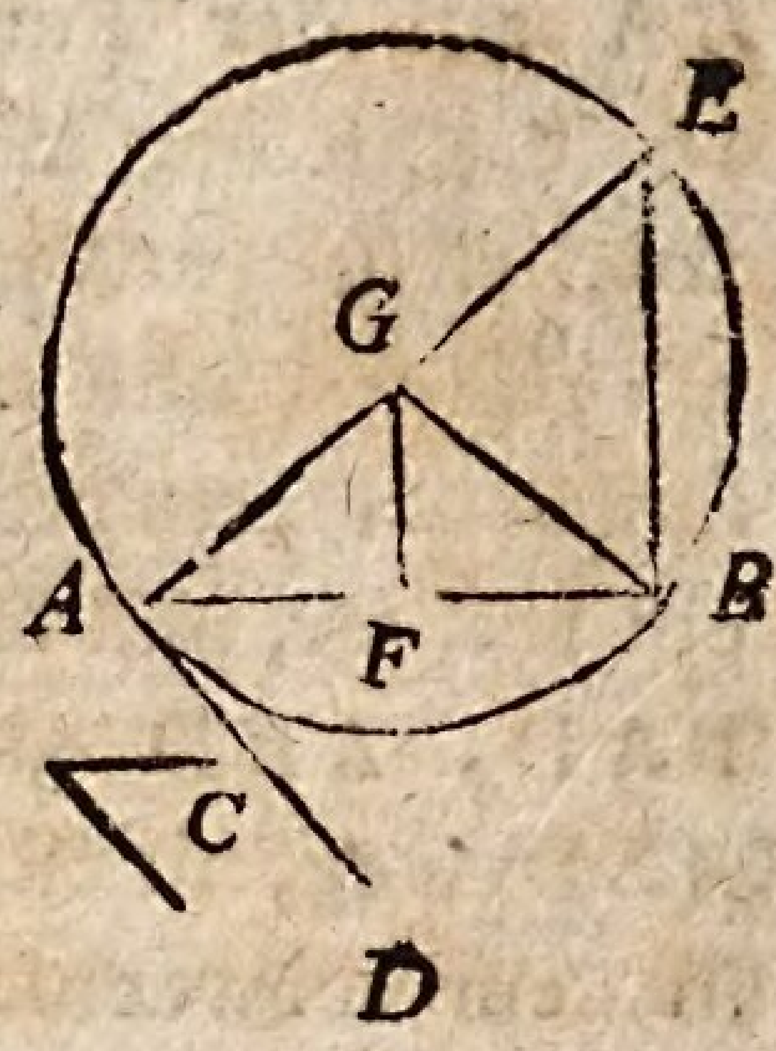
Es sey die gegebene gerade Linie AB, der gegebene geradlinigte Winkel C, und man soll auf der gegebenen geraden Linie AB einen Kreisabschnitt beschreiben, der einen Winkel fasst, welcher dem Winkel bey C gleich sey.



Auflösung. Der Winkel bey C ist entweder ein spizer, oder ein rechter oder ein stumpfer.

Er sey *erstlich* ein spizer, so seze man (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie AB den Winkel BAD, welcher dem Winkel C gleich sey. Es ist also uch BAD ein spizer Winkel. Nun

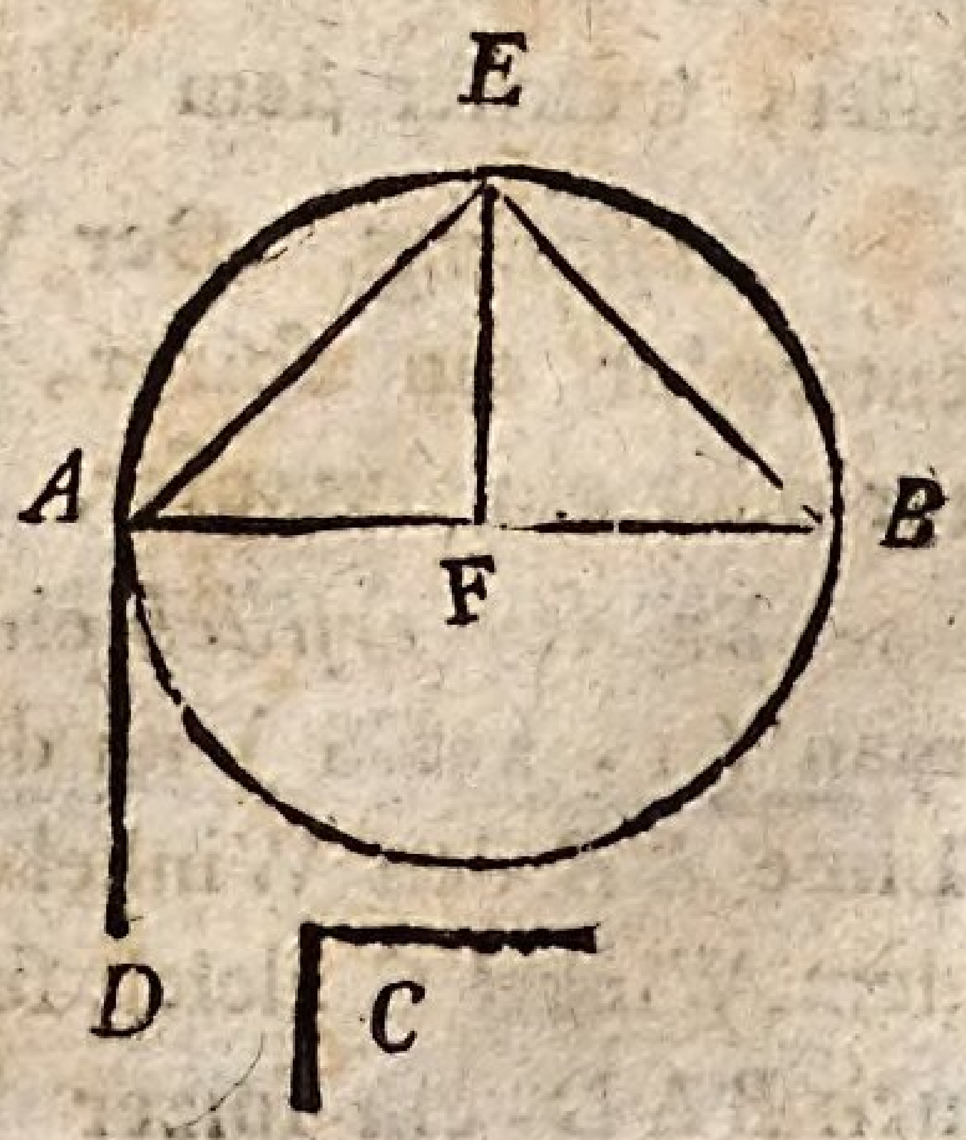
er-



errichte man (1, 11. S.) in dem Punkte *A* auf der *A*D die *A*E lothrecht, halbire die *A*B in dem Punkte F, errichte in eben diesem Punkte die F G auf der AB lothrecht, und ziehe die GB.

Beweis. Da die F B der AF gleich, und die FG gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AF, F G den beyden F*B*, FG gleich, auch ist der Winkel AFG dem Winkel GF*B* gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AG der Grundlinie BG gleich, und mithin gehet der aus dem Mittelpunkte G mit der Weite *A*G beschriebene Kreis durch den Punkt B. Man beschreibe ihn also, und er sey *A*BE, hierauf ziehe man die *B*E. Da nun die *A*D in dem Punkte A des Durchmessers *A*E, auf dem Durchmesser lothrecht stehet, so ist *A*D (3, 16. S.) eine Tangente des Kreises, und da die gerade Linie *A*D den Kreis A*B*E berührt, und von dem Berührungspunkte *A* die gerade Linie *A B* an den Kreis *A*BE gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel DA*B* dem Winkel *A*E*B* in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich. *A*ber der Winkel D*A*B ist dem Winkel bey C gleich, folglich ist auch der Winkel bey C dem Winkel *A*EB gleich; und es ist also auf der gegebenen geraden Linie *A*B ein Kreisabschnitt *A*EB beschrieben worden, welcher einen Winkel *A*EB fasst, der dem gegebenen Winkel bey C gleich ist.

Nun sey *zweytens* der gegebene Winkel ein rechter, und man soll wiederum auf *A*B einen Kreisabschnitt beschreiben, welcher einen Winkel fasst, der dem gegebenen rechten Winkel bey C gleich sey.

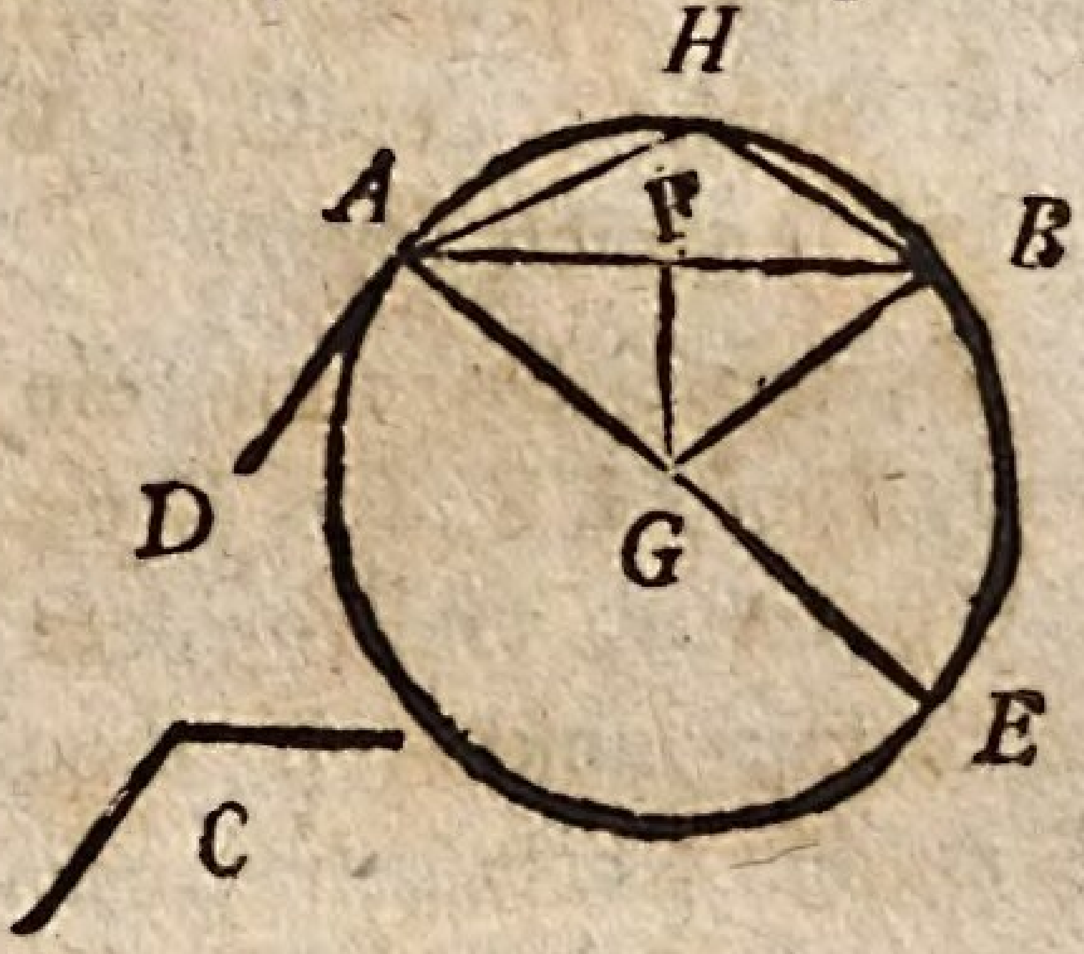


Auflösung und *Beweis.* Man setze wiederum an den Punkt *A* der Linie *A*B einen Winkel B*A*D, der dem rechten Winkel bey C gleich sey, hierauf halbire man (1, 10. S.) die AB in dem Punkte F, und beschreibe aus dem Mittelpunkte F mit der Weite F*A* oder FB den Kreis *A*BE, so ist (3, 16. S.) die gerade Linie *A*D eine Tangente des Kreises ABE,

weil

weil der Winkel bey *A* ein rechter ist. Auch ist der Winkel B*A*D dem Winkel in dem Abschnitte *A*EB gleich, denn auch dieser ist, (3, 31. S.) als Winkel im Halbkreise, ein rechter. Aber der Winkel BAD ist dem Winkel bey C gleich; folglich ist wiederum auf der geraden Linie AB ein Kreisabschnitt *A*EB beschrieben worden, welcher einen Winkel fasst, der dem Winkel bey C gleich ist.

Endlich sey *drittens* der Winkel bey C ein stumpfer.



Auflösung und *Beweis*. Man seze an den Punkt *A* der geraden Linie *A*B einen dem Winkel bey C gleichen Winkel B*A*D, hierauf errichte man in dem Punkte *A* die *A*E auf die *A*D lothrecht, halbire wiederum die *A*B in dem Punkte F, errichte auf der *A*B in F die FG lothrecht, und ziehe die GB. Da nun wiederum die *A*F der FB gleich, und FG gemeinschaftlich ist, so sind die beyden *A*F, FG den beyden BF, FG gleich, auch ist der Winkel *A*FG dem Winkel BFG gleich, folglich ist auch (1, 4. S.) die Grundlinie *A*G der Grundlinie BG gleich, und mithin gehet der aus dem Mittelpunkte G und mit der Weite *A*G beschriebene Kreis auch durch den Punkt B. Er gehe also durch, wie *A*EB. Da nun die *A*D auf dem Endpunkte *A* des Durchmessers *A*E lothrecht stehet, so berührt die *A*D (3, 16. S.) den Kreis *A*EB, und da von dem Berührungspunkte *A* die gerade Linie *A*B an den Kreis gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel BAD dem Winkel in dem verwechselten Kreisabschnitte *A*HB gleich; aber der Winkel B*A*D ist dem Winkel bey C gleich; Folglich ist auch der Winkel in dem Abschnitte *A*HB dem Winkel bey C gleich; und es ist also auf der gegebenen geraden Linie AB ein Kreisabschnitt AHB beschrieben worden, welcher einen Winkel fasst, der dem Winkel bey C gleich ist, w. z. v. w.

34. *Saz.*

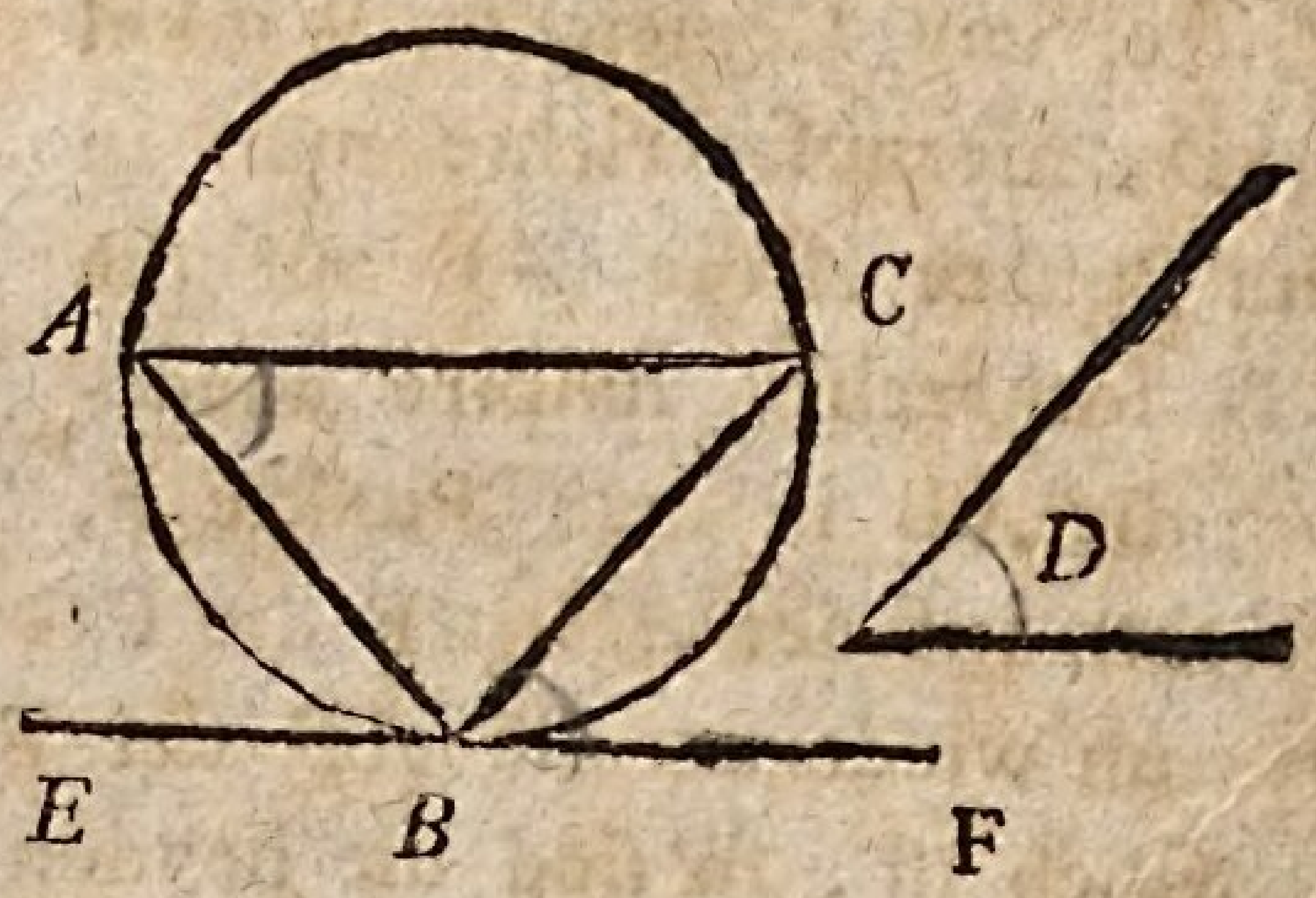
Aufgabe. Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, der einen Winkel

fasst,

fasst, welcher einem gegebenen geradlinigten Winkel gleich sey.

Es sey der gegebene Kreis *A* B C, der gegebene geradlinigte Winkel D, und man soll von dem Kreise A B C einen Abschnitt abschneiden, welcher einen Winkel fasst, der dem Winkel bey D gleich sey.

Auflösung. Man ziehe (3, 17. S.) an einen Punkt B des Kreises A B C die Tangente E F, und seze (1, 23. S.) an den Punkt B der Linie E F den Winkel F B C, welcher dem Winkel D gleich sey.



Beweis. Da nun die gerade Linie E F den Kreis A B C berührt, und von dem Berührungspunkte B die B C an den Kreis gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel F B C dem Winkel in dem verwechselten Kreisabschnitte B A *C* gleich. Aber der Winkel F B C ist dem Winkel bey D gleich; folglich ist auch der Winkel in dem Abschnitte B A C, dem Winkel bey D gleich. So ist also von dem gegebenen Kreise A B *C* ein Abschnitt B A C abgeschnitten worden, welcher einen Winkel fasst, der dem gegebenen geradlinigten Winkel bey D gleich ist, w. z. v. w.

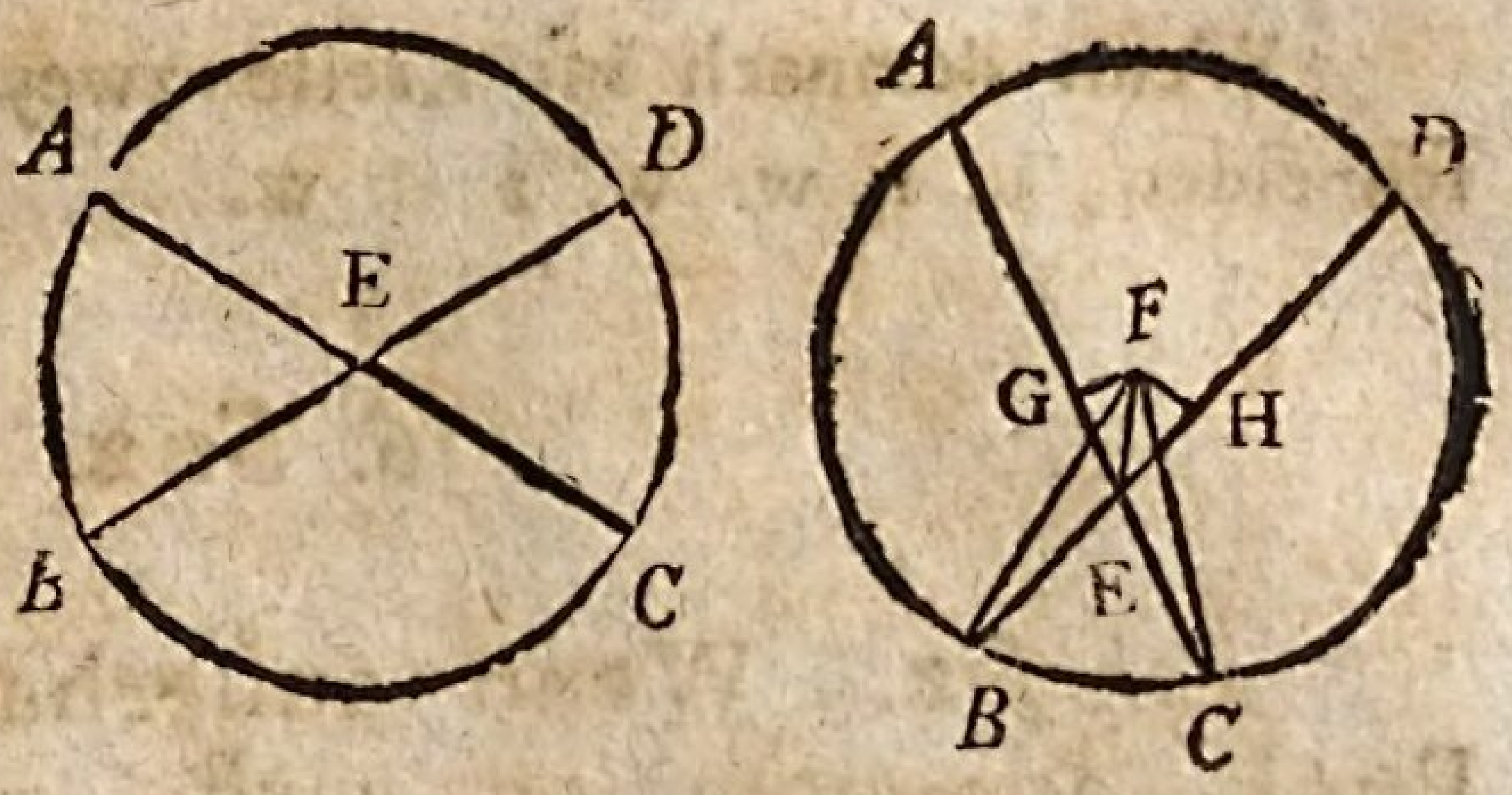
35. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn im Kreise zwey gerade Linien einander schneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen dem Rechtecke aus den Abschnitten der andern gleich.

In dem Kreise A B C D schneiden die geraden Linien A C, *B* D einander in dem Punkte E, so behaupte ich, dass das Rechteck aus A E, E C dem Rechtecke aus D E, E B gleich sey.

Beweis. Wenn die gerade Linien A C, B D Durchmesser sind, dass also E der Mittelpunkt des Kreises A B C D ist, so ist

ist offenbar, dafs, da die Linien *A*E, EC, DE, EB einander gleich sind, auch das Rechteck aus AE, EC dem Rechtecke aus DE, E*B* gleich sey.



Die Linien AC, DB sollen also nicht durch den Mittelpunkt gehen, so nehme man (3, 1. S.) den Mittelpunkt des Kreises ABCD, und dieser sey F, hierauf fälle man (1, 12. S.) aus dem Mittelpunkte F auf die geraden Linien AC, DB die Lothe FG, FH, und ziehe die FB, FC, FE.

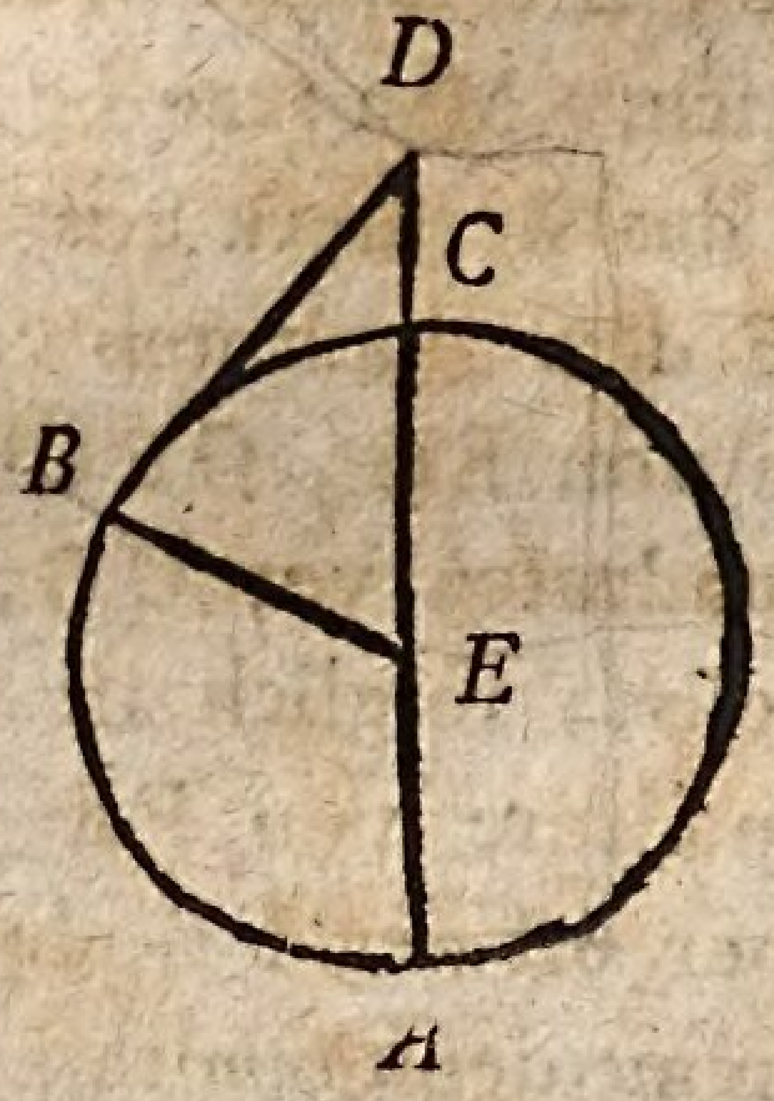
Da nun die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie F*G* die nicht durch den Mittelpunkt gehende AC lothrecht schneidet, so halbirt sie (3, 3. S.) dieselbige auch, und es ist also die AG der GC gleich. Da nun ferner die gerade Linie AC in dem Punkte G in gleiche, in dem Punkte E aber in ungleiche Theile getheilt ist, so ist (2, 5. S.) das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von EG dem Quadrate von GC gleich. Man seze beyderseits das Quadrat von GF hinzu, so ist das Rechteck aus AE, EC sammt den Quadraten von GE, GF den Quadraten von CG, GF gleich. *A*ber den Quadraten von EG, GF ist (1, 47. S.) das Quadrat von FE, den Quadraten von CG, GF hingegen ist das Quadrat von FC gleich; folglich ist das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von FE dem Quadrate von FC gleich. Die FC aber ist der FB gleich; folglich ist das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von EF dem Quadrate von F*B* gleich. Aus eben den Gründen aber ist auch das Rechteck aus DE, EB sammt dem Quadrate von FE dem Quadrate von FB gleich. Es ist aber gezeigt worden, dafs auch das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von FE dem Quadrate FB gleich sey; folglich ist auch das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von FE dem Recktecke aus DE, EB sammt dem Quadrate von FE gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von FE hinweg, so ist das Rechteck aus AE, EC dem Rechtecke aus DE, EB gleich.

Wenn demnach im *Kreise* zwey gerade Linien einander schneiden, u. s. w. w. z. e. w.

36. *Saz.*

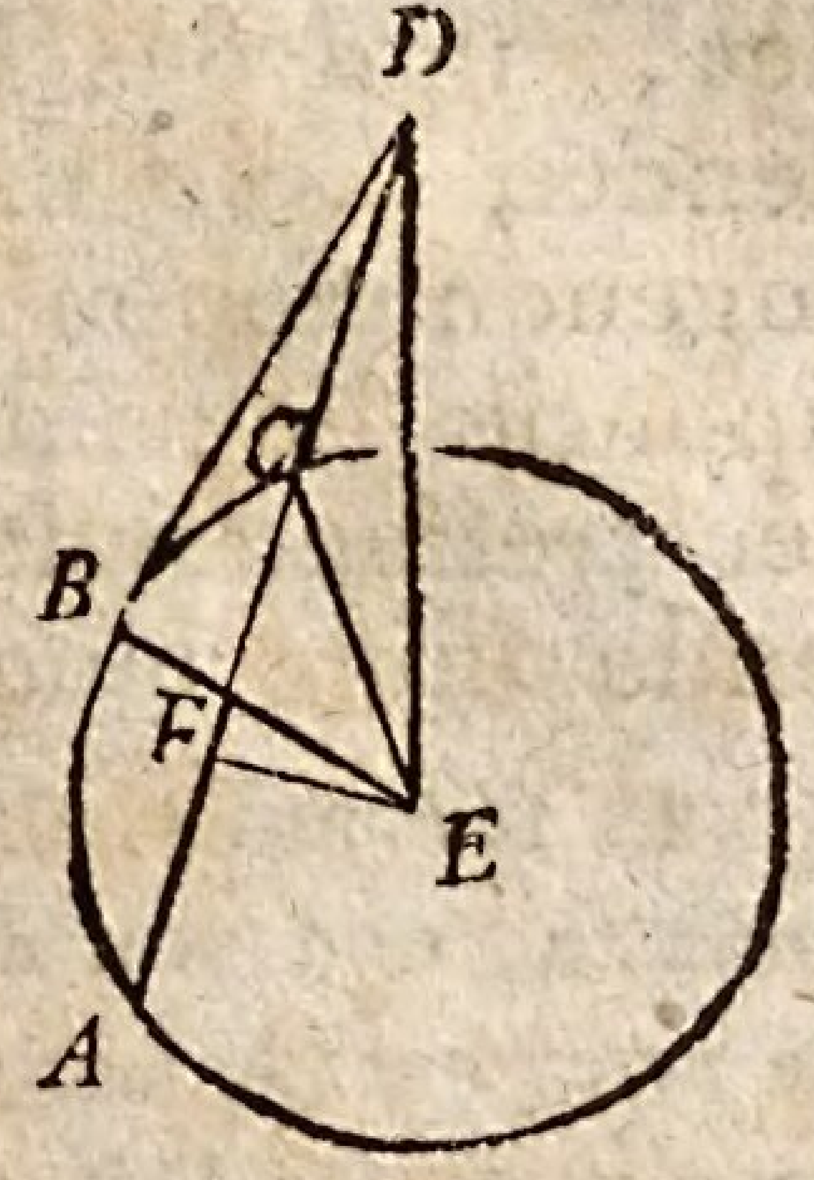
Lehrsaz. Wenn ausserhalb des Kreises ein Punkt angenommen wird, und es gehen von demselben zwey gerade Linien an den Kreis, wovon die eine ihn schneidet, die andere aber ihn berührt, so ist das Rechteck aus der ganzen schneidenden Linie und ihrem ausserhalb zwischen dem angenommenen Punkte und der erhabenen Peripherie des Kreises liegenden Abschnitte dem Quadrate der berührenden Linie gleich.

Man nehme ausserhalb des Kreises ABC einen Punkt D an, und von dem Punkte D gehen an den Kreis ABC zwey gerade Linien DC*A*, DB, wovon die DC*A* den Kreis ABC schneide, die DB aber ihn berühre, so behaupte ich, daſs das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von DB gleich sey.



Beweis. Die Linie DCA gehet entweder durch den Mittelpunkt, oder nicht. Sie gehe zuerst durch den Mittelpunkt des Kreises, und dieser sey E, alsdann ziehe man die Linie EB, so ist (3, 18. S.) E*B*D ein rechter Winkel. Und da die gerade Linie AC in dem Punkte E halbirt und ihr die CD angesezt ist, so ist (2, 6. S.) das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EC dem Quadrate von ED gleich. Es ist aber die EC der EB gleich; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EB dem Quadrate von DE gleich. Nun ist aber (1, 47. S.) das Quadrat von DE den Quadraten von DB, BE gleich, denn der Winkel EBD ist ein rechter; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EB den Quadraten von DB, BE gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von EB weg, so ist das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate der berührenden Linie DB gleich.

Aber



Aber die DCA gehe nun nicht durch den Mittelpunkt des Kreises ABC, so nehme man den Mittelpunkt desselben, und er sey E, hierauf fälle man (1, 12. S.) von E auf die AC die EF lothrecht, und ziehe die EB, EC, ED. Nun ist EFD ein rechter Winkel; und da die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF die nicht durch den Mittelpunkt gehende AC lothrecht schneidet, so halbirt sie (3, 3. S.) dieselbige auch, und es ist folglich die AF der FC gleich. Da ferner die Linie AC in dem Punkte F halbirt, und ihr die CD angesezt ist, so ist (2, 6. S.) das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von FC dem Quadrate von FD gleich. Man seze beyderseits das Quadrat von EF hinzu, so ist das Rechteck aus AD, DC sammt den Quadraten von FC, EF den Quadraten von FD, FE gleich. Aber den Quadraten von DF, FE ist (1, 47. S.) das Quadrat von DE gleich, denn der Winkel EFD ist ein rechter, den Quadraten von CF, FE hingegen ist das Quadrat von CE gleich; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von CE dem Quadrate von ED gleich. Es ist aber die EC der EB gleich; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EB dem Quadrate von ED gleich. Dem Quadrate von ED aber sind (1, 47. S.) die Quadrate von EB, BD gleich, denn der Winkel EBD ist ein rechter; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EB den Quadraten von EB, BD gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von EB hinweg, so ist folglich das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von BD gleich.

Wenn demnach ausserhalb des Kreises u. s. w. w. z. e. w.

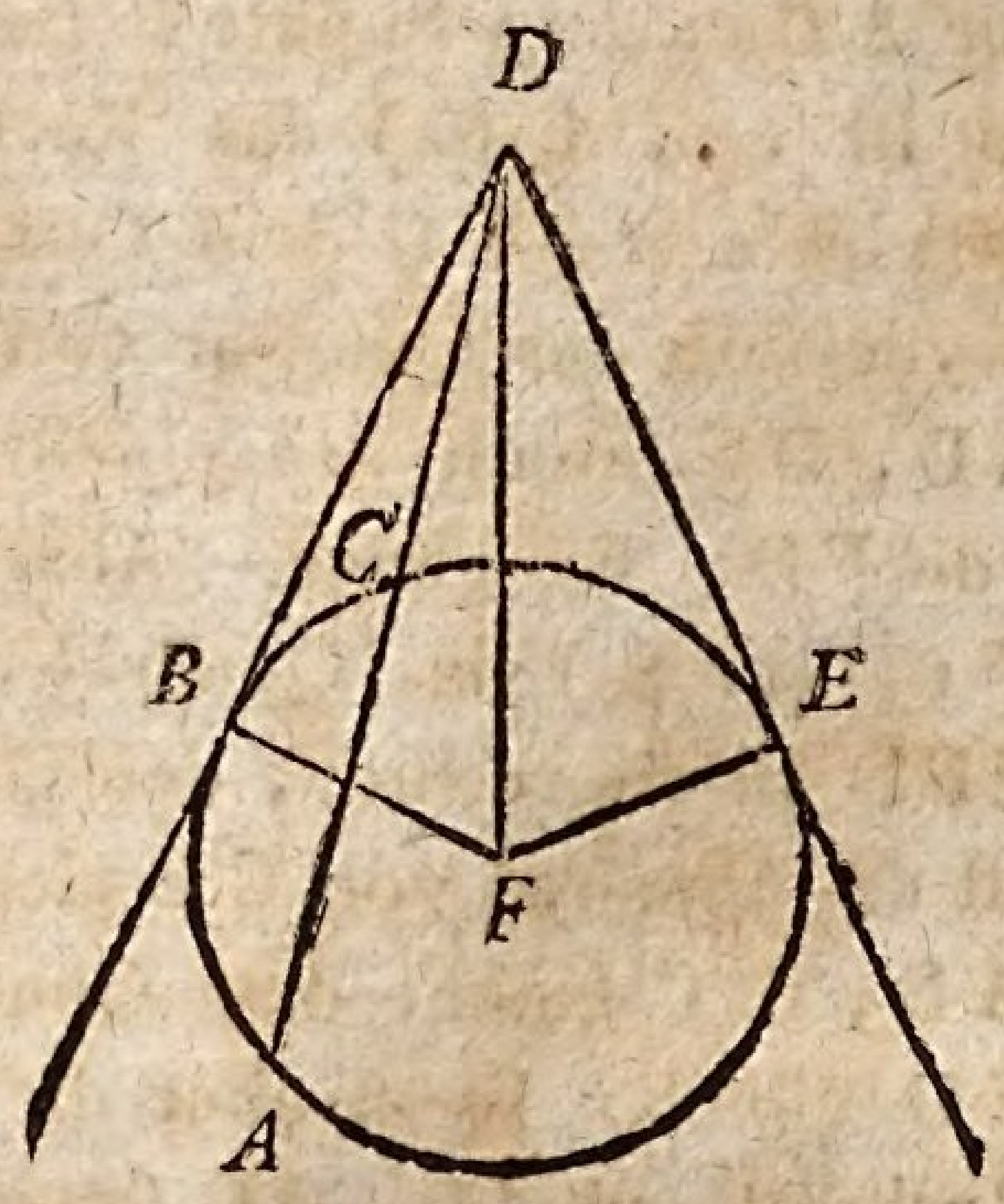
37. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ausserhalb des Kreises ein Punkt angenommen wird, und es gehen von demselben zwey gerade Linien an den Kreis, wovon die eine ihn trift, die andere ihn schneidet,

det, und das Rechteck aus der ganzen ſchneidenden Linie und ihrem auſſerhalb zwiſchen dem angenommenen Punkte und der erhabenen Peripherie liegenden Abſchnitte iſt dem Quadrate der treffendenden Linie gleich, ſo iſt die treffende Linie eine Tangente des Kreiſes.

Es ſey auſſerhalb des Kreiſes A B C der Punkt D angenommen, und von dem Punkte D gehen an den Kreis A B C die zwey gerade Linien D C A, D B und die D C A ſchneide den Kreis, die D B aber treffe ihn, und es ſey das Rechteck aus A D, D C dem Quadrate von D B gleich, ſo behaupte ich, daſs die D B den Kreis A B C berühre.

Beweis. Man ziehe (3, 17. S.) die Tangente D E an den Kreis A B C, nehme deſſen Mittelpunkt F, und ziehe die Linien F E, F B, F D ſo iſt (3, 18. S.) der Winkel F E D, ein rechter.



Da nun die D E den Kreis A B C berührt, die D C A aber ihn ſchneidet, ſo iſt (3, 36. S.) das Rechteck aus A D, D C dem Quadrate von D E gleich. Es iſt aber angenommen, daſs das Rechteck aus A D, D C dem Quadrate von D B gleich ſey; folglich iſt das Quadrat von D E dem Quadrate von D B, und mithin auch die D E der D B gleich. Es iſt aber auch die F E der F B gleich; folglich ſind die beyden D E, E F den beyden D B, B F gleich. Auch iſt die Grundlinie F D beyden Dreyecken gemeinſchaftlich; folglich iſt (1, 8. S.) auch der Winkel D E F dem Winkel D B F gleich. Der Winkel D E F aber iſt ein rechter; folglich iſt auch der Winkel D B F ein rechter, und die F B iſt, wenn ſie verlängert wird, ein Durchmeſſer. Aber eine auf dem Endpunkte des Durchmeſſers lothrecht ſtehende Linie berührt (3, 16. S.) den Kreis; folglich berührt die D B den Kreis A B C. Eben ſo kann dieſes erwieſen werden, wenn der Mittelpunkt in der Linie A C liegt.

Wenn demnach auſſerhalb des Kreiſes u. ſ. w. w. z. e. w.

EUKLIDS ELEMENTE.

VIERTES BUCH.

Erklärungen.

1. Eine geradlinigte Figur heiſst *in eine andere geradlinigte Figur beſchrieben*, wenn jeder Winkel der einbeſchriebenen eine von den Seiten derjenigen, in welche ſie beſchrieben iſt, berührt.

2. Eine geradlinigte Figur heiſst *um eine andere geradlinigte Figur beſchrieben*, wenn jede Seite der umſchriebenen einen von den Winkeln derjenigen, um welche ſie beſchrieben iſt, berührt.

3. Eine geradlinigte Figur heiſst *in einen Kreis beſchrieben*, wenn jeder Winkel der einbeſchriebenen Figur die Peripherie des Kreiſes berührt.

4. Eine geradlinigte Figur heiſst *um einen Kreis beſchrieben*, wenn jede Seite der umſchriebenen Figur, die Peripherie des Kreiſes berührt.

5. Ein Kreis heiſst *in eine geradlinigte Figur beſchrieben*, wenn die Peripherie des Kreiſes jede Seite der Figur, in welche er beſchrieben iſt, berührt.

6. Ein

6. Ein Kreis heiſst *um eine geradlinigte Figur beſchrieben*, wenn die Peripherie des Kreiſes jeden Winkel der Figur, um welche er beſchrieben iſt, berührt.

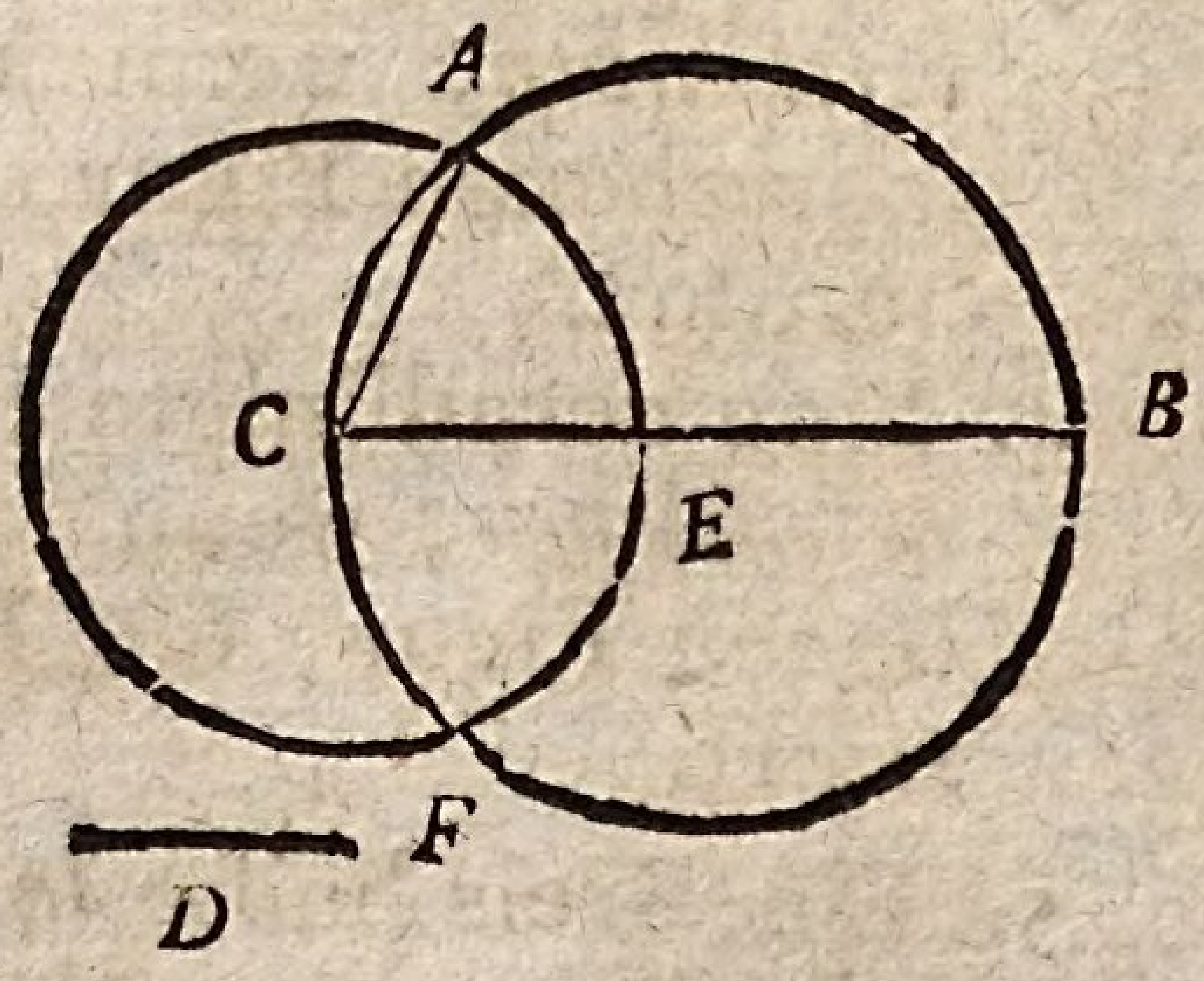
7. Eine gerade Linie heiſst *in einen Kreis eingetragen*, wenn ihre Endpunkte in der Peripherie des Kreiſes ſind.

1. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis eine gerade Linie einzntragen, welche einer gegebenen geraden Linie, die nicht gröſſer iſt, als des Kreiſes Durchmeſſer, gleich ſey.

Fs ſey der gegebene Kreis A *B C*, die gegebene gerade Linie, welche nicht gröſſer iſt, als des Kreiſes Durchmeſſer, ſey D, und man ſoll in den Kreis A B C eine der D gleiehe gerade Linie eintragen.

Auflöſung. Man ziehe den Durchmeſſer B C des Kreiſes A B C, wenn nun B C der D gleich iſt, ſo iſt das verlangte geſchehen, denn es iſt in den Kreis *A* B *C* eine der D gleiche gerade Linie B C eingetragen worden. Wenn dies aber nicht iſt, ſondern B C gröſſer, als D, iſt, ſo mache man die C E der D gleich, und beſchreibe aus dem Mittelpunkte *C* mit der Weite C E einen Kreis E A F, und ziehe die C A.



Beweis. Da nun der Punkt C der Mittelpunkt des Kreiſes A E F iſt, ſo iſt die C A der C E gleich; aber auch die D iſt der *C* E gleich; folglich iſt die D auch der A C gleich. Und es iſt alſo in den gegebenen Kreis ABC eine der D, welche nicht gröſſer, als der Durchmeſſer des Kreiſes, iſt, gleiche gerade Linie C A eingetragen worden, w. z. v. w.

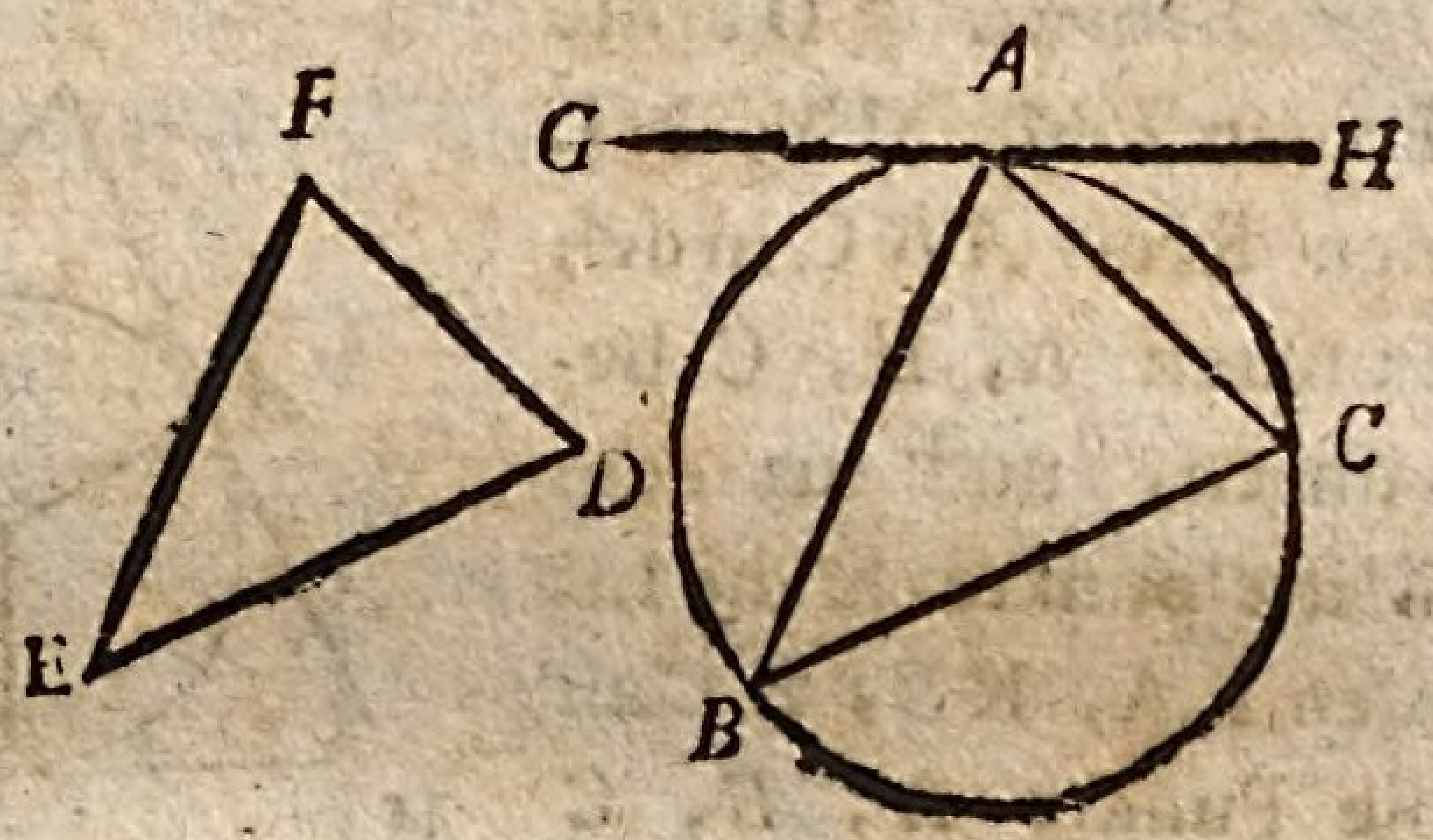
2. *Saz.*

2. Saz.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinklicht sey.

Es sey der gegebene Kreis ABC, das gegebene Dreyeck DEF, und man soll in den Kreis *A*B*C* ein Dreyeck beschreiben, das dem Dreyecke DEF gleichwinklicht sey.

Auflösung. Man ziehe (3, 17. S.) an den Punkt A des Kreises *A*BC die Tangente GAH, und seze (1, 23. S). an den Punkt *A* der Linie *A*H den Winkel HA*C*, der dem Winkel DEF, und an den Punkt A der Linie GA den Winkel G*A*B, der dem Winkel FDE gleich sey, und ziehe die BC.



Beweis. Da die Linie G*A*H den Kreis ABC berührt, und von dem Berührungspunkte die gerade Linie AC an den Kreis gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel HAC dem Winkel ABC in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich. Aber der Winkel HAC ist dem Winkel DEF gleich; folglich ist auch der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich.

Aus eben den Gründen ist auch der Winkel ACB dem Winkel EDF gleich; folglich ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel B*A*C dem übrigen Winkel EFD gleich. Das Dreyeck BAC ist also dem Dreyecke EFD gleichwinklicht, auch ist es in den Kreis ABC beschrieben.

Demnach ist in einen gegebenen Kreis ein Dreyeck beschrieben, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinklicht ist, w. z. v. w.

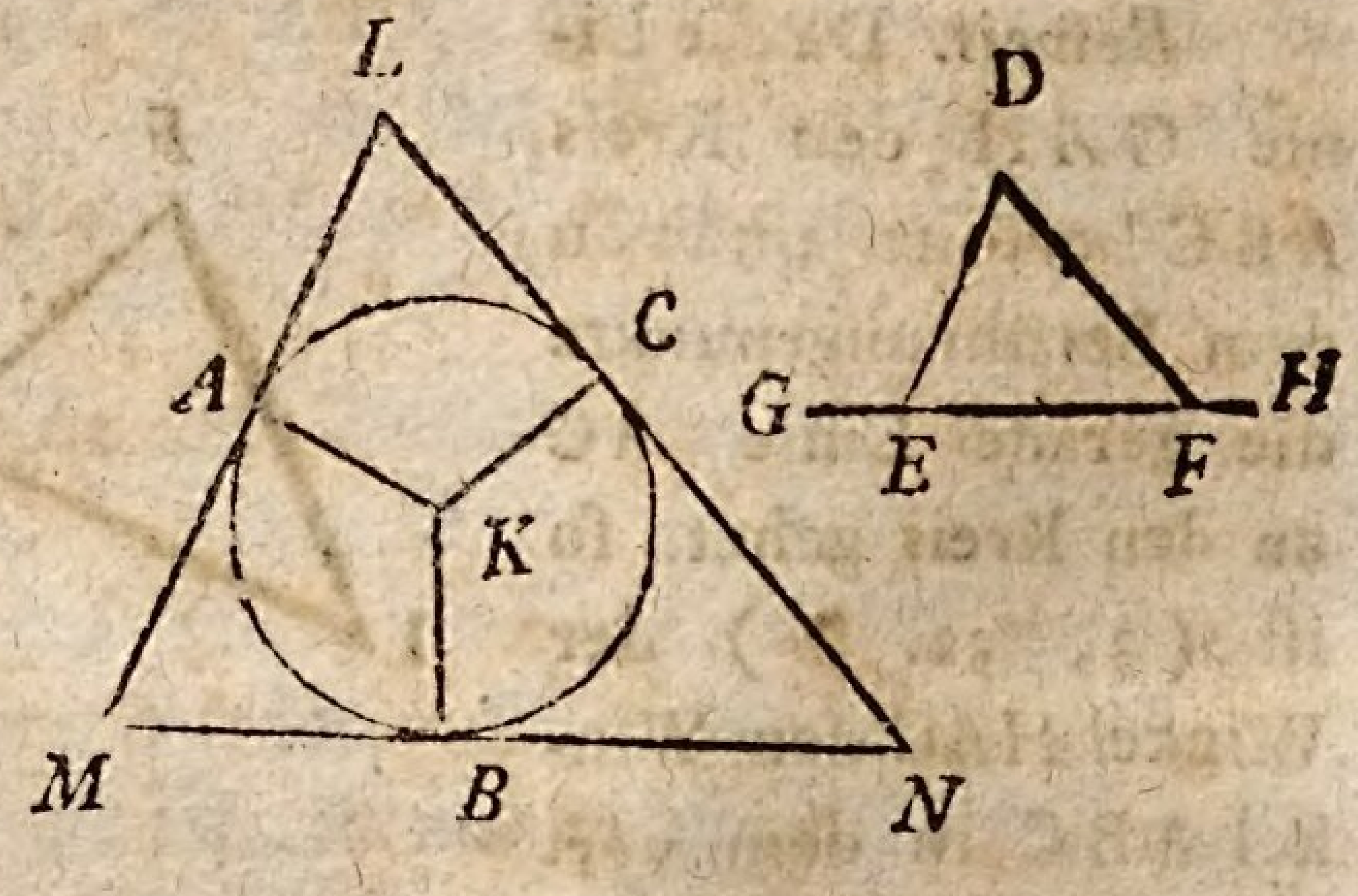
3. Saz.

2. Saz.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinklicht sey.

Es sey der gegebene Kreis ABC, das gegebene Dreyeck DEF, und man soll um den Kreis ABC ein Dreyeck beschreiben, das dem Dreyecke DEF gleichwinklicht sey.

Auflösung. Man verlängere die EF auf beyden Seiten nach G, H alsdann nehme man (3, 1. S.) den Mittelpunkt K des Kreises *A*C*B*, und ziehe willkührlich die K*B*, hierauf seze man (1, 23. S.) an den Punkt K der Linie K*B* den Winkel *B*KA, der dem Winkel DEG, und den Winkel *B*KC, der dem Winkel DFH gleich sey, und ziehe (3, 17. S.) durch die Punkte A, *B*, C, die Tangenten LAM, M*B*N, NCL.



Beweis. Da die Linien LM, MN, NL den Kreis *AB*C in den Punkten A, *B*, C berühren, und aus dem Mittelpunkte K die Linien KA, K*B*, KC an die Punkte A, *B*, C gezogen sind, so sind (3, 18. S.) die Winkel bey den Punkten A, *B*, C rechte. Da ferner die vier Winkel der vierseitigen Figur AM*B*K (1, 32. S.) vier rechten gleich sind, indem solche in zwey Dreyecke getheilt werden kann, unter diesen vier Winkeln aber die Winkel KAM, K*B*M zwey rechte sind, so sind auch die beyden übrigen Winkel AK*B*, AM*B* zwey rechten gleich. Nun sind aber (1, 13. S.) auch die Winkel DEG, DEF zwey rechten gleich; folglich sind die Winkel AK*B*, AM*B* den Winkeln DEG, DEF gleich. Unter diesen aber ist der Winkel AK*B* dem Winkel DEG gleich; folglich ist auch der übrige Winkel AM*B* dem übrigen DEF gleich. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch der Winkel LNM dem Winkel DFE gleich sey; folglich ist (1, 32. S.) auch der dritte Winkel MLN des einen Dreyecks dem dritten Winkel EDF des andern gleich,

gleich, und mithin das Dreyeck L M N dem Dreyecke D E F gleichwinklicht, auch ist es um den Kreis A *B* C beschrieben.

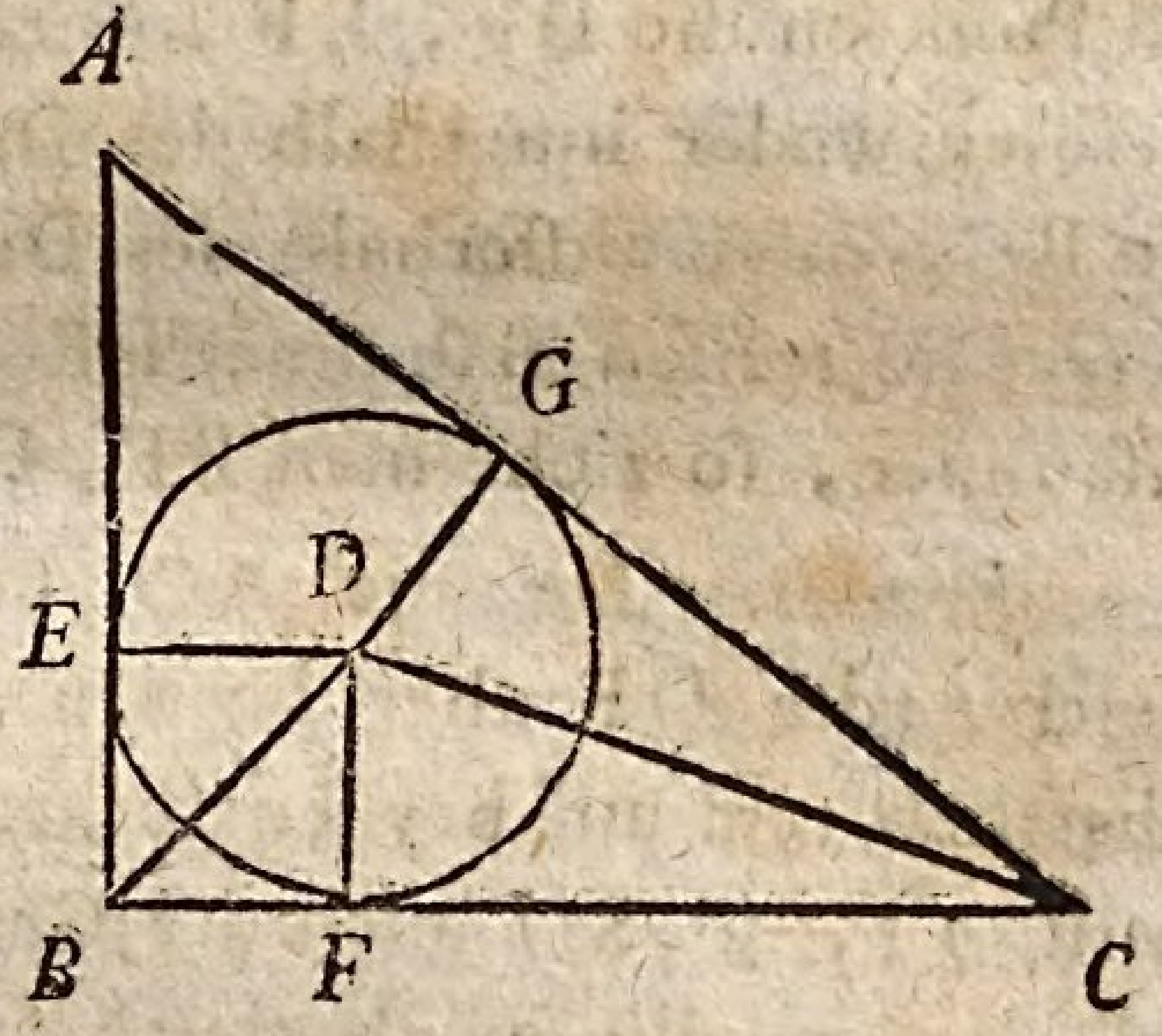
Demnach ist also um einen gegebenen Kreis ein Dreyeck beschrieben worden, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinklicht ist, w. z. v. w.

4. *Saz.*

Aufgabe. In ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sey das Dreyeck A *B C* gegeben, und man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Man halbire (1, 9. S.) die Winkel A *B* C, *B* C A durch die geraden Linien *B* D, C D, welche in dem Punkte D zusammen treffen, und fälle sodann von dem Punkte D auf die geraden Linien A *B*, *B* C, C A (1, 12. S.) die D E, D F, D G lothrecht.



Beweis. Da der Winkel A *B* D dem Winkel *CB*D gleich ist, denn der Winkel *A B C* ist halbirt worden, und da der rechte Winkel *B* E D dem rechten Winkel *B* F D gleich ist, so sind hier zwey Dreyecke E*B*D, D*B*F, in welchen zwey und zwey Winkel stückweise gleich sind, und welche die Seite *B* D, die einem der gleichen Winkel in beyden gegenüberliegt, gemeinscaftlich haben; folglich sind (1, 26. S.) auch in beyden die übrigen Seiten stückweise gleich, und es ist also die D E der D F gleich. Aus eben den Gründen ist auch die D G der *D* F gleich; folglich gehet der Kreis, der aus dem Mittelpunkte *D*, und mit der Weite *D*E, *D* F oder *D* G beschrieben wird, auch durch die übrigen Punkte, und berührt die geraden Linien *A B*, *B* C, C *A*, weil bey den Punkten E, F, *G* rechte Winkel sind. Denn wenn er die genannten Linien schnitte, so fiele eine auf dem *D*urchmesser des Kreises

 in

in feinem Endpunkte lothrecht errichtete Linie innerhalb des Kreifes, welches (3, 16. S.) unmöglich ift. Folglich fchneidet der aus dem Mittelpunkte *D* mit der Weite *D* E, D F, *D* G befchriebene Kreis die geraden Linien A *B*, *B* C, C A nicht; er berührt fie alfo, und ift folglich (4, 5. Erkl.) der in das Dreyeck *A B* C befchriebene Kreis.

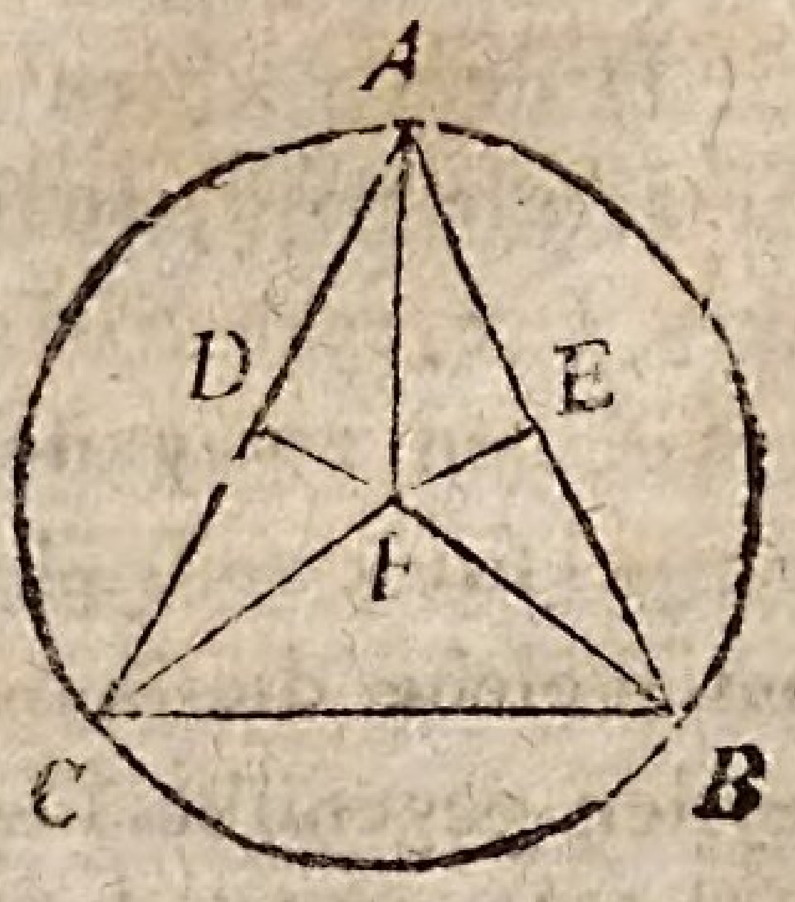
Demnach ift in das Dreyeck A *B* C der Kreis E F G befchrieben worden, w. z. v. w.

5. *Saz.*

Aufgabe. Um ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu befchreiben.

Es fey das gegebene Dreyeck A *B C*, und man foll um daffelbe einen Kreis befchreiben.

Auflöfung. Man halbire (1, 10. S.) die Seiten *A B*, A C, in den Punkten D, E, und errichte (1, 11. S.) in eben diefen Punkten die D F, E F lothrecht auf A B, *A* C, fo werden diefe entweder innerhalb des Dreyecks A *B* C, oder auf der Linie B C, oder aufferhalb des Dreyecks A B C zufammentreffen. Gefezt fie treffen erft innerhalb des Dreyecks in dem Punkte F zufammen, fo ziehe man B F, F C, F *A*.

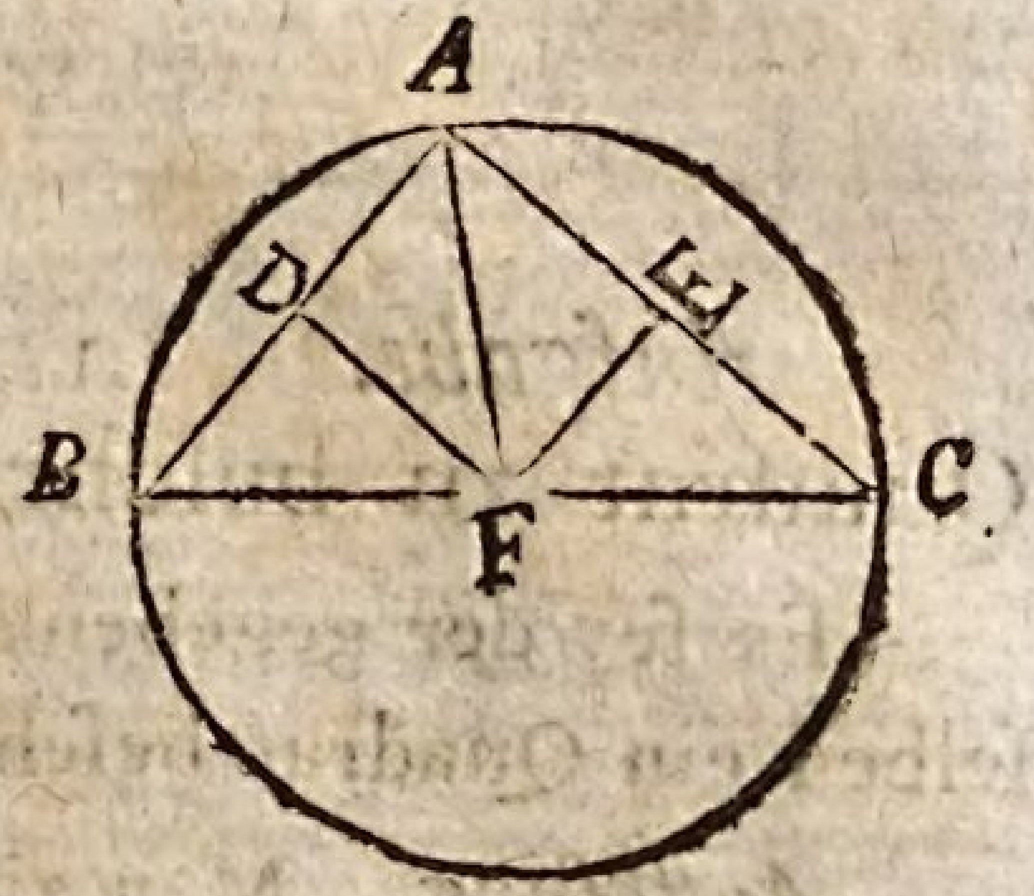


Beweis. Da die A D der D B gleich, die D F aber beyden gemeinfchaftlich und auf beyden lothrecht ift, fo ift (1, 4. S.) auch die Grundlinie A F der Grundlinie F B gleich. Eben fo kann aber auch gezeigt werden, dafs die C F der *A* F gleich fey; folglich ift die C *F* auch der F B, und mithin find alle drey F A, F B, F C einander gleich, folglich gehet der aus dem Mittelpunkte F mit der Weite F A, F B oder F C befchriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte, und ift alfo (4, 6. Erkl.) der um das Dreyeck *A* B C befchriebene Kreis.

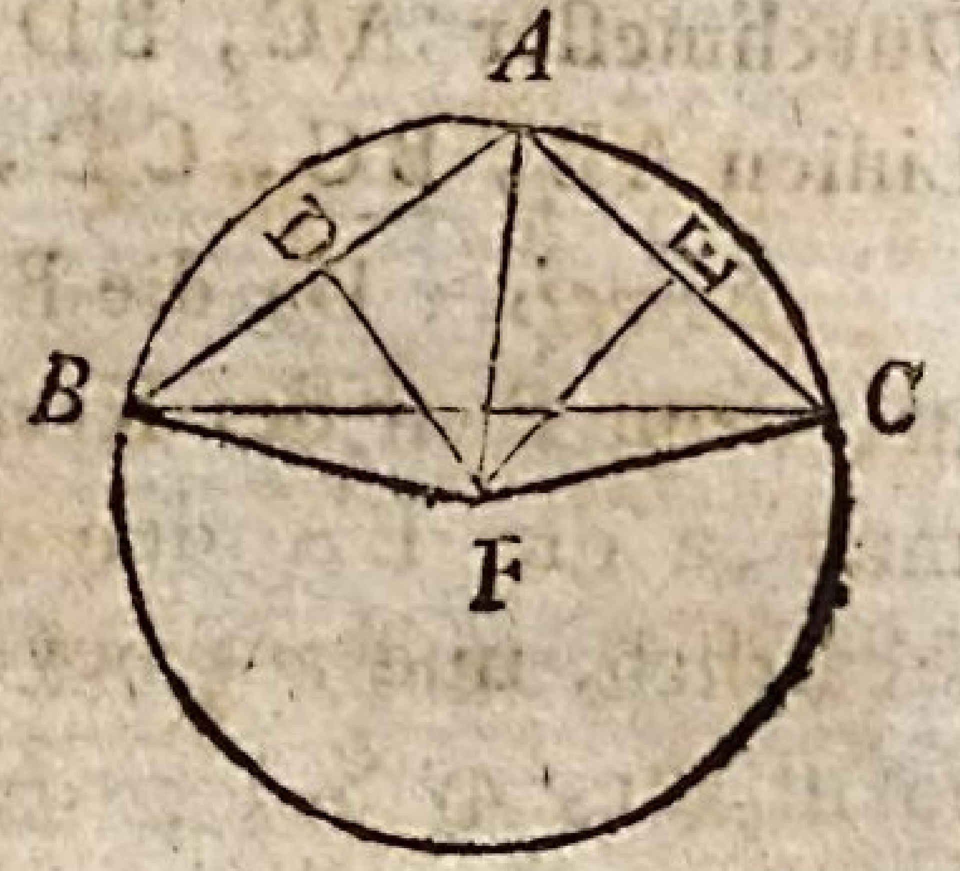
Gefezt aber *zweytens* die Linien D F, B F treffen auf der Linie B C in dem Punkte F, wie in der zweyten Figur, zufammen, fo kann, wenn man noch die Linie A F zieht, eben

fo

so gezeigt werden; dass der Punkt F der Mittelpunkt des um das Dreyeck A B C zu beschreibenden Kreisses sey.



Gesezt aber *drittens* die Linien D F, E F treffen ausserhalb des Dreyecks A B *C* in dem Punkte F, wie in der dritten Figur, zusammen, so ziehe man noch die Linien A F, F B, F C.



Da nun wiederum die A D der D B gleich, die D F aber beyden gemeinschaftlich und auf beyden lothrecht ist, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie *A* F der Grundlinie B F gleich. Eben so kann aber auch gezeigt werden, dass die C F der F A gleich sey; folglich ist die C F auch der B F gleich, und mithin gehet wiederum der aus dem Mittelpunkte F, mit der Weite F A, F B, F C beschriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte, und ist um das Dreyeck A B C beschrieben. Man beschreibe also diesen Kreis A B C wirklich, so ist um das gegebene Dreyeck A B C ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn der Mittelpunkt des Kreises innerhalb des Dreyecks fällt, alsdann der Winkel B A C, als Winkel in einem Abschnitte, der grösser, als der Halbkreis ist, kleiner, als ein rechter, dass aber wenn der Mittelpunkt des Kreises in die Linie B C fällt, dieser Winkel, als Winkel im Halbkreise, ein rechter, und dass er, wenn der Mittelpunkt des Kreises ausserhalb des Dreyecks A B C fällt, als Winkel in einem Abschnitte, der kleiner, als der Halbkreis ist, grösser, als ein rechter, sey; und umgekehrt, dass, wenn der genannte Winkel kleiner, als ein rechter, ist, die Linien D F, E F innerhalb des Dreyecks, wenn er aber ein rechter ist, auf der Linie B C, und wenn er grösser, als ein rechter, ist, ausserhalb des Dreyecks zusammentreffen.

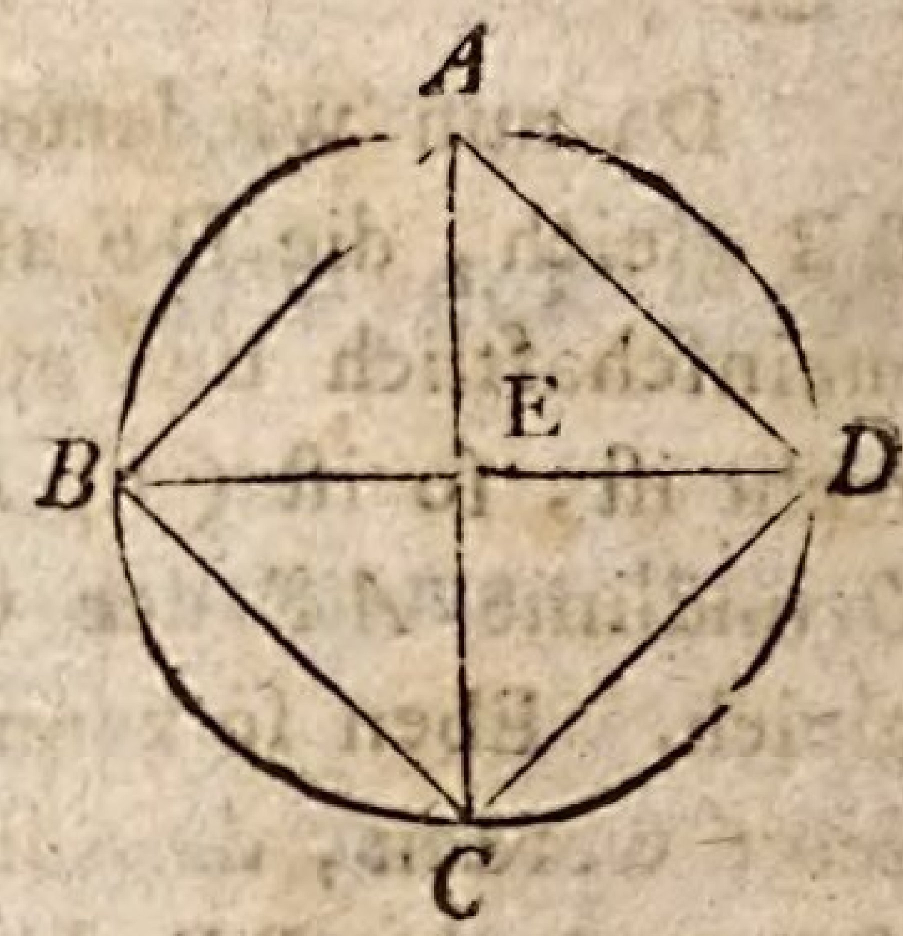
6. Saz.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreis ABCD, und man soll in denselben ein Quadrat beschreiben.

Auflösung. Man ziehe (1, 11. S.) des Kreises ABCD Durchmesser AC, BD lothrecht auf einander, und ziehe die Linien AB, BC, CD, DA.

Beweis. Da die BE der ED gleich ist, denn E ist des Kreises Mittelpunkt, und da die EA den beyden gemeinschaftlich, und auf beyden lothrecht ist, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AB der Grundlinie AD gleich. Aus eben den Gründen aber ist auch jede der beyden BC, CD, einer jeden der beyden AB, AD gleich, und folglich ABCD gleichseitig.



Ich behaupte aber, dass es auch rechtwinklicht sey. Denn da die Linie BD ein Durchmesser des Kreises ABCD ist, so ist BAD ein Halbkreis, folglich der Winkel BAD (3, 31. S.) ein rechter. Aus gleichen Gründen aber ist auch jeder der Winkel ABC, BCD, CDA ein rechter, und folglich ABCD eine rechtwinklichte vierseitige Figur. Es ist aber gezeigt worden, dass sie auch gleichseitig sey; folglich ist sie ein Quadrat. Auch ist sie in den Kreis ABCD beschrieben.

Demnach ist in den gegebenen Kreis ABCD das Quadrat ABCD beschrieben worden, w. z. v. w.

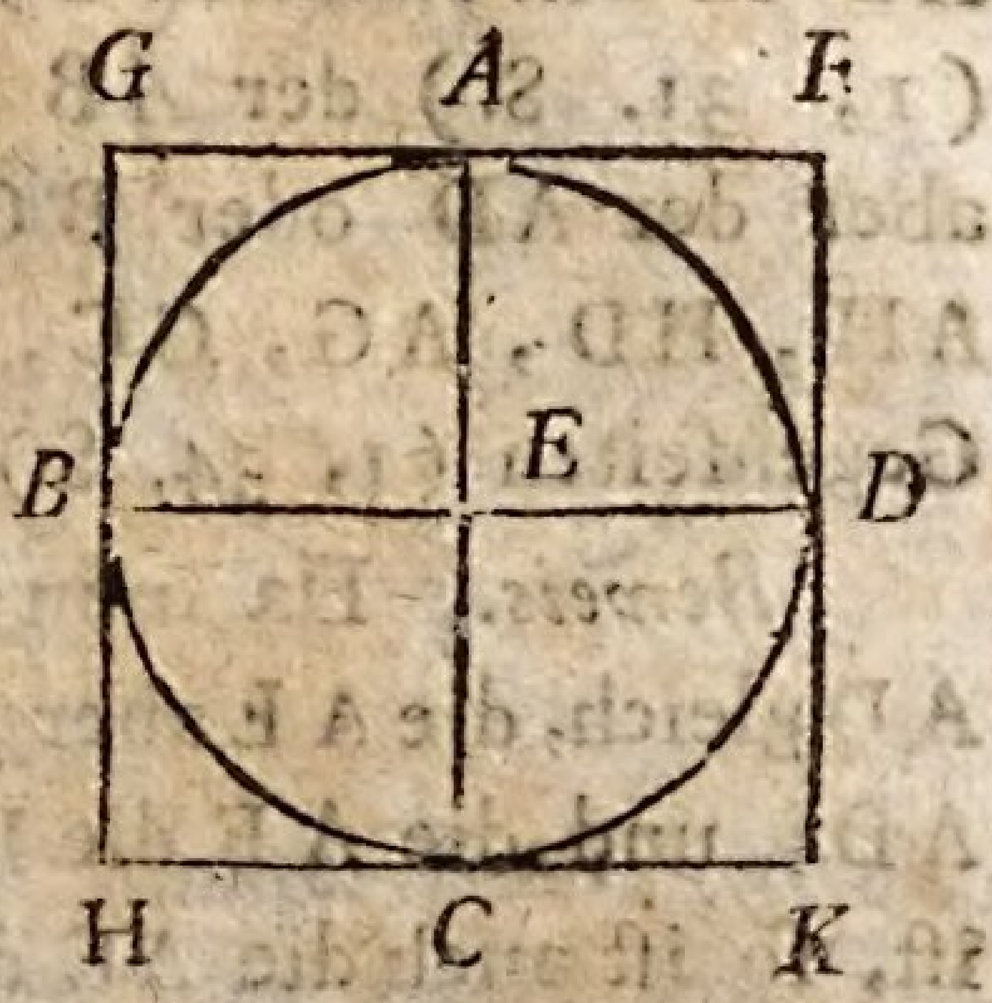
7. Saz.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreis ABCD, und man soll um denselben ein Quadrat beschreiben.

Auf-

Auflösung. Man ziehe die Durchmesser AC, BD des Kreises ABCD lothrecht auf einander, und durch die Punkte A, B, C, D ziehe man (3, 17. S.) die Tangenten FG, GH, HK, KF eben dieses Kreises.



Beweis. Da die FG den Kreis ABCD berührt, und von dem Mittelpunkte E des Kreises an den Berührungspunkt A die EA gezogen ist, so sind (3, 18. S.) die Winkel bey A rechte Winkel. Aus eben den Gründen aber sind auch die Winkel bey *B*, C, D rechte. Und da der Winkel AEB, und eben so auch der Winkel EBG ein rechter ist; so ist (1, 28. S.) die GH der AC parallel. Aus eben den Gründen aber ist auch die AC der KF parallel. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch die beyden FG, KH der BED parallel seyen; folglich sind GK, GC, AK, FB, BK Parallelogramme, und mithin ist (1, 34. S.) die GF der HK, und die GH der FK gleich. Und da die AC der BD, aber auch einer jeden der beyden GH, FK, und die BD einer jeden der beyden GF, HK gleich ist, so ist auch jede der beyden GH, FK einer jeden der beyden GF, HK gleich, und folglich die verseitige Figur FGHK gleichseitig. Ich behaupte aber, dass sie auch rechtwinklicht sey. Denn da GBEA ein Parallelogramm und der Winkel AEB ein rechter Winkel ist, so ist (1, 34. S.) auch der Winkel A*GB* ein rechter. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch bey den Punkten F, K, H rechte Winkel seyen; folglich ist die vierseitige Figur rechtwinklicht. Es ist aber gezeigt worden, dass sie auch gleichseitig sey; folglich ist sie ein Quadrat; auch ist sie um den Kreis ABCD beschrieben worden.

Demnach ist um den gegebenen Kreis ein Quadrat beschrieben, w. z. v. w.

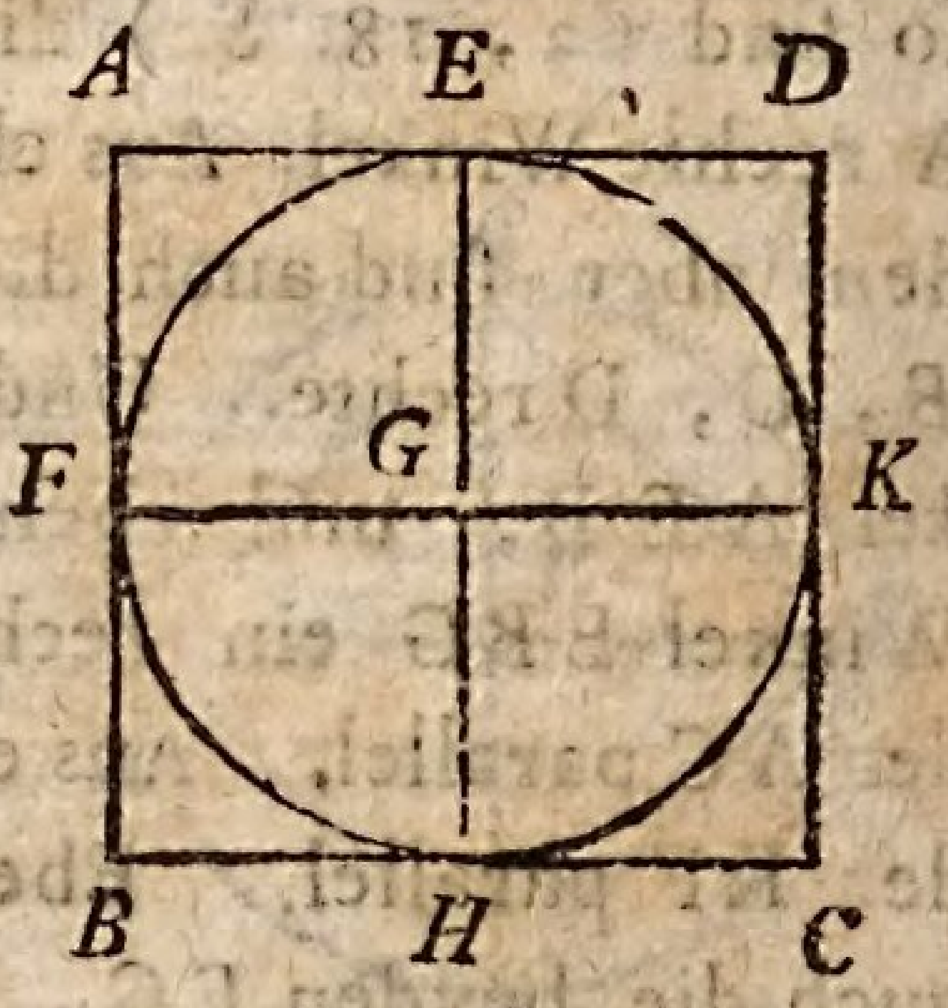
8. *Saz.*

Aufgabe. In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es

Es sey das gegebene Quadrat ABCD, und man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Man halbire (1, 10. S.) jede der beyden AB, AD in den Punkten F, E und durch den Punkt E ziehe man (1, 31. S.) der AB oder DC die EH, durch den Punkt F aber der AD oder BC die FK parallel, so sind AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD Parallelogramme, und ihre Gegenseiten (1, 34. S). bekanntlich einander gleich.



Beweis. Da nun die AB der AD gleich, die AE aber die Hälfte von AD, und die AF die Hälfte von AB ist, so ist auch die AE der AF gleich, und folglich sind auch ihre Gegenseiten einander gleich, es ist also auch die FG der GE gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jede der beyden GH, GK einer jeden der beyden FG, GE gleich sey, folglich sind alle vier GF, GE, GH, GK einander gleich, und mithin gehet der Kreis, der aus dem Mittelpunkte G mit der Weite einer von den vieren GF, GE, GH, GK beschrieben wird, auch durch die übrigen Punkte, und berührt die geraden Linien AB, BC, CD, DA, weil bey den Punkten E, F, H, K rechte Winkel sind. Denn wenn dieser Kreis die geraden Linien AB, BC, CD, DA, schneiden sollte, so müsste ein auf dem Durchmesser des Kreises im seinem Endpunkte aufgestelltes Loth innerhalb des Kreises fallen, welches (3, 16. S.) unmöglich ist. Folglich schneidet der aus dem Mittelpunkte G mit der Weite GE, GF, GH oder GK beschriebene Kreis, die geraden Linien AB, BC, CD, DA nicht; er berührt sie also und ist (4, 5. Erkl.) in das Quadrat ABCD beschrieben.

Demnach ist in ein gegebenes Quadrat ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

9. Saz.

Aufgabe. Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es

Es ſey das gegebene Quadrat ABCD, und man ſoll um daſſelbe einen Kreis beſchreiben.



Auflöſung und *Beweis*. Man ziehe die Diagonalen *A* C, B D, welche einander in dem Punkte E ſcheiden. Da nun die D A der A B gleich, die A C aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden D A, *A* C den beyden B A, A *C* ſtückweiſe gleich. *A*uch iſt die Grundlinie D C der Grundlinie B C gleich; folglich iſt auch der Winkel D A C dem Winkel B A C gleich, und der Winkel D A B wird alſo von der Linie A C halbirt. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs auch jeder der Winkel A B C, B C D, C D A von den Linien A C, B D halbirt werde. Da nun der Winkel D *A* B dem Winkel *A* B C gleich, der Winkel E A B aber die Hälfte von D *A* B, und der Winkel E B A die Hälfte von A *B* C iſt, ſo iſt auch der Winkel E *A* B dem Winkel E B *A*, und mithin (1, 6. S.) die Seite E A der Seite E B gleich; folglich ſind die vier Linien E A, E B, E C, E D alle einander gleich, und der aus dem Mittelpunkte E mit der Weite E A, E B, E C oder E D beſchriebene *K*reis gehet folglich auch durch die übrigen Punkte, und iſt um das Quadrat *A* B C D beſchrieben. Man beſchreibe alſo den Kreis *A* B C D, ſo iſt um das gegebene Quadrat ein Kreis beſchrieben worden, w. z. v. w.

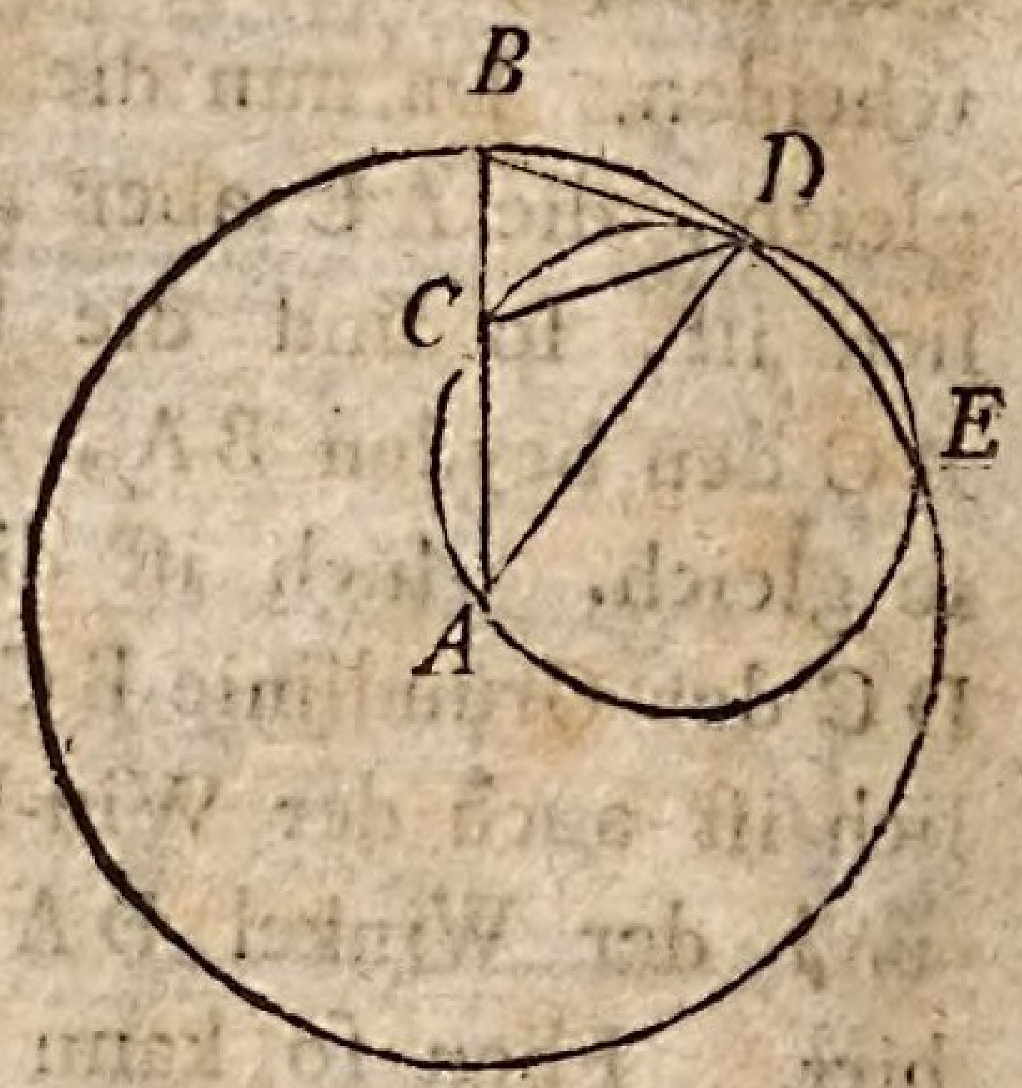
10. *Saz*.

Aufgabe. Ein gleichſchenklichtes Dreyeck zu beſchreiben, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt ſo groſs ſey, als der dritte Winkel.

Auflöſung, Man ziehe eine gerade Linie *A* B und ſchneide ſie (2, 11. S.) in dem Punkte C ſo, daſs das Rechteck aus *A* B, B C dem Quadrate von *A* C gleich ſey; hierauf beſchreibe man aus dem Mittelpunkte A und mit der Weite *A* B den

Kreis

Kreis BDE, trage (4, 1. S.) in denselben die der AC, welche nicht grösser, als des Kreises BDE Durchmesser, ist, gleiche Linie BD, ziehe noch die Linien DA, DC, und beschreibe (4, 5. S.) um das Dreyeck ADC den Kreis ACD.



Beweis. Da das Rechteck aus AB, BC dem Quadrate von AC, die AC aber der BD gleich ist, so ist das Rechteck aus AB, BC auch dem Quadrate von BD gleich. Da ferner von einem ausserhalb des Kreises ACD befindlichen Punkte B, zwey gerade Linien BCA, BD an den Kreis ACD gehen, wovon die eine ihn schneidet, die andere aber ihn trift, und das Rechteck aus AB, BC dem Quadrate von BD gleich ist, so berührt (3, 37. S.) die BD den Kreis ACD. Da aber die BD den Kreis ACD berührt, und von dem Berührungspunkte D aus die DC an den Kreis gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel BDC dem Winkel DAC in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich. Da nun der Winkel BDC dem Winkel DAC gleich ist, so seze man beyderseits den Winkel CDA hinzu, und es ist der ganze Winkel BDA den zwey Winkeln DAC, CDA gleich. Den beyden Winkeln CDA, DAC aber ist (1, 32. S.) der äussere Winkel BCD gleich; folglich ist auch der Winkel BDA dem Winkel BCD gleich. Aber der Winkel BDA ist (1, 5. S.) dem Winkel CBD gleich, weil die Seite AD der Seite AB gleich ist; folglich ist auch der Winkel DBA dem Winkel BCD gleich, und mithin sind die drey Winkel BDA, DBA, BCD alle einander gleich. Da nun der Winkel DBC dem Winkel BCD gleich ist, so ist (1, 6. S.) auch die Seite BD der Seite DC gleich; die BD aber ist, nach der Voraussezung, der CA gleich; folglich ist auch die CA der CD, und (1, 5. S.) der Winkel CDA dem Winkel DAC gleich, mithin sind die Winkel CDA und DAC zusammen dem Doppelten von DAC gleich. Aber der Winkel BCD ist (1, 32. S.) auch den Winkeln CDA, DAC zusammen gleich; folglich ist auch der Winkel BCD das Doppelte von DAC. Der Winkel BCD ist aber auch einem jeden

den der Winkel B D *A*, D B A gleich; folglich ist jeder der Winkel B *D A*, *D* B *A* das Doppelte des Winkels D B *A*.

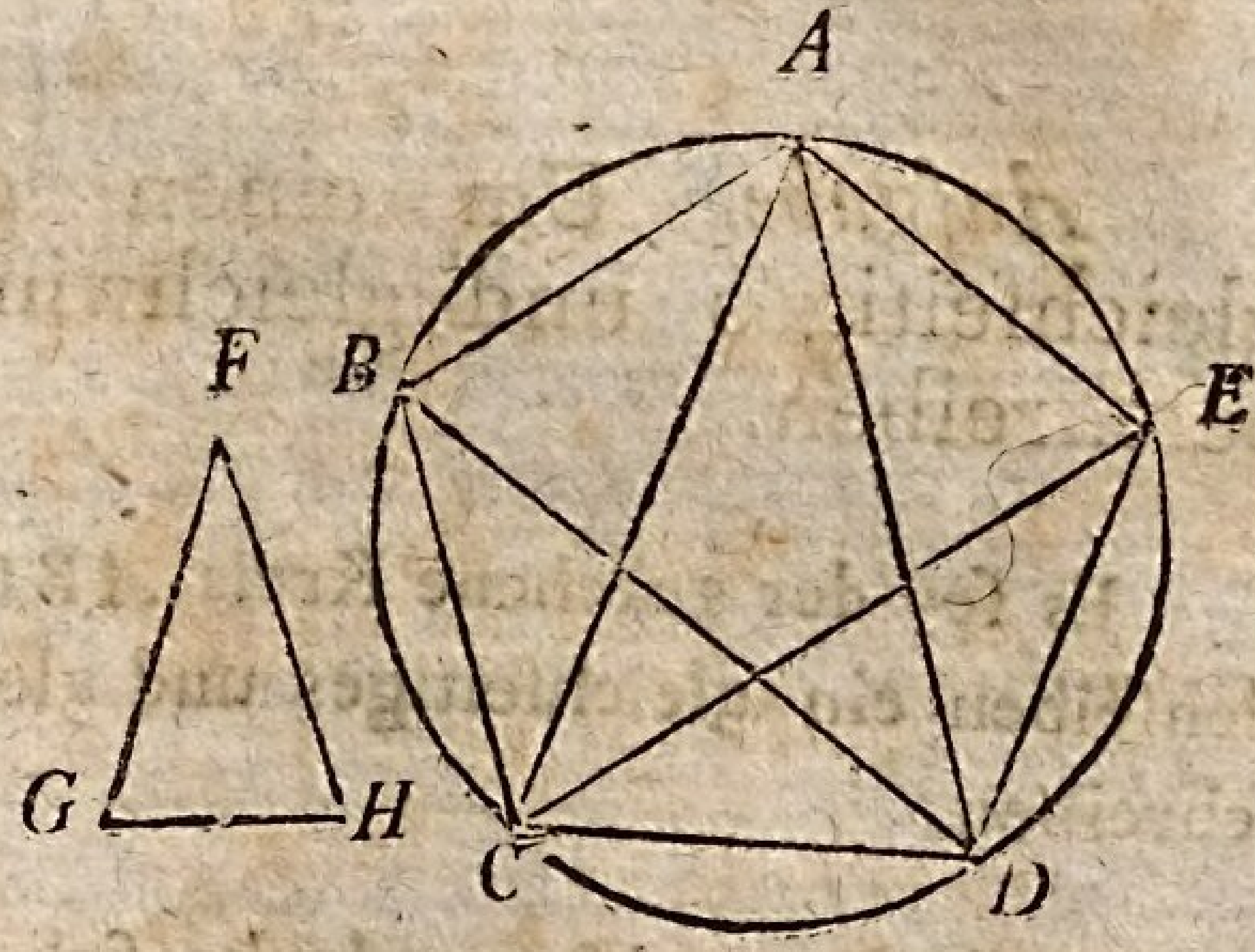
Demnach ist ein gleichseitiges Dreyeck *A D* B beschrieben worden, worin jeder der Winkel an der Grundlinie *D B* das Doppelte des übrigen Winkels ist; w. z. v. w.

11. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck zu beschreiben.

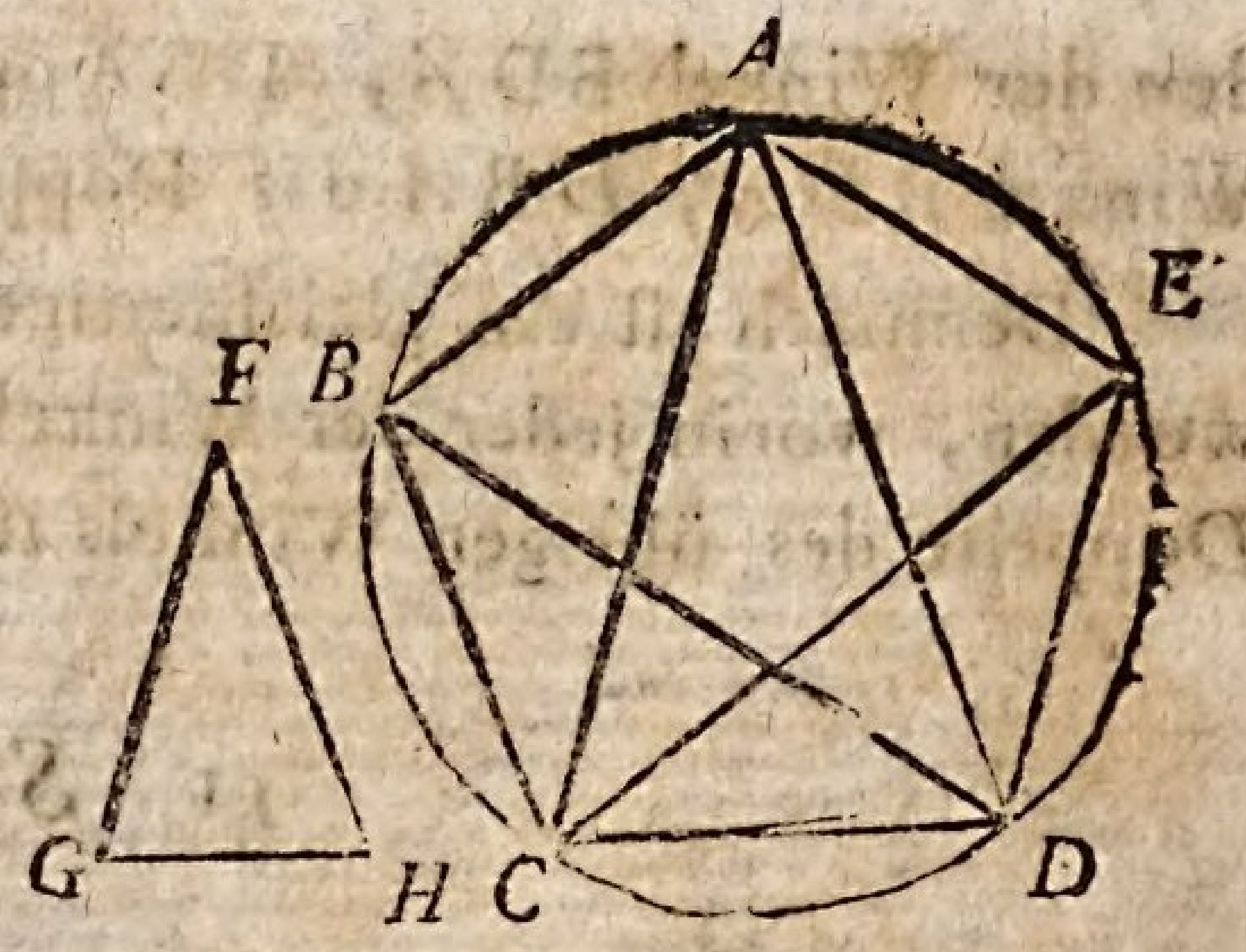
Es sey der gegebene Kreis A*B C D* E, und man soll in denselben ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe (4, 10. S.) ein gleichschenklichtes Dreyeck F G H, worin jeder der Winkel an der Grundlinie das Doppelte des dritten Winkels sey. Hierauf beschreibe man (4, 2. S.) in den Kreis A *B* C *D* E ein Dreyeck A C D dem Dreyecke F G H gleichwinklicht, so dass der Winkel C *A* D dem Winkel bey F, jeder der Winkel A C D, A D C aber einem jeden der Winkel bey G, H gleich sey, so ist jeder der Winkel A C D, A D C das Doppelte des Winkels C A D; man halbire also (1, 9. S.) die beyden Winkel *A* C D, A D C durch die geraden Linien C E, D B und ziehe die Linien *A* B, B C, D E, *E* A.



Beweis. Da nun jeder der Winkel A C D, A D C das Doppelte des Winkels C A D ist, und da die Winkel A C D, A D C durch die Linien E C, D B halbirt sind, so sind die fünf Winkel C A D, A C E, E C D, C D B, B D A alle einander gleich. Aber gleiche Winkel stehen (3, 26. S.) auf gleichen Bogen; folglich sind auch die fünf Bogen, A B, *B C*, C D, D E, E *A* einander gleich. Gleiche Bogen aber werden

(3,



(3, 29. S.) von gleichen geraden Linien abgeschnitten; folglich sind auch die fünf geraden Linien AB, BC, CD, DE, EA einander gleich, und die fünfseitige Figur ABCDE ist also gleichseitig. Ich behaupte aber, dass sie auch gleichwinklicht sey. Denn da der Bogen AB dem Bogen DE gleich ist, so ist, wenn man beyderseits den Bogen BCD hinzusezt, der Bogen ABCD dem Bogen EDCB gleich. Nun stehet auf dem Bogen ABCD der Winkel AED, und auf dem Bogen EDCB der Winkel BAE, folglich ist (3, 27. S.) auch der Winkel AED dem Winkel BAE gleich. Aus eben den Gründen aber ist auch jeder der Winkel ABC, BCD, CDE einem jeden der beyden BAE, AED gleich; folglich ist die fünfseitige Figur ABCDE gleichwinklicht. Es ist aber gezeigt worden, dass sie auch gleichseitig sey: Folglich ist in den gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck beschrieben worden, w. z. v. w.

12. *Saz.*

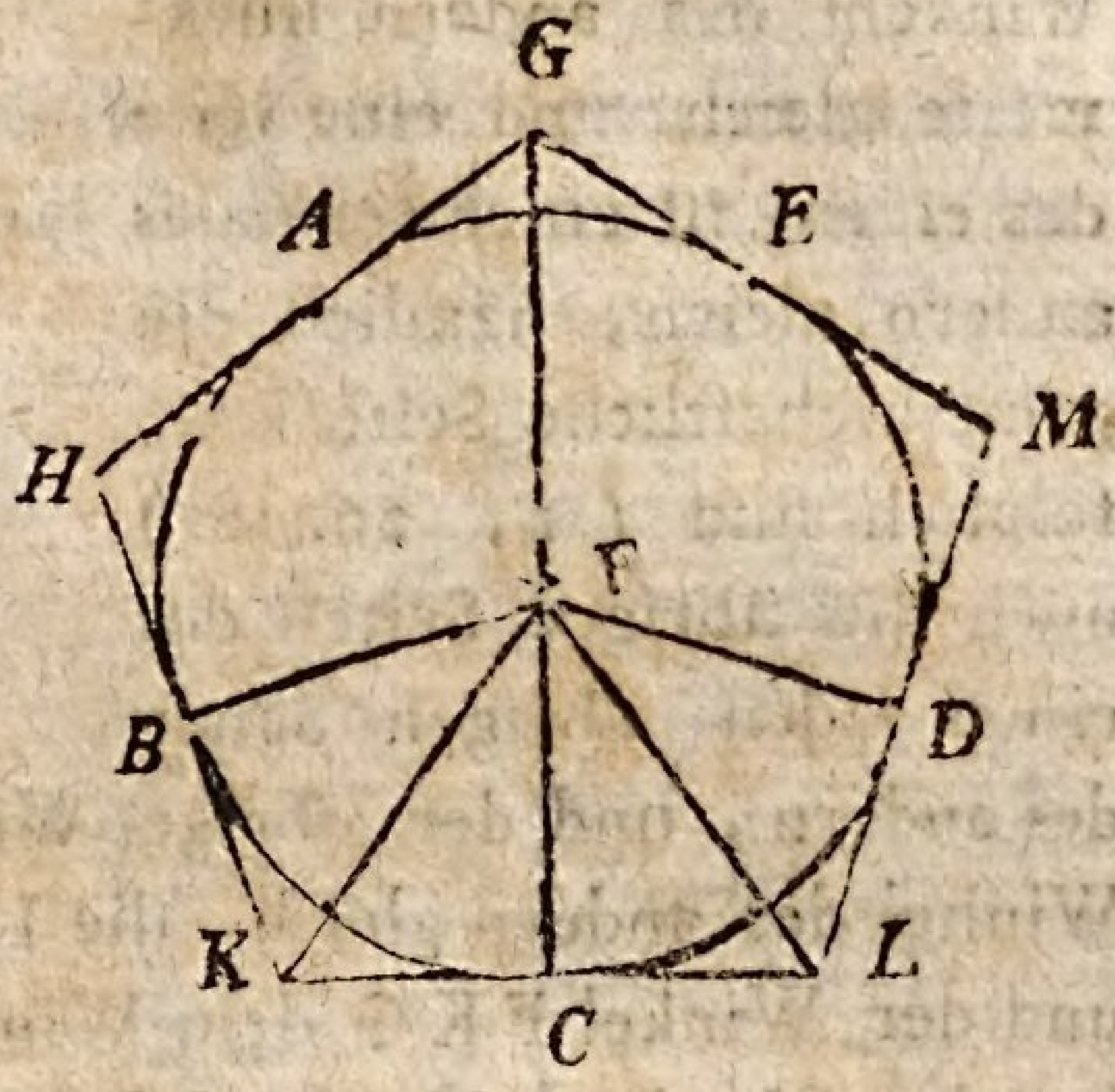
Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreis ABCDE, und man soll um denselben ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck beschreiben.

Auflösung. Man gedenke sich die Winkelpunkte A, B, C, D, E des (4, 11. S.) in den Kreis beschriebenen Fünfecks, so dass die Bogen AB, BC, CD, DE, EA einander gleich seyen, und durch die Punkte A, B, C, D, E ziehe man

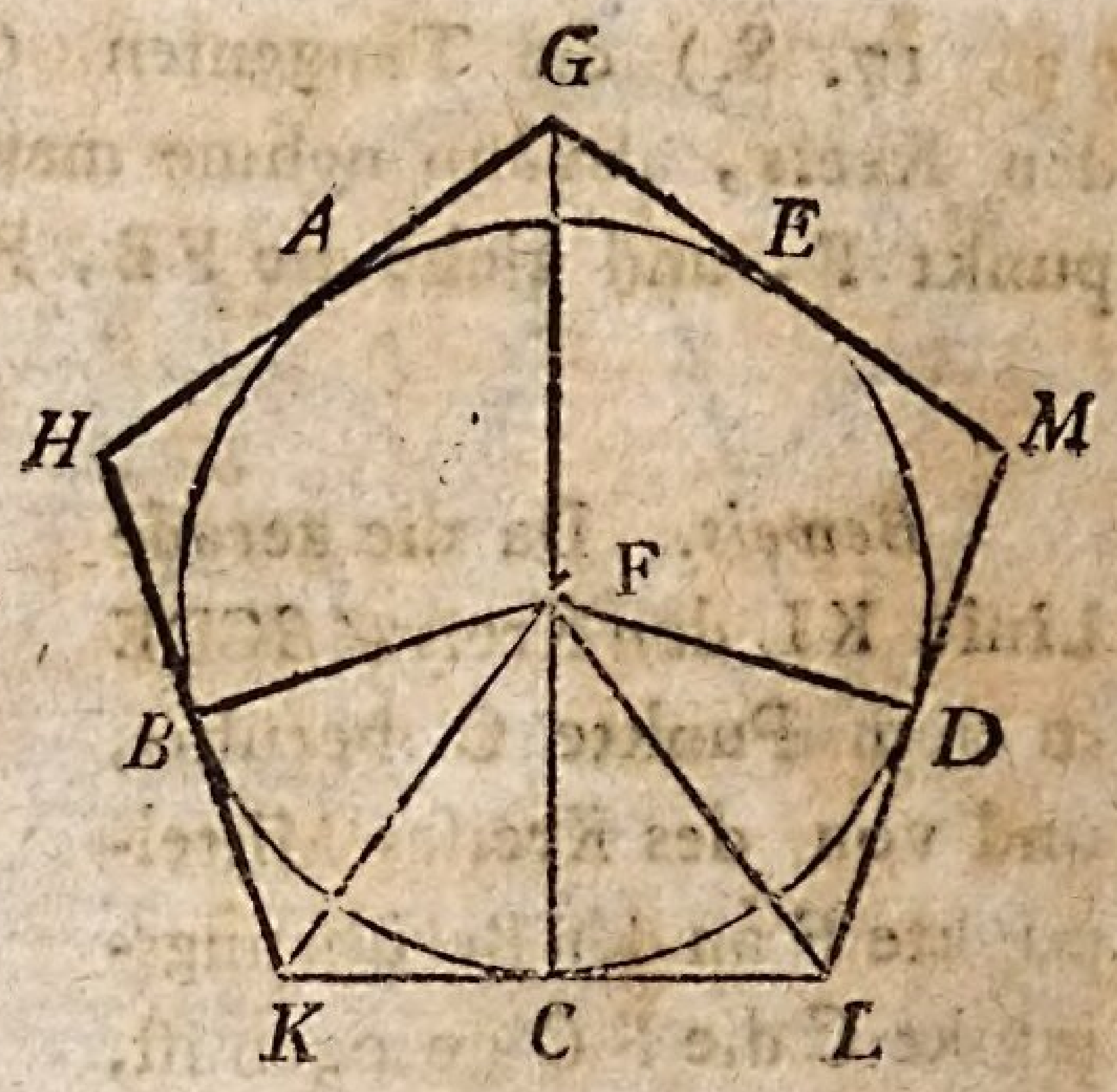
den

(3, 17. S.) die Tangenten GH, HK, KL, LM, MG an den Kreis, alsdann nehme man des Kreises *A*BCDE Mittelpunkt F, und ziehe die FB, FK, FC, FL, FD.



Beweis. Da die gerade Linie KL den Kreis *AB*CDE in dem Punkte C berührt, und von des Kreises Mittelpunkte F an den Berührungspunkt *C* die F *C* gezogen ist, so ist (3, 18. S.) die FC auf der KL lothrecht, und folglich jeder der beyden Winkel bey C ein rechter. *A*us eben den Gründen aber sind auch die Winkel bey B, D rechte. Da also der Winkel F*C*K ein rechter ist, so ist (1, 47. S.) das Quadrat von KC, den Quadraten von F *C*, CK gleich. *A*us eben den Gründen aber ist das Quadrat von FK den Quadraten von FB, B*K* gleich; und folglich sind die Quadrate von FC, CK den Quadraten von FB, BK gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von F*B* dem Quadrate von FC gleich; folglich ist auch, wenn man beyderseits gleiches abzieht, das Quadrat von CK dem Quadrate von *B*K, und also auch die CK der BK, gleich. Da nun auch die FC der FB gleich, und FK gemeinschaftlich ist, so sind die beyden FC, FK den beyden FB, FK stückweise gleich, auch ist die Grundlinie BK der Grundlinie CK gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel BFK dem Winkel KFC, und der Winkel BKF dem Winkel *C*KF gleich, und mithin ist der Winkel BFC das Doppelte des Winkels KFC, und der Winkel BKC das *D*oppelte des Winkels CKF. *A*us eben den Gründen aber ist auch der Winkel CFD das Doppelte des Winkels CFL, und der Winkel CL*D* das Doppelte des Winkels CLF. Da nun der *B*ogen BC dem *B*ogen C*D* gleich ist, so ist (3, 27. S.) auch der Winkel BF*C* dem Winkel CFD gleich; der Winkel BFC aber ist das Doppelte des Winkels KFC, und der Winkel *D*FC das Doppelte des Winkels LFC; folglich ist auch der Winkel

KFC



KFC dem Winkel CFL gleich, und mithin sind in den beyden Dreyecken FKC, FLC zwey Winkel des einen zwey Winkeln des andern stückweise gleich und eine Seite des einen, ist einer Seite des andern gleich, nämlich die gemeinschaftliche Seite FC; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten des einen den übrigen Seiten des andern, und der übrige Winkel des einen dem übrigen Winkel des andern gleich, die Linie KC also ist der Linie CL, und der Winkel FKC dem Winkel FLC gleich. Da nun die KC der CL gleich ist, so ist KL das Doppelte von KC. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch HK das Doppelte von BL sey. Da ferner gezeigt worden ist, dass die BK der KC gleich sey, und die KL das Doppelte von KC, die KH aber das Doppelte von BK ist, so ist auch die KH der KL gleich. Eben so kann auch gezeigt werden, dass jede der übrigen GH, GL, GM einer jeden der beyden KH, KL gleich sey; folglich ist GHKLM ein gleichseitiges Fünfeck.

Ich behaupte aber, dass es auch gleichwinklicht sey.

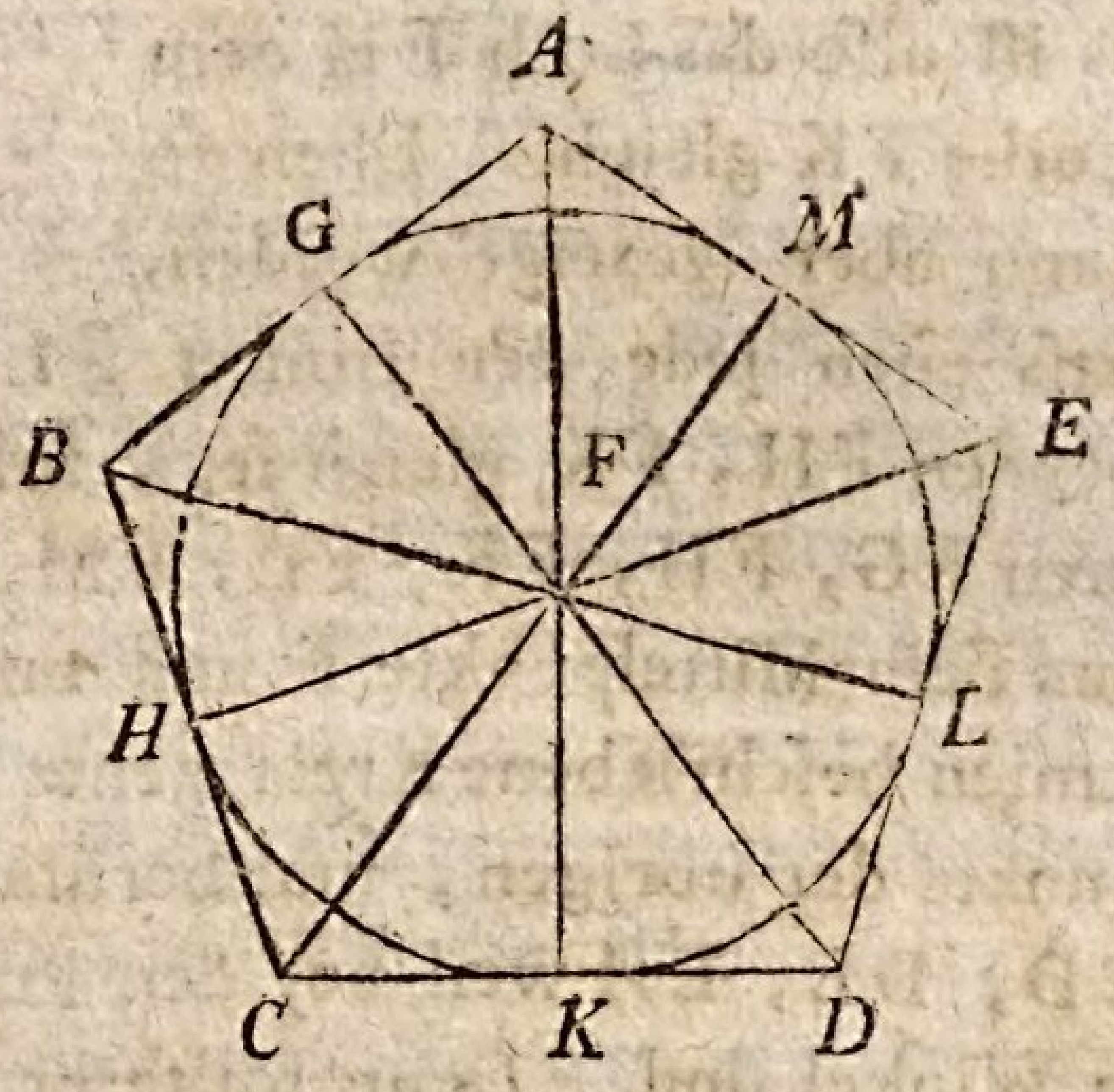
Denn da der Winkel FKC dem Winkel FLC gleich ist, von den Winkel FKC aber gezeigt worden ist, dass er die Hälfte des Winkels KLM sey, so ist auch der Winkel HKL dem Winkel KLM gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jeder der Winkel KHG, HGM, GML einem jeden der Winkel HKL, KLM gleich sey; folglich sind die fünf Winkel GHK, HKL, KLM, LMG, MGH alle einander gleich, und mithin das Fünfeck GHKLM gleichwinklicht. Es ist aber gezeigt worden, dass es auch gleichseisig sey, auch ist es um den Kreis ABCDE beschrieben.

Demnach ist um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck beschrieben worden, w. z. y. w.

13. *Saz.*

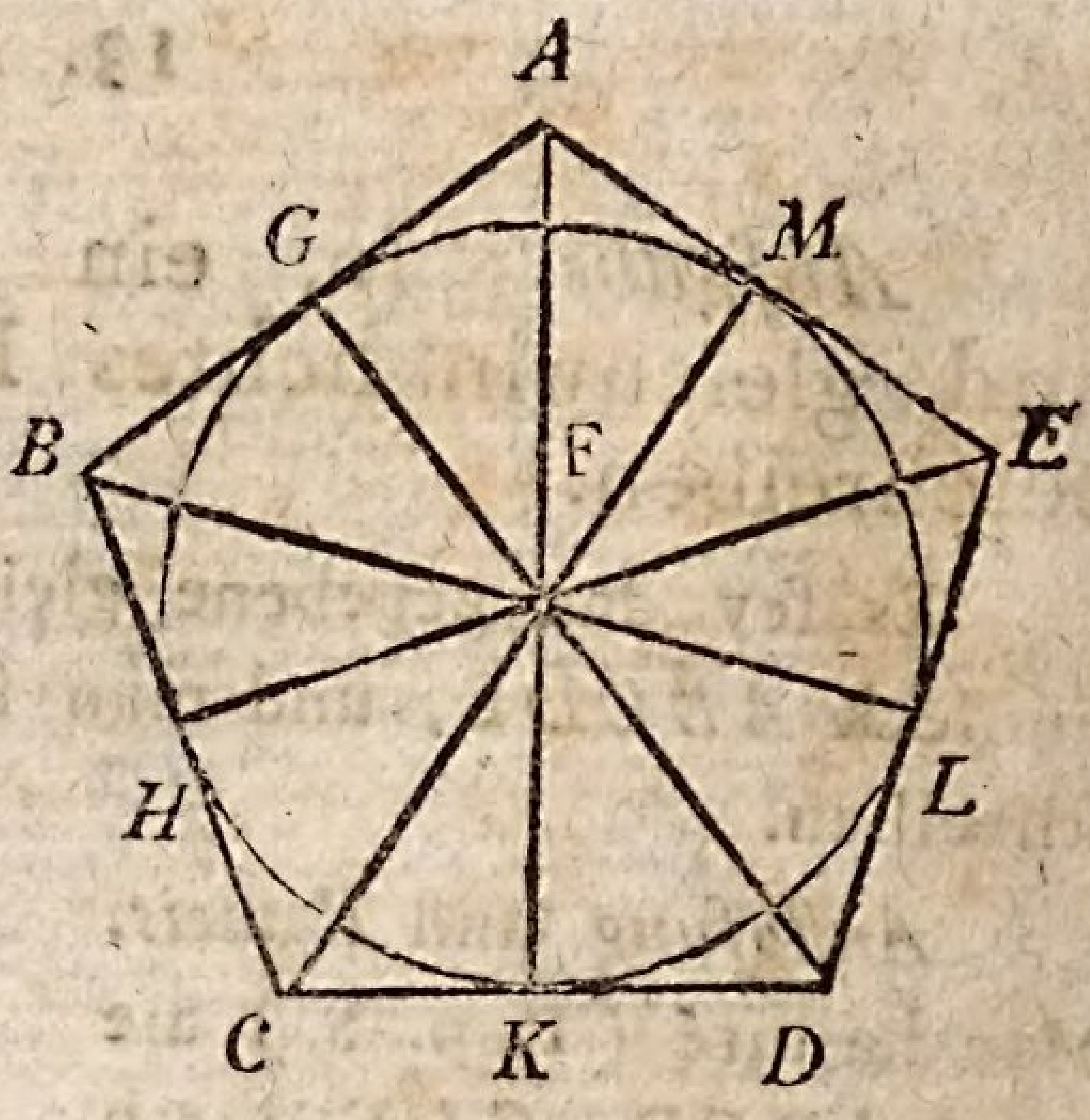
Aufgabe. In ein gegebenes gleichſeitiges und gleichwinklichtes Fünfeck einen Kreis zu beſchreiben.

Es ſey das gegebene gleichſeitige und gleichwinklichte Fünfeck *ABCDE*, und man ſoll in daſſelbe einen Kreis beſchreiben.



Auflöſung und *Beweis.* Man halbire (1, 9. S.) die Winkel BCD, C*D*E durch die Linien CF, DF, und ziehe aus dem Punkte F, wo die Linien CF, *D*F zuſammentreffen, die FB, FA, FE.

Da nun die BC der C*D* gleich, die CF aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden *BC*, CF den beyden DC, CF ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel BCF dem Winkel *D*CF gleich, folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie BF der Grundlinie CF, und das ganze Dreyeck BFC dem ganzen *D*reyecke CF*D* gleich, auch ſind in beyden die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich; der Winkel CBF iſt alſo dem Winkel C*D*F gleich. *D*a nun der Winkel CDE das *D*oppelte des Winkels C*D*F iſt, der Winkel C*D*E aber dem Winkel *A*BC, und der Winkel C*D*F dem Winkel CBF gleich iſt, ſo iſt auch der Winkel ABC das Doppelte von CBF, und mithin der Winkel ABF dem Winkel FBC gleich; folglich der Winkel A*B* *C* durch die Linie BF halbirt. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs auch jeder der Winkel BAE, AE*D* von den Linien F*A*, FE halbirt werde. Man fälle nun von dem Punkte F aus auf die Linien AB, BC, CD, DE, E*A*, die Lothe FG, FH, FK, FL, FM. Da nun der Winkel HCF dem Winkel KCF, und der rechte Winkel FHC dem rechten Winkel FKC gleich iſt, ſo ſind in den beyden Dreyecken FHC, FKC zwey und zwey Winkel einander ſtückweiſe gleich,



gleich, auch haben beyde eine Seite gemeinschaftlich, die FC nämlich, welche in jedem einem der gleichen Winkel gegenüberliegt; folglich sind (1, 26. S.) auch in beyden die übrigen Seiten einander stückweise gleich, es ist also das Loth FH dem Lothe FK gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jede der Linien FL, FM, FG einer jeden der beyden FH, FK gleich sey, folglich sind die fünf geraden Linien FG, FH, FK, FL, FM alle einander gleich, und der aus dem Mittelpunkte F und mit der Weite einer dieser fünf Linien beschriebene Kreis gehet folglich auch durch die Endpunkte der übrigen, und berührt also die Linien *AB*, *B*C, CD, DE, E*A* weil bey den Punkten G, H, K, L, M rechte Winkel sind. Denn sollte er sie nicht berühren, sondern schneiden, so würde ein auf dem Durchmesser des Kreises in seinem Endpunkte aufgestelltes Loth innerhalb des Kreises fallen, welches (3, 16. S) unmöglich ist. Folglich kann der aus dem Mittelpunkte F mit der Weite FG, FH, FK FL, FM beschriebene Kreis die Linien AB, BC, CD, DE, EA nicht schneiden, er muss sie also berühren. Man beschreibe also einen solchen Kreis wie GHKLM, so ist in das gegebene gleichseitige und gleichwinklichte Fünfeck ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

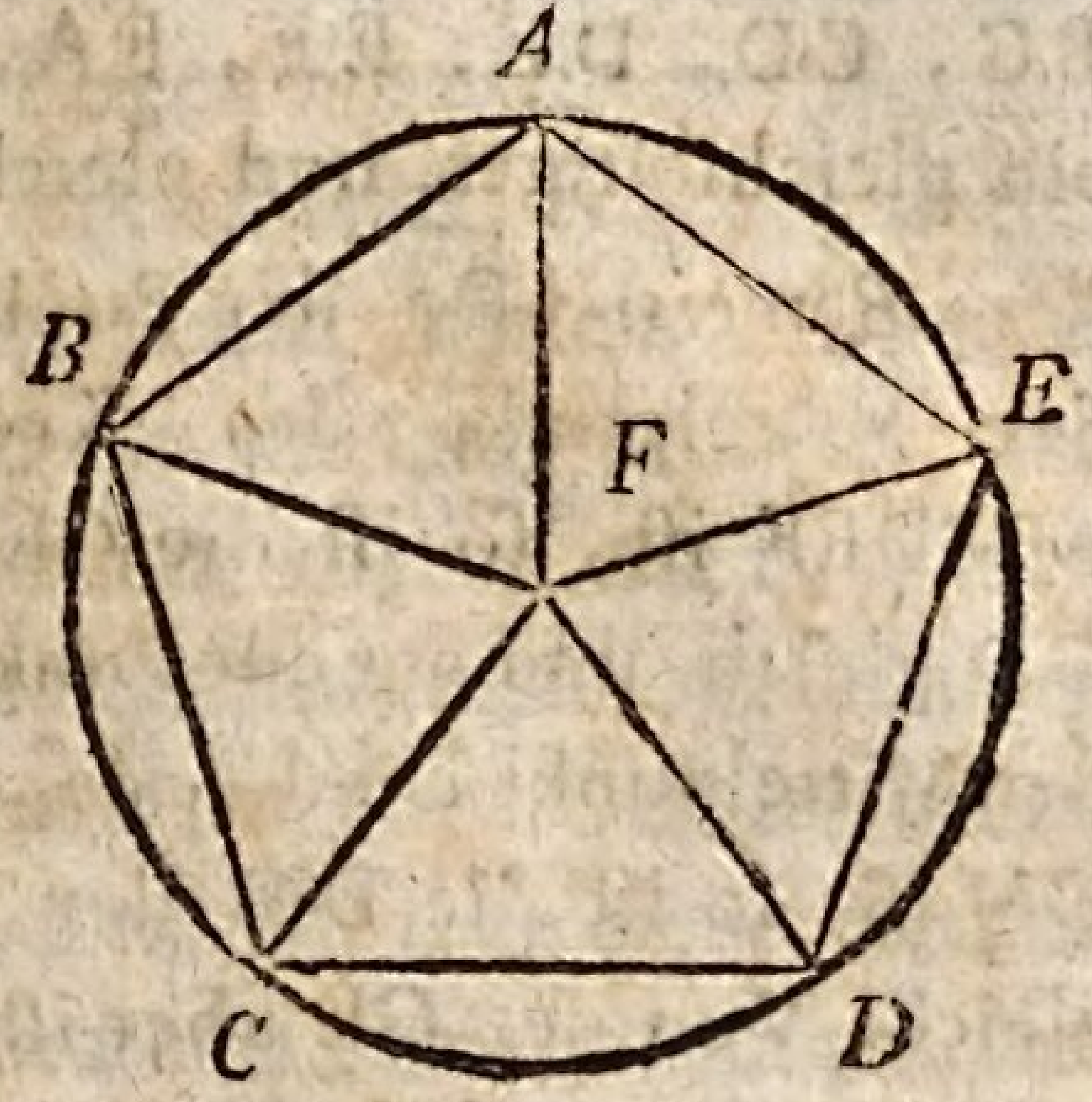
14. *Saz.*

Aufgabe. Um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinklichtes Fünfeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sey das gegebene gleichseitige und gleichwinklichte Fünfeck ABCDE, und man soll um dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auf-

Auflösung und *Beweis.* Man halbire jeden der Winkel BCD, CDE durch die Linien CF, DF, und ziehe von dem Punkte F, wo diese Linien zusammentreffen, die Linien FB, FA, FE, so kann eben so, wie im Beweise des vorigen Sazes, gezeigt werden, dass auch jeder der Winkel C*B*A, *B*AE, AED durch die Linien F*B*, FA, FE halbirt werde. Da nun der Winkel *B*CD dem Winkel CDE gleich, der Winkel FCD aber die Hälfte des Winkels *BC*D, und der Winkel CDF die Hälfte des Winkels CDE ist, so ist folglich auch der Winkel FDC dem Winkel FCD, und mithin (1, 6. S.) die Seite FC der Seite FD gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jede der Linien F*B*, FA, FE einer jeden der beyden FC, FD gleich sey. Demnach sind die fünf Linien F*A*, F*B*, FC, FD, FE alle einander gleich, und mithin gehet der aus dem Mittelpunkt F mit der Weite einer dieser fünf Linien beschriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte, und ist um das gleichseitige und gleichwinklichte Fünfeck beschrieben. Man beschreibe also den Kreis ABCDE, so ist um das gleichseitige und gleichwinklichte Fünfeck ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.



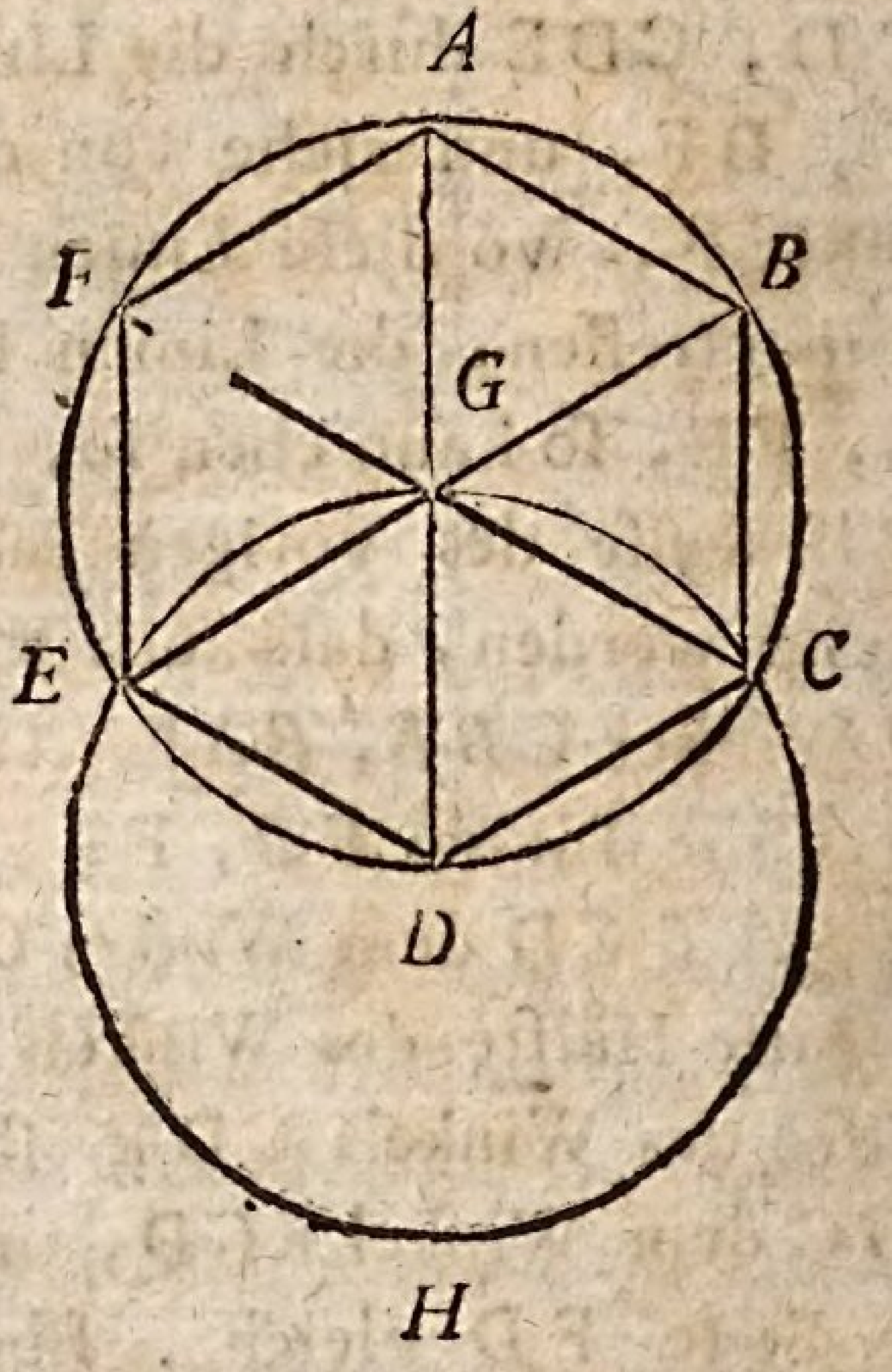
15. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Sechseck zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreis A*B*CDEF, und man soll in denselben ein gleichseitiges u. gleichwinklichtes Sechseck beschreiben.

Auflösung. Man nehme den Mittelpunkt G des Kreises, und ziehe den Durchmesser AD desselben; hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte D mit der Weite DG den Kreis EGCH, in diesem ziehe man die geraden Linien EG, CG, verlängere solche bis nach B, F und ziehe sodann die AB, BC,

BC, CD, DE, EF, FA, so behaupte ich, daſs ABCDEF ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Sechseck sey.



Beweis. Da der Punkt E der Mittelpunkt des Kreises ABCDEF ist, so ist die GE der GD gleich, und da der Punkt D der Mittelpunkt des Kreises EGCH ist, so ist die DE der DG gleich. Von der GE aber ist gezeigt worden, daſs sie der GD gleich sey; folglich ist auch die GE der ED gleich, und mithin das Dreyeck EGD gleichseitig, folglich auch seine drey Winkel EGD, GDE, DEG einander gleich, weil in gleichschenklichten Dreyecken (1, 5. S.) die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind. Auch sind die drey Winkel eines Dreyecks zwey rechten gleich; folglich ist der Winkel EGD ein Drittel von zwey rechten. Eben so kann aber gezeigt werden, daſs auch der Winkel DGC ein Drittel von zwey rechten sey. Da ferner die gerade Linie CG auf der EB aufgestellt ist, so sind (1, 13. S.) die Nebenwinkel EGC, CGB, welche sie mit derselben macht, zwey rechten gleich, folglich ist auch der dritte Winkel CGB ein Drittel von zwey rechten, und mithin sind die Winkel EGD, DGC, CGB einander gleich; folglich sind auch (1, 15. S.) die Scheitelwinkel dieser, BGA, AGF, FGE einander gleich, und mithin sind die sechs Winkel, EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE alle einander gleich. Gleiche Winkel aber stehen (3, 26. S.) auf gleichen Bogen; folglich sind die sechs Bogen AB, BC, CD, DE, EF, FA alle einander gleich. Gleiche Bogen aber werden (3, 29. S.) von gleichen geraden Linien abgeschnitten; folglich sind auch die sechs gerade Linien, die gleiche Namen haben, alle einander gleich, und mithin ist ABCDEF ein gleichseitiges Sechseck.

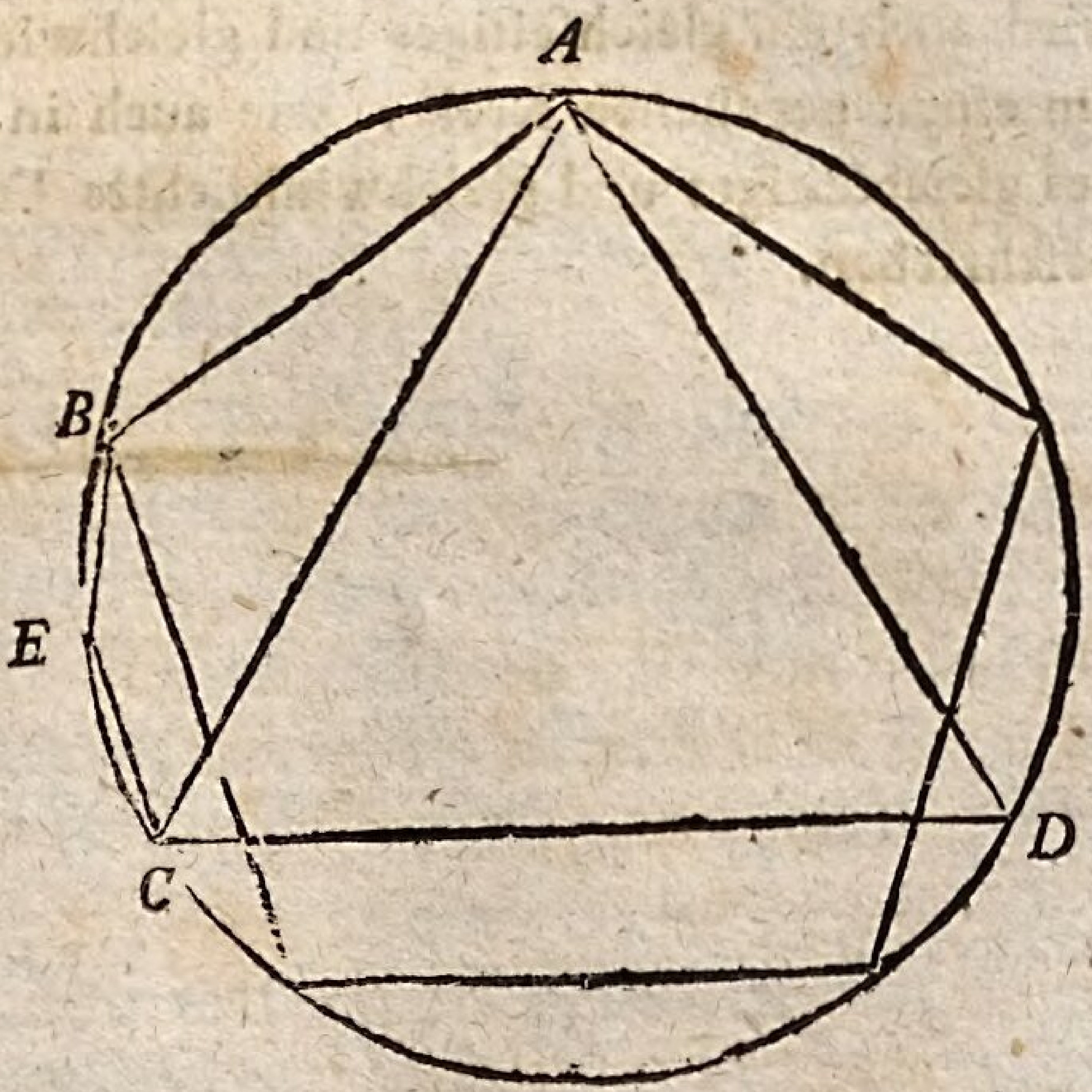
Ich behaupte aber, daſs es auch gleichwinklicht sey. Denn da der Bogen AF dem Bogen ED gleich ist, so ist, wenn man bey

beyderſeits den Bogen ABCD hinzuſezt, der Bogen FABCD dem Bogen EDCBA gleich. Nun ſtehet auf dem Bogen FABCD der Winkel FED, und auf dem Bogen EDCBA der Winkel AFE; folglich iſt (3, 27. S.) der Winkel AFE dem Winkel DEF gleich. Ebenſo kann aber gezeigt werden, daſs auch die übrigen Winkel des Secksecks ABCDEF ſtückweiſe jedem der beyden AFE, FED gleich ſeyen, folglich iſt ABCDEF gleichwinklicht. Es iſt aber gezeigt worden, daſs es auch gleichſeitig ſey, auch iſt es in den Kreis ABCDEF beſchrieben. Demnach iſt in einen gegebenen Kreis ein gleichſeitiges und gleichwinklichtes Sechseck beſchrieben, w. z. v. w.

Zuſaz. Hieraus erhellet, daſs die Seite des Sechsecks dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich ſey. Ferner wenn man durch die Punkte A, B, C, D, E, F Tangenten des Kreiſes zieht, ſo kann auf ähnliche Art, wie bey dem Fünfecke gezeigt worden iſt, um einen gegebenen Kreis ein gleichſeitiges und gleichwinklichtes Sechseck, und in und um ein gegebenes Sechseck ein Kreis beſchrieben werden.

16. *Saz.*

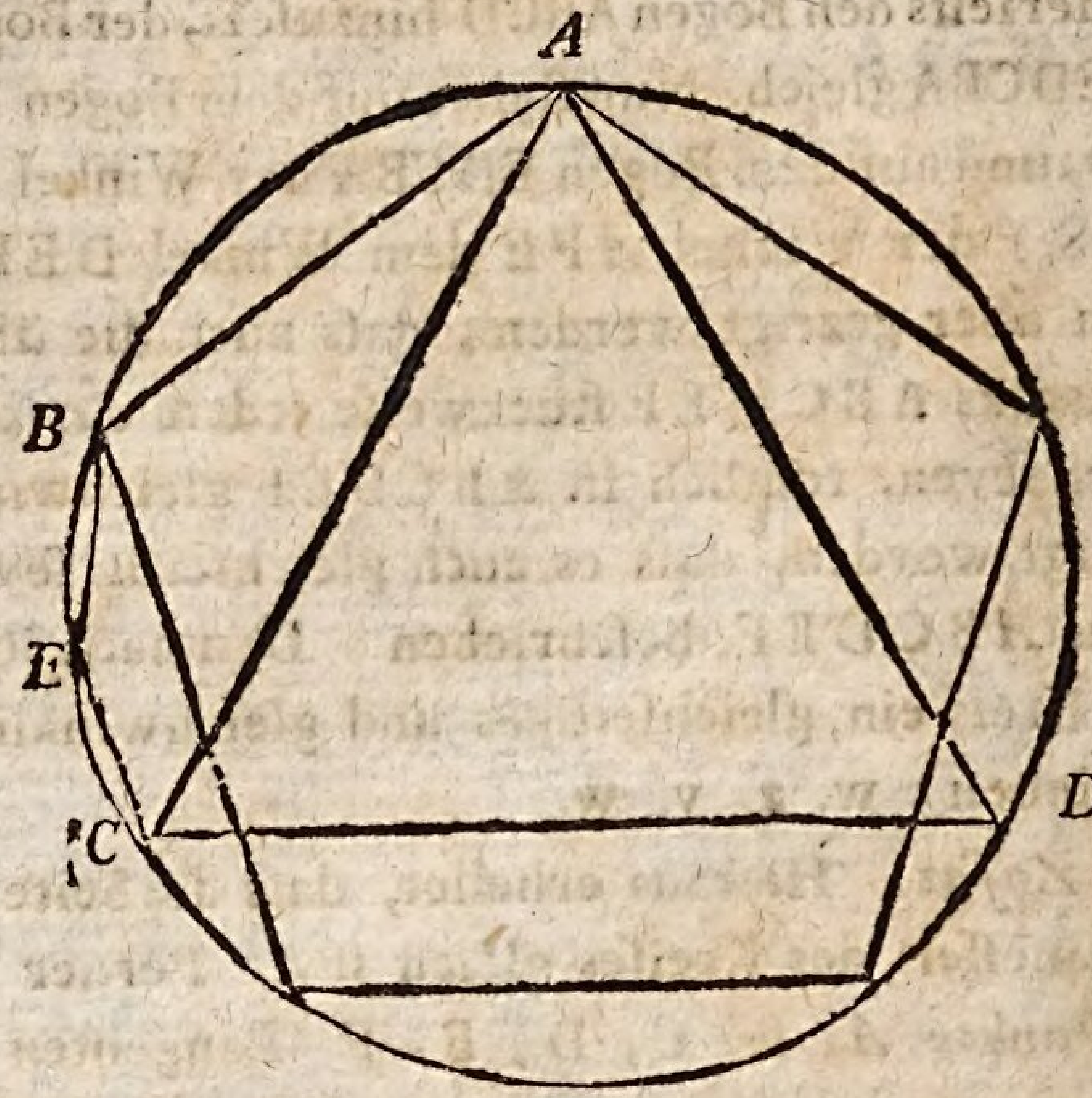
Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein gleichſeitiges und gleichwinklichtes Fünfzehneck zubeſchreiben.



Es ſey der gegebene Kreis ABCD, und man ſoll in denſelben ein gleichſeitiges und gleichwinklichtes Fünfzehneck beſchreiben.

Auflöſung u. *Beweis.* Man beſchreibe in den Kreis ABCD die Seite AC des (4, 2. S.) in denſelben einzuſchrei-

ben



benden gleichseitigen Dreyecks, und die Seite AB des (4, 11. S.) in denselben einzuschreibenden gleichseitigen Fünfecks. Nun enthält der Bogen A*B*C, als das Drittel des ganzen Kreises, fünf solcher *A*bschnitte, dergleichen der ganze Kreis funfzehn enthält. Der Bogen AB aber, als das Fünftel des ganzen Kreises, enthält drey dieser Abschnitte; folglich enthält der Bogen BC zwey derselben. Man halbire daher (3, 30. S.) den *Bo*gen BC in dem Punkte E, so ist sowohl BE als EC ein fünfzehntel des ganzen Kreises ABCD. Wenn man daher die Linien *B*E, EC ziehet, und solche die ihnen gleich sind in *Einem* fort in dem Kreise herumträgt, so wird in denselben ein gleichseitiges nnd gleichwinklichtes Funfzehneck beschrieben werden, w. z. v. w.

Zusaz. Eben so wie beym Fünfecke gezeigt worden ist, wird auch ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Funfzehneck um einen gegebenen Kreis, wie auch in und um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinklichtes Funfzehneck ein Kreis beschrieben.

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

FUENFTES BUCH.

Erklärungen.

1. Eine Grösse ist ein *Theil* von einer andern, die kleinere von der grösseren, wenn die kleinere die grössere misst.

2. Die grössere ist ein *Vielfaches* der kleinern, wenn die kleinere die grössere misst.

3. Das *Verhältniss* (*ratio*) ist eine gegenseitige Beziehung, welche zwey gleichartige Grössen in Ansehung ihrer Vielfachen auf einander haben.

4. Man sagt, Grössen *stehen im Verhältnisse* mit einander, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können.

5. Man sagt, Grössen stehen in *einerley* Verhältnisse, die erste zur zweyten und die dritte zur vierten, wenn jede Gleichvielfache der ersten und dritten zugleich grösser, eben so gross, oder kleiner sind, als jede Gleichvielfache der zweyten und vierten.

6. Grössen, welche einerley Verhältniss haben, heissen *proportionirt*.

7. Wenn aber unter den Gleichvielfachen das Vielfache der ersten grösser ist, als das Vielfache der zweyten, aber das Vielfache der dritten nicht grösser, als das Vielfache der vierten, alsdann sagt man, die erste habe zur zweyten ein *grösseres* Verhältniss, als die dritte zur vierten.

8. Die *Proportion* (*proportio*) ist die Gleichheit der Verhältnisse.

9. Eine Proportion bestehet zum wenigsten aus drey Gliedern.

10. Wenn drey Grössen proportionirt sind, so sagt man, die erste habe zur dritten ein *zweymal höheres* (*duplicirtes*) Verhältniss, als die erste zur zweyten.

11. Wenn vier Grössen proportionirt sind, so sagt man, die erste habe zur vierten ein *dreymal höheres* (*triplicirtes*) Verhältniss, als zur zweyten, und so fort immer um eins höher, so lange die Proportion Statt findet.

12. Die Vorderglieder heissen den Vordergliedern und die Hintergieder den Hintergliedern *homolog*.

13. *Verwechselt* (*alterna*) heisst das Verhältniss, wenn man sezt: wie das Vorderglied zum Vordergliede, so das Hinterglied zum Hin- Hintergliede.

14. *Umgekehrt* (*inversa*) heisst das Verhältniss, wenn man sezt: wie das Hinterglied zum Vordergliede, so das Hinterglied zum Vordergliede.

15. *Verbindung* (*compositio*) des Verhältnisses ist, wenn man sezt: das Vorderglied sammt dem Hintergliede, als *eins* betrachtet, zu eben demselben Hintergliede.

16. *Trennug* (*diviſio*) des Verhältniſſes iſt, wenn man ſezt: wie der Ueberſchuſs des Vorderglieds über das Hinterglied zu ebendemſelben Hintergliede.

17. *Wiederkehrend* (*converſa*) heiſst das Verhältniſs, wenn man ſezt: wie das Vorderglied zum Ueberſchuſſe des Vorderglieds über das Hinterglied.

18. Verhältniſs aus der *Gleichheit*, oder *gleichförmiges* Verhältniſs, (*ex aequalitate* ſ. *ex aequo*) iſt, wenn man mehrere Gröſſen und noch einmal die nämliche Anzahl anderer hat, und es iſt: wie bey den erſten die erſte zur lezten, ſo auch bey den zweyten die erſte zur lezten, oder wenn man die äuſſeren Glieder mit Uebergehung der mittleren ſezt.

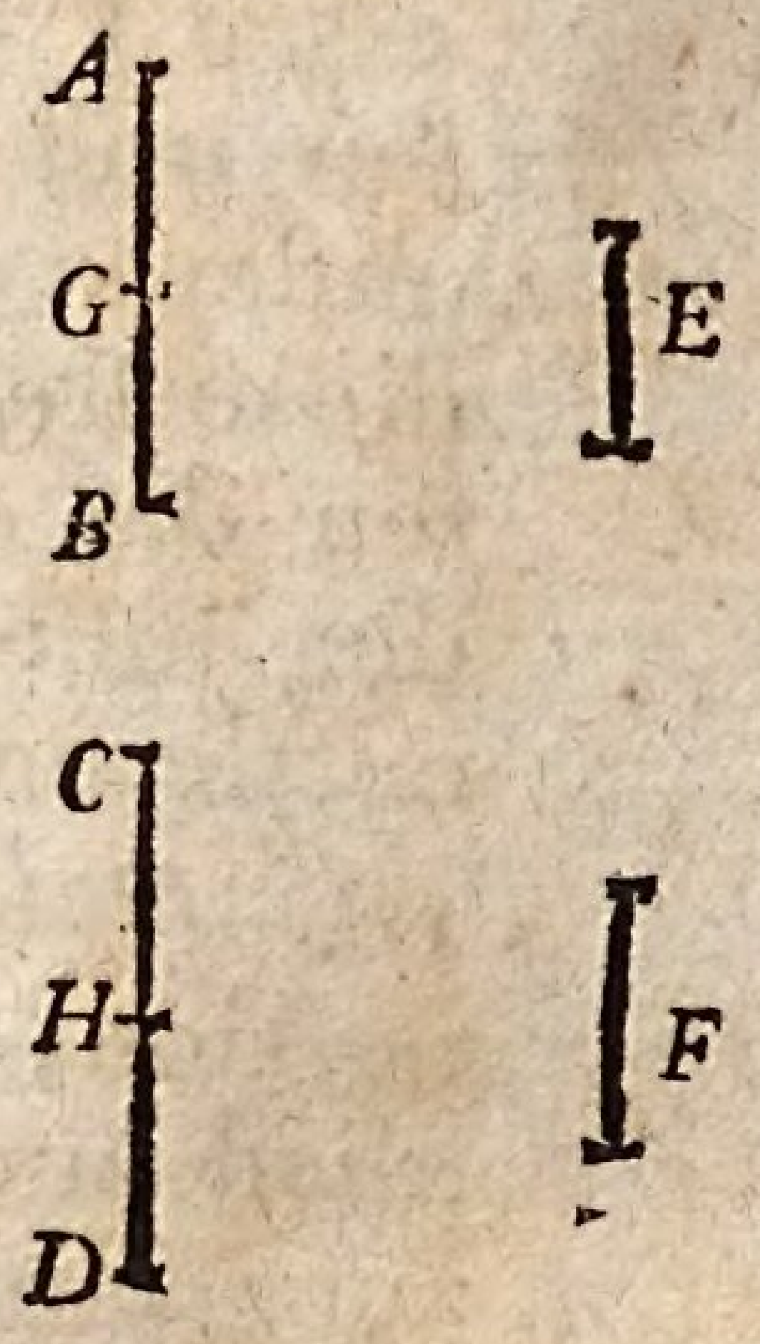
1 . *Unzerſtreut* (*ordinata*) heiſst eine Proportion, wenn man hat: wie das Vorderglied zum Hintergliede, ſo das Vorderglied zum Hintergliede, und zugleich: wie das Hinterglied zu einer andern Gröſſe, ſo das Hinterglied zu einer andern Gröſſe.

20. *Zerſtreut* (*perturbata*) heiſst eine Proportion, wenn man drey Gröſſen und noch einmal die nämliche Anzahl anderer hat, und es iſt: wie bey den erſten das Vorderglied zum Hintergliede, ſo auch bey den zweyten das Vorderglied zum Hintergliede, aber, wie bey den erſten Gröſſen das Hinterglied zu einer andern Gröſſe, ſo bey den zweyten eine andere Gröſſe zum Vordergliede.

1. *Saz.*

Lehrſaz Wenn Gröſſen, ſo viel ihrer ſeyn mögen, von eben ſo vielen andern ſtückweiſe gleichvielfach ſind, ſo ſind alle erſtern von allen leztern ebenſovielfach, wievielfach eine der erſtern von einer der leztern iſt.

Es ſeyen Gröſſen, ſo viel ihrer ſeyn mögen, AB, CD, von eben ſo vielen andern E, F ſtückweiſe gleichvielfach, ſo behaupte ich, daſs die Gröſſen *A*B, CD von den Gröſſen E, F ebenſovielfach ſeyen, als die *A* B von der E iſt.



Beweis. Weil die AB von der E ebenſovielfach, als die CD von der F, iſt, ſo ſind in der CD ebenſoviele Gröſſen, jede gleich der F, wieviel in der AB Gröſſen, jede gleich der E, ſind. Man theile alſo die *A* B in die Theile *A*G, GB, deren jeder der E gleich ſey, und die CD in die Theile CH, HD deren jeder der F gleich ſey, ſo iſt die Menge der Theile CH, HD der Menge der Theile AG, GB gleich. Da nun die AG der E, und die CH der F gleich iſt, ſo ſind auch die *A*G, CH zuſammen den E, F zuſammen gleich. Aus eben den Gründen iſt aber die GB der E, und die HD der F gleich; folglich ſind auch die GB, HD zuſammen den E, F zuſammen gleich. Wieviel alſo in der AB Theile ſind, deren jeder der E gleich iſt, ſoviel ſind in den AB, CD zuſammen Theile, deren jeder den E, F zuſammen gleich iſt; Folglich ſind die AB, CD zuſammen von den E, F zuſammen ebenſovielfach, als die eine AB von der einen E.

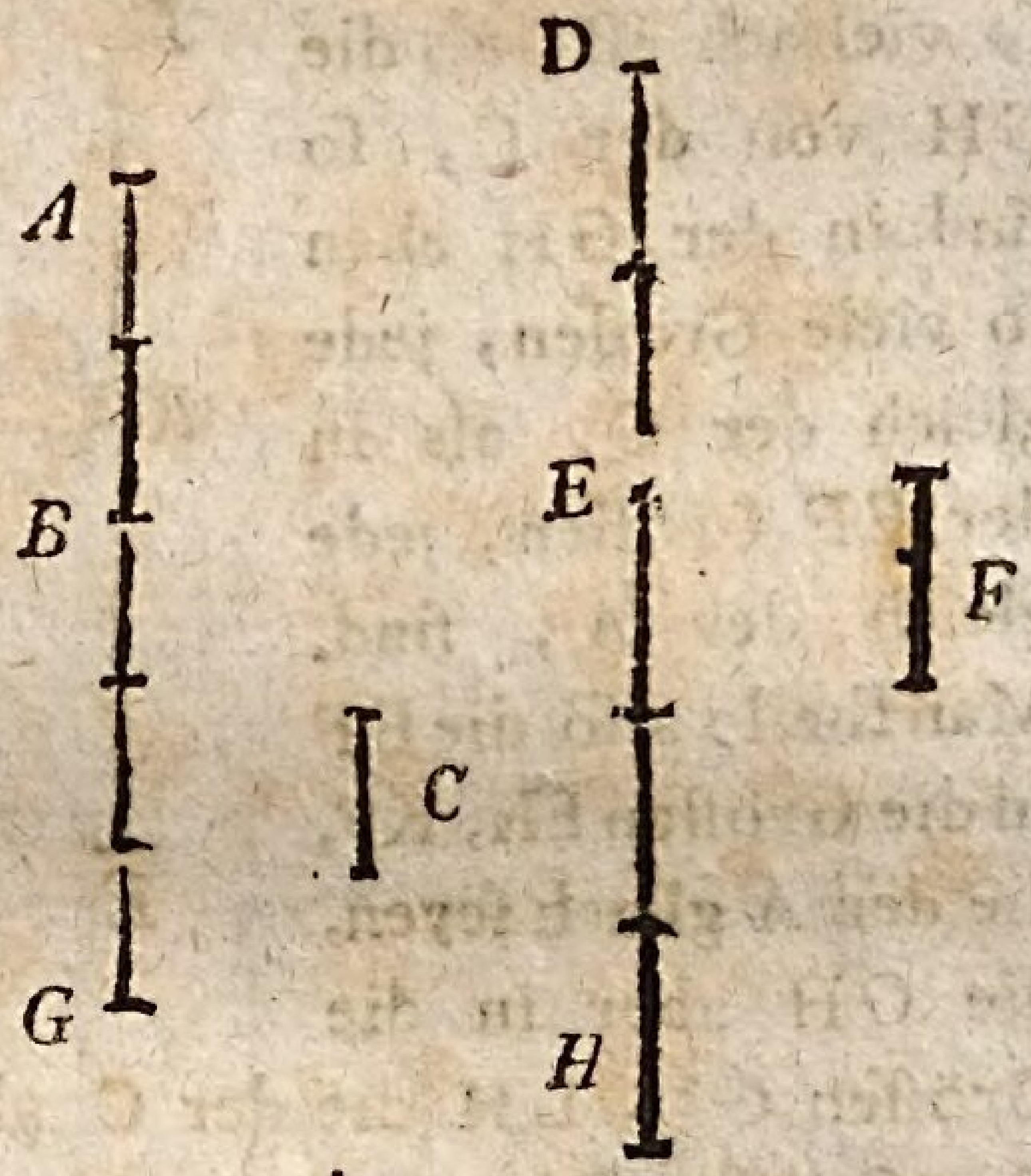
Wenn demnach mehrere Gröſſen u. ſ. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn die erſte Gröſſe von der zweyten ebenſovielfach iſt, als die dritte von der vier-

vierten, und es ist zugleich die fünfte von der zweyten ebensovielfach, als die sechste von der vierten, so sind auch die erste und fünfte zusammen von der zweyten ebensovielfach, als die dritte und sechste zusammen von der vierten.

Es sey die erste *A B* von der zweyten C ebensovielfach, als die dritte D E von der vierten F, zugleich sey auch die fünfte *B* G von der zweyten C ebensovielfach, als die sechste E H von der vierten F, so behaupte ich, dass die erste und fünfte zusammen A G, von der zweyten C ebensovielfach sey, als die dritte und sechste zusammen D H, von der vierten F.



Beweis. Da die A *B* von der C ebensovielfach ist als die D E von der F, so sind in der D E eben so viele Grössen, jede gleich der F, als in der A *B* Grössen, jede gleich der C, sind. Aus eben den Gründen sind auch in der E H eben so viele Grössen, jede gleich der F, als in der B G Grössen, jede gleich der C, sind. Folglich sind auch in der ganzen D H eben so viele Grössen, jede gleich der F, als in der ganzen A G Grössen, jede gleich der C, sind, und mithin ist die D H von der F ebensovielfach, als die A G von der C, und es sind also auch die erste und fünfte zusammen, A G von der zweyten C ebensovielfach, als die dritte und sechste zusammen D H von der vierten F.

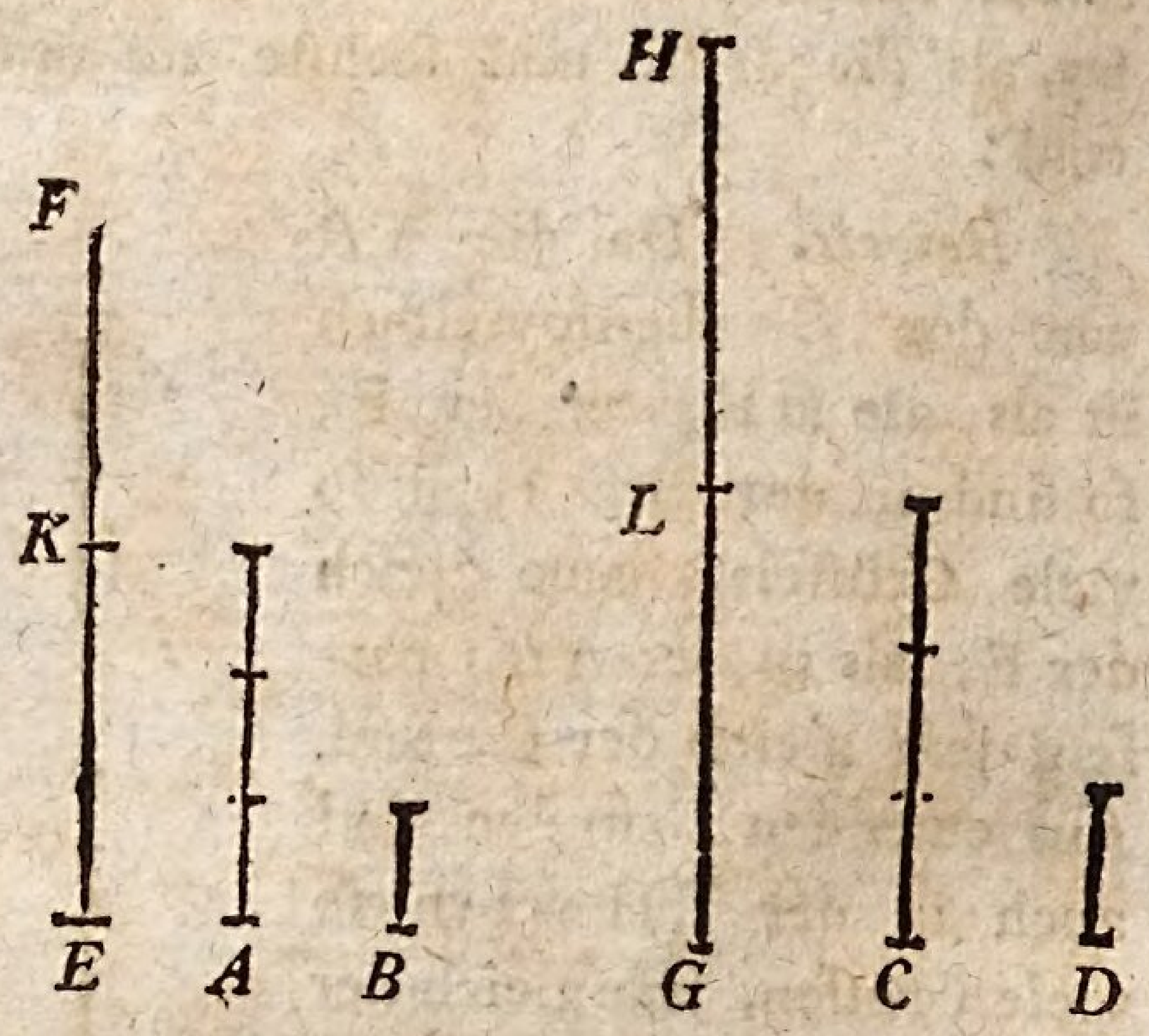
Wenn demnach die erste Grösse von der zweyten u. s. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn die erste Grösse von der zweyten ebensovielfach ist, als die dritte von der

der vierten, und man nimmt Gleichvielfaches der ersten und dritten, so ist auch jedes dieser Vielfachen von jenen beyden gleichvielfach, das eine nämlich von der zweyten, das andere von der vierten.

Es sey die erste Grösse A von der zweyten Grösse *B* eben sovielfach, als die dritte C von der vierten D, und man nehme von den beyden A, C die Gleichvielfachen EF, GH, so behaupte ich, dass auch die EF von der B ebensovielfach sey, als die GH von der D.



Beweis. Da die EF von der A eben so vielfach ist, als die GH von der C, so sind in der GH eben so viele Grössen, jede gleich der C, als in der EF Grössen, jede gleich der A, sind. Man theile also die EF in die Grössen EK, KF, die der A gleich seyen, die GH aber in die Grössen GL, LH die der C gleich seyen, so ist die Menge der Grössen EK, KF der Menge der Grössen GL, LH gleich. Da nun die A von der B ebensovielfach ist, als die C von der D, aber die EK der A, und die GL der C gleich ist, so ist auch die EK von der B ebensovielfach, als die GL von der D. Aus eben den Gründen ist auch die KF von der B ebensovielfach, als die LH von der D. Weil nun die erste EK von der zweyten B ebensovielfach ist, als die dritte GL von der vierten D, aber auch die fünfte KF von der zweyten B ebensovielfach ist, als die sechste LH von der vierten D, so ist (5, 2. S.) die aus der ersten und fünften zusammengesezte EF von der zweyten B eben so vielfach, als die dritte und sechste zusammen, GH von der vierten D.

Wenn demnach die erste Grösse von der zweyten u. s. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

4. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn die erſte Gröſſe zur zweyten ſich verhält, wie die dritte zur vierten, ſo werden auch jede Gleichvielfache der erſten und dritten zu jeden Gleichvielfachen der zweyten und vierten einerley Verhältniſs haben.

Es verhalte ſich die erſte A zur zweyten B wie die dritte C zur vierten D, und man nehme nach Belieben von den Gröſſen A, *C* die Gleichvielfachen E, F, von den Gröſſen B, D aber nach Belieben andere Gleichvielfache G, H, ſo behaupte ich, daſs auch die E zu der G ſich verhalte wie die F zu der H.

Beweis. Man nehme von den Gröſſen E, F die Gleichvielfachen K, L, und von den Gröſſen G, H, die Gleichvielfachen M, N. Da nun die E von der A ebenſovielfach iſt, als die F von der C, und man von den Gröſſen E, F die Gleichvielfachen K, L genommen hat, ſo iſt (5, 3. S.) die K von der A ebenſovielfach, als die L von der C. *A*us eben den Gründen iſt auch die M von der *B* ebenſovielfach, als die N von der D. Da nun A zu *B* ſich verhält wie C zu D, und man von den Gröſſen A, *C* die Gleichvielfachen K, L und von den Gröſſen *B*, D nach *B*elieben andere Gleichvielfache M, N genommen hat, ſo iſt (5, 5. Erkl.) die L zugleich gröſſer, eben ſo groſs, oder kleiner, als die N, je nachdem die K gröſſer, eben ſo groſs, oder



klei

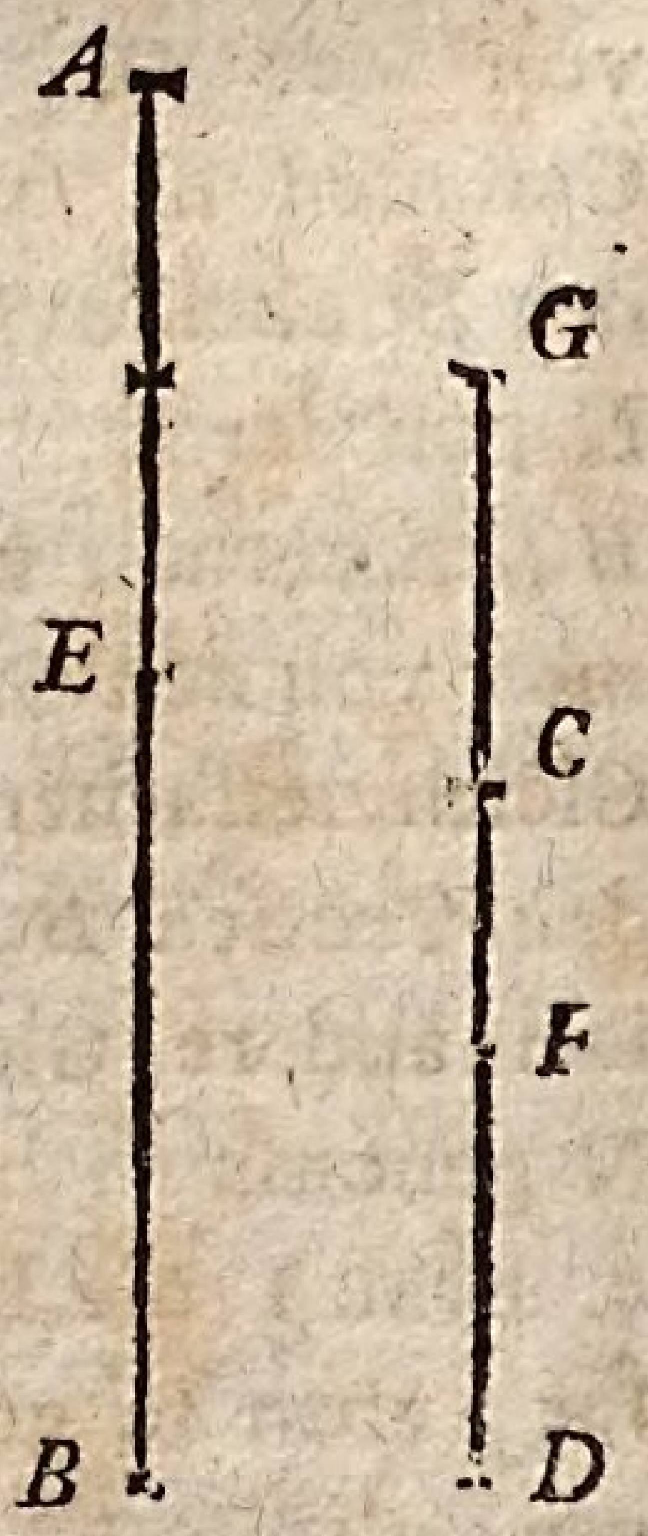
kleiner ist, als die M. Auch sind die K, L von den beyden E, F Gleichvielfache, die M, N aber von den G, H nach *Be*lieben andere Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die E zu der G wie die F zu der H.

Wenn demnach die erste Grösse zu der zweyten u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Da nun gezeigt worden ist, dass, je nachdem die K grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die M, auch die L grösser, eben so gross, oder kleiner, als die N, sey, so erhellet, dass auch, je nachdem die M grösser, eben so gross oder kleiner ist, als die K, auch die N grösser, eben so gross, oder kleiner sey, als die L, und daher verhält sich auch G zu E wie H zu F. Hieraus aber ist klar, dass, wenn vier Grössen propotionirt sind, sie auch umgekehrt proportionirt seyen.

5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine Grösse von einer andern ebensovielfach ist, als ein Stück der ersten von einem Stücke der zweyten, so ist auch der Rest der ersten vom Reste der zweyten ebensovielfach, als die ganze erste von der ganzen zweyten.



Es sey die Grösse AB von der CD ebensovielfach, als das Stück AE von dem Stücke CF, so behaupte ich, dass auch der Rest EB von dem Reste FD ebensovielfach sey, als die ganze A*B* von der ganzen CD.

Beweis. Man mache die E*B* von der CG ebensovielfach, als die AE von der CF ist. Da nun (5, 1. S.) die AE von der *C*F ebensovielfach ist, als die AB von der GF, und da man sezt, dass die AE von der FC ebensovielfach sey, als die AB von der CD, so ist die AB von den beyden GF, CD gleichvielfach, und daher die GF der CD gleich.

Man

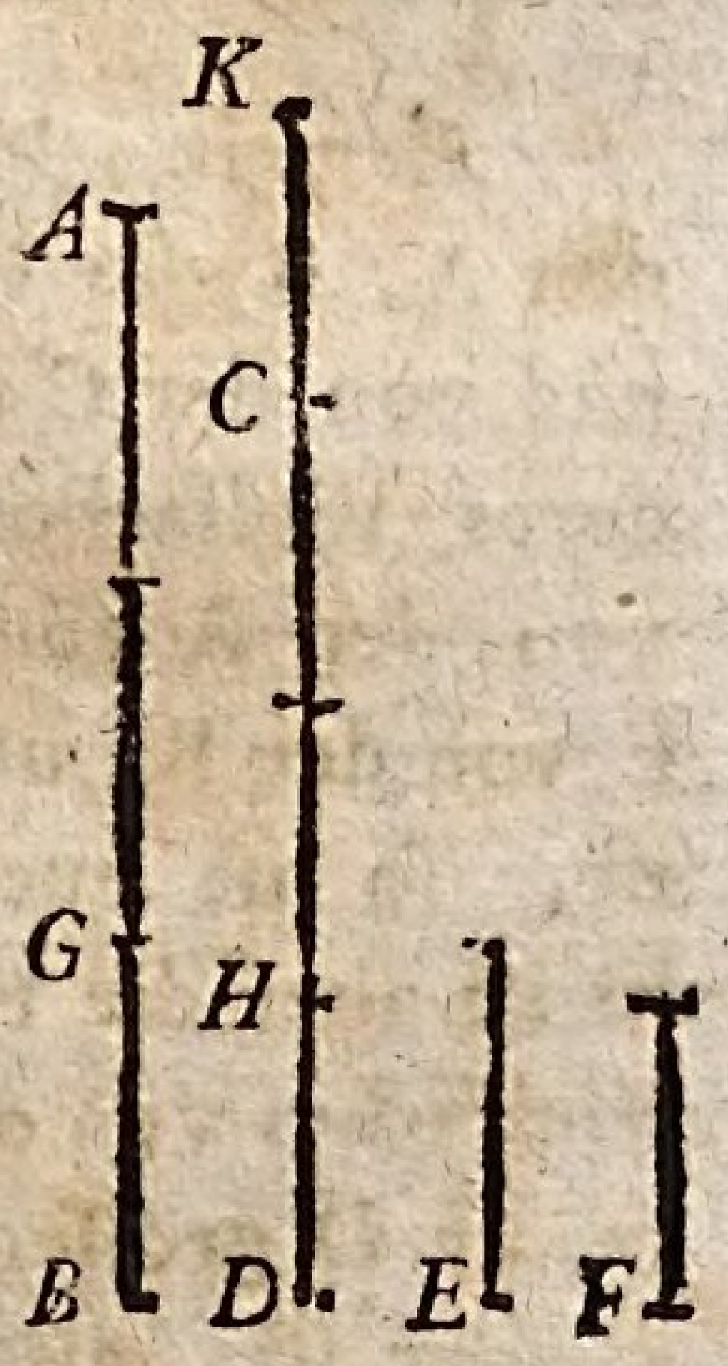
Man nehme von den beyden die CF weg, so ist der Rest GC dem Reste DF gleich. Da nun die AE von der CF ebensovielfach ist, als die EB von der CG, und die CG der DF gleich ist, so ist auch die AE von der CF ebensovielfach, als die EB von der FD. Nach der Voraussezung aber ist die AE von der CF ebensovielfach, als die AB von der CD; Folglich ist auch der Rest EB von dem Reste FD ebensovielfach, als die ganze AB von der ganzen CD.

Wenn demnach eine Grösse von einer andern u. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Grössen von zwey andern gleichvielfach sind, und es sind auch Stücke der beyden ersten von eben diesen zwey andern gleichvielfach, so sind auch die Reste entweder denselben gleich, oder Gleichvielfache von ihnen.

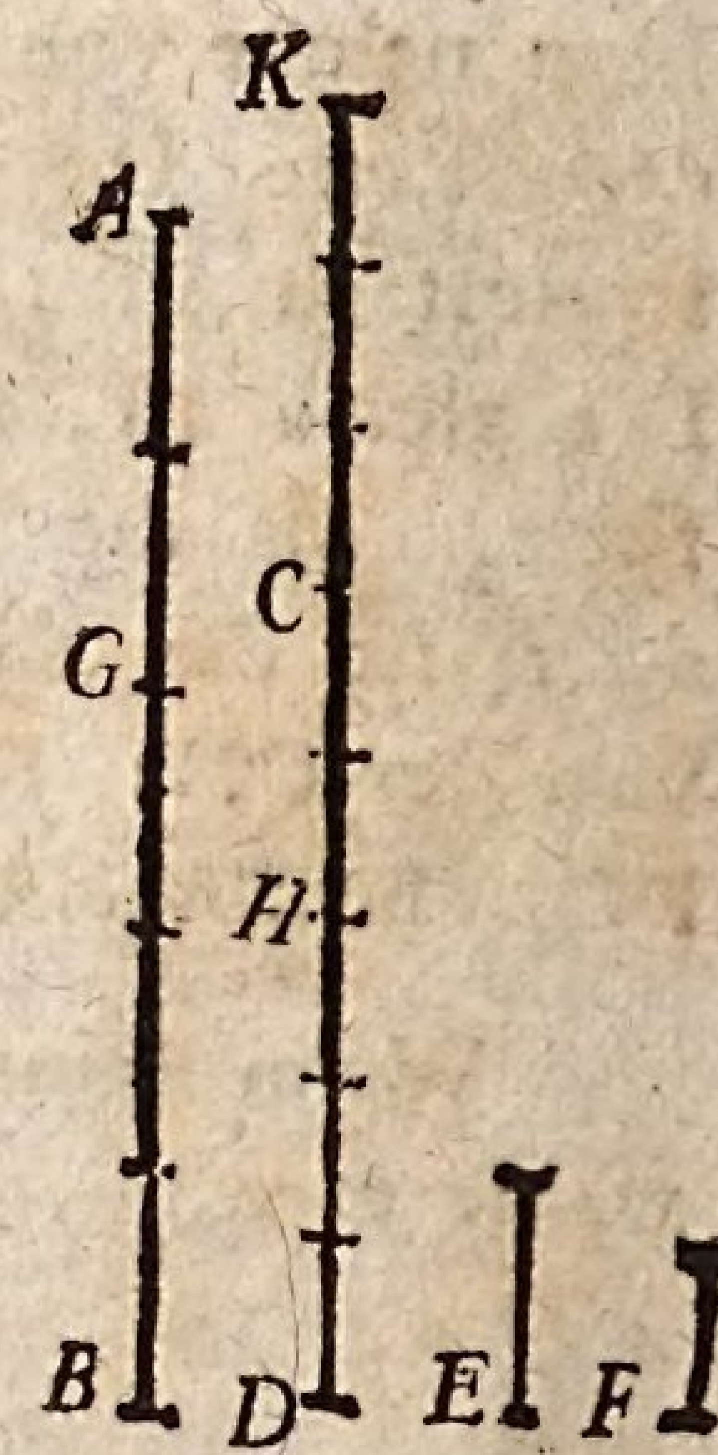
Es seyen zwey Grössen AB, CD von zwey andern E, F gleichvielfach, und es seyen auch die Stücke AG, CH der beyden ersten von den nämlichen andern E, F gleichvielfach, so behaupte ich, dass auch die Reste GB, HD entweder den beyden E, F gleich, oder deren Gleichvielfache seyen.



Beweis. Es sey *erstens* die GB der E gleich, so behaupte ich, dass auch die HD der F gleich sey. Man mache nämlich die CK der F gleich. Da nun die AG von der E ebensovielfach ist, als die CH von der F, und die GB der E die CK aber der F gleich ist, so ist (5, 2. S.) auch die AB von der E ebensovielfach, als die KH von der F. Es ist aber angenommen, dass die AB von der E eben sovielfach sey, als die CD von der F; folglich ist die KH von der F ebensovielfach, als die CD. Da nun die beyden KH, CD von der

F

F gleichvielfach sind, so ist die KH der CD gleich. Man nehme von beyden die CH weg, so ist der Rest KC dem Reste HD gleich. Aber die KC ist der F gleich; folglich istauch die HD der F gleich. Wenn also die GB der E gleich ist, so ist auch die HD der F gleich.



Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass, wenn die *GB* ein Vielfaches von der E ist, die HD das Gleichvielfache von der F sey.

Wenn demnach zwey Grössen u. s. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

Lehrsaz. Gleiche Grössen haben zu *einer* Grösse, und *eine* Grösse hat zu gleichen Grössen einerley Verhältniss.

Es seyen zwey gleiche Grössen *A*, B und eine andere beliebige Grösse C, so behaupte ich, dass jede der beyden *A*, B zu der C, und dass auch die *C* zu jeder von den beyden *A*, B einerley Verhältniss habe.



Beweis. Man nehme von den beyden A, B die Gleichvielfachen D, E, und von der C nach Belieben ein anderes Vielfaches F. Da nun die D von der A ebensovielfach ist, als die E von der B, und da die A der B gleich ist, so ist auch die D der E gleich. Es ist aber die F ein anderes beliebiges Vielfaches von der C. Je nachdem also die D grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die F, so ist auch die E grösser, eben so gross, oder kleiner, als die F. Auch sind die D, E von den beyden A, B Gleichviel-

vielfache, die F aber ist ein anderes beliebiges Vielfaches von der C; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die B zu der C.

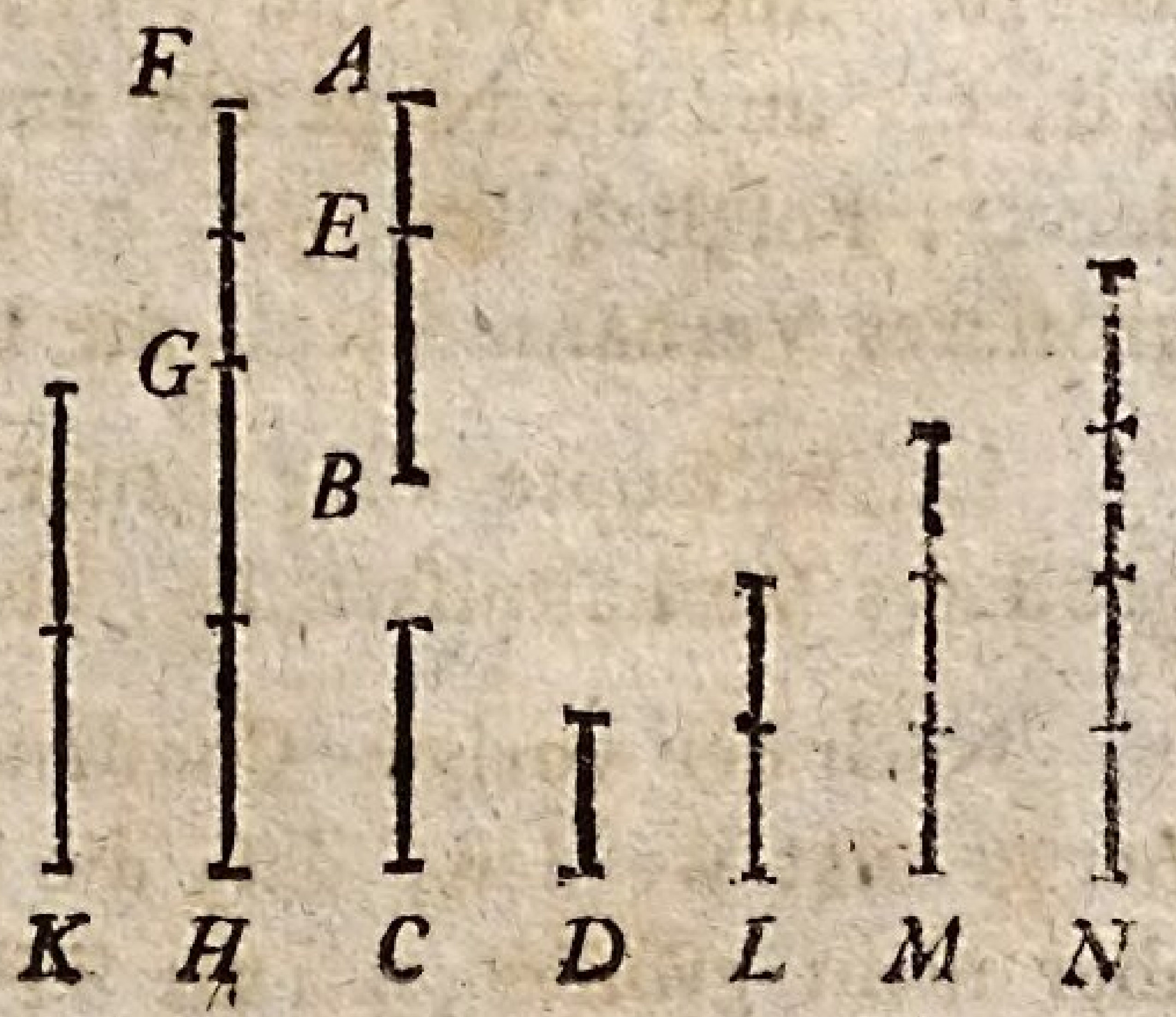
Ich behaupte aber ferner, dass auch die C zu jeder von den beyden A, B einerley Verhältniss habe. Denn nach der nämlichen Construction kann auf ähnliche Art gezeigt werden, dass die D der E gleich, die F aber eine andere Grösse sey. Je nachdem nun die F grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die D, so ist sie auch grösser, eben so gross, oder kleiner, als die E. Auch ist die F ein Vielfaches von der C, die D, E aber sind ander beliebige Gleichvielfache von den beyden A, B; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die C zu der A wie die C zu der B.

Demnach haben gleiche Grössen u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

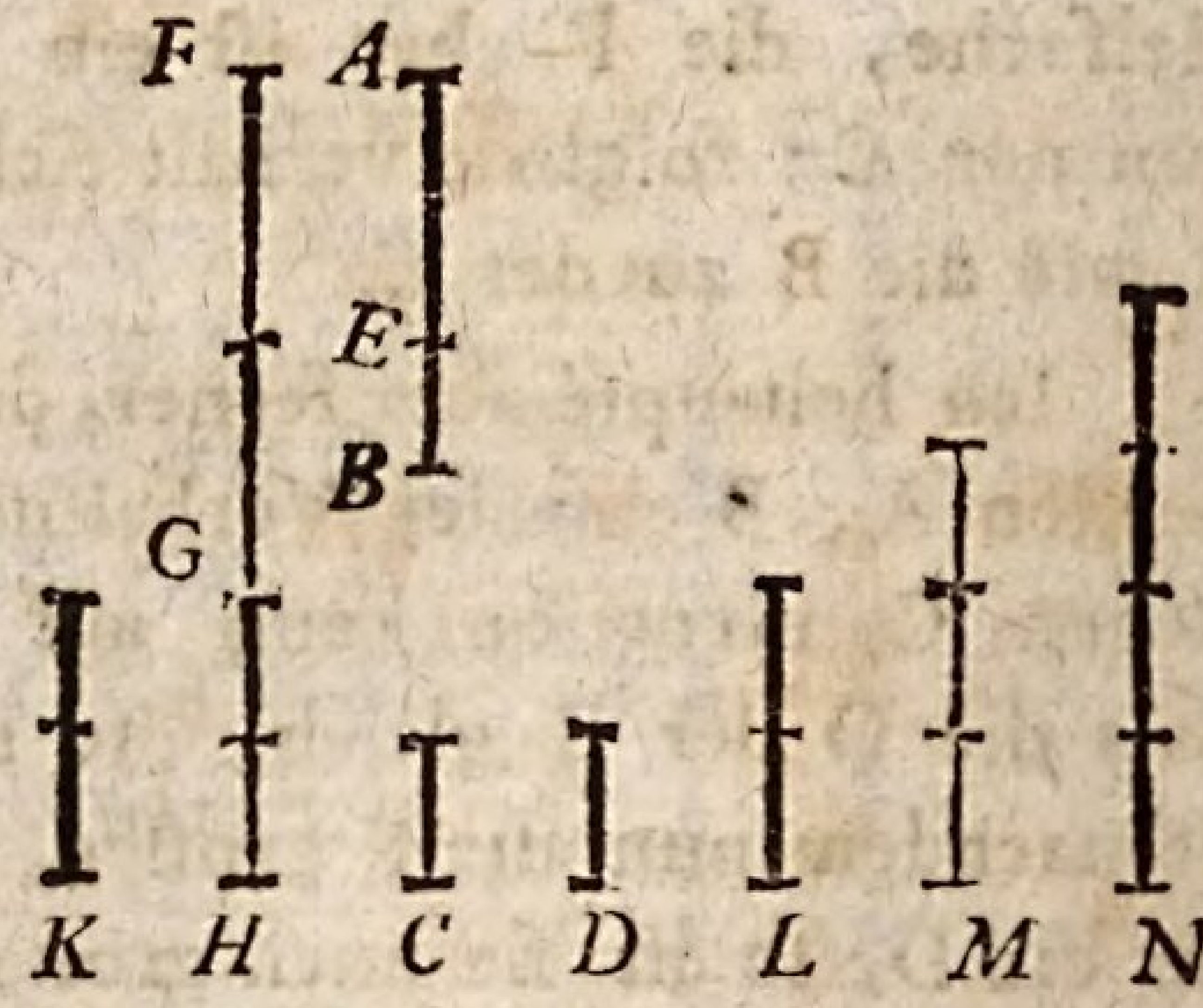
Lehrsaz. Von ungleichen Grössen hat die grössere zu ebenderselben Grösse ein grösseres Verhältniss, als die kleinere; und ebendieselbe Grösse hat zu der kleinern ein grösseres Verhältniss, als zu der grösseren.

Es seyen die ungleichen Grössen A, B, C und zwar sey die AB grösser, als die C, ferner sey eine andere beliebige Grösse D, so behaupte ich, dass die AB zu der D ein grösseres Verhältniss habe, als die C zu der D, und dass die D zu der C ein grösseres Verhältniss habe, als zu der AB.



Beweis. Da die AB grösser ist, als die C, so mache man (1, 3. S.) der C die BE gleich, so wird (5, 4. Erkl.) die kleinere von den beyden AE, EB vervielfältigt einmal grösser werden, als die D. Es sey erstlich die AE kleiner, als die EB, man vervielfältige die AE, bis sie grösser

wird



wird, als die D, und es ſey die F G das Vielfache von A E, welches gröſſer iſt, als die D, nun mache man die G H von der E B und die K von der C ebenſovielfach, als die F G von der A E iſt. Hierauf nehme man von der D das Doppelte L, das Dreyfache M, und ſo fort das um eins höhere Vielfache, bis man auf ein Vielfaches von der D kommt, was zunächſt gröſſer iſt, als die *K.* Man nehme dieſes alſo, und es ſey die N das Vierfache von D. und zunächſt gröſſer, als K. Da nun die K zunächſt kleiner iſt, als die N, ſo iſt die K nicht kleiner, als die M. Und da die F G von der A E ebenſovielfach iſt, als die G H von der E B, ſo iſt (5, I. S.) auch die F G von der A E ebenſovielfach, als die F H von der A B. Es iſt aber die F G von der A E ebenſovielfach, als die K von der C; folglich iſt auch die F H von der A B ebenſovtelfach, als die K von der C, und daher ſind die F H, K von den beyden A B, C gleichvielfach. Ferner da die G H von der E B ebenſovielfach iſt, als die K von der C, und die E B der C gleich iſt; ſo iſt auch die G H der K gleich. Aber die K iſt nicht kleiner, als die M, folglich iſt auch die G H nicht kleiner, als die M. Nach der Conſtruction aber iſt die F G gröſſer, als die D; folglich iſt auch die ganze F H gröſſer, als die beyden D, M zuſammen. Aber die beyden D, M zuſammen ſind der N gleich; folglich iſt die F H gröſſer, als die N; die K aber iſt nicht gröſſer, als die N. Auch ſind die F H, K Gleichvielfache der beyden A B, C, und die N iſt ein anderes beliebiges Vielfaches von der D; Folglich hat (5, 7. Erkl.) die A B zu der D ein gröſſeres Verhältniſs, als die C zu der D.

Ich behaupte aber ferner, daſs auch die D zu der C ein gröſſeres Verhältniſs habe, als die D zu der A B.

Nach der vorigen Conſtruction kann nämlich auf ähnliche Art gezeigt werden, daſs die N zwar gröſſer ſey, als die K, aber nicht gröſſer, als die F H. Es iſt aber N ein Vielfaches von der D, und die F H, K ſind andere Gleichvielfache von

den

den beyden AB, C; folglich hat (5, 7. Erkl.) die D zu der C ein gröſſeres Verhältniſs, als die D zu der AB.

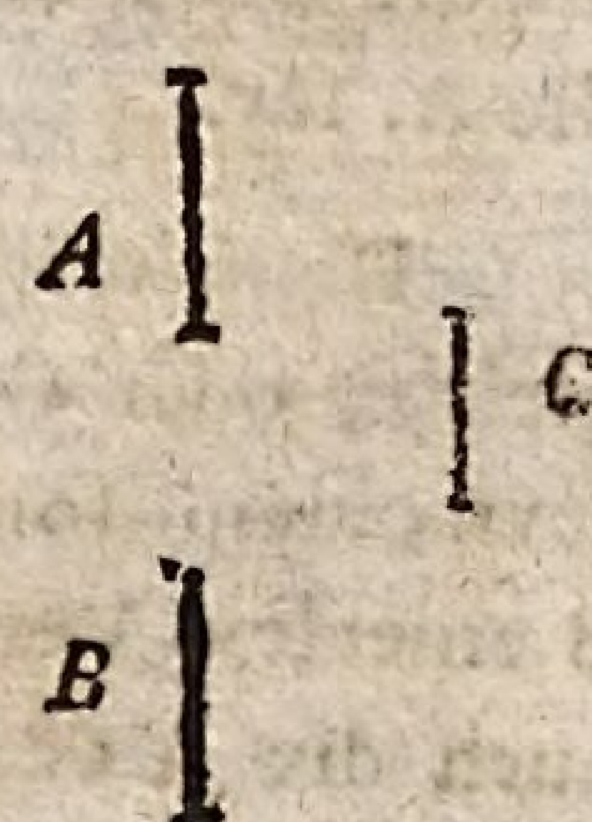
Es ſey aber *zweytens* die AE gröſſer, als die EB, ſo wird (5, 4. Erkl.) die kleinere EB vervielfältigt einmal gröſſer, als die D, werden. Man vervielfältige ſie, und es ſey die GH ein Vielfaches von der EB, aber gröſſer, als die D. Man mache nun die FG von der AE und die K von der C ebenſovielfach, als die GH von der EB iſt. Nun kann, auf ähnliche Art wie zuvor, gezeigt werden, daſs die FH von der K und die AB von der C Gleichvielfache ſeyen. Man nehme ferner eben ſo von der D ein Vielfaches N, was zunächſt gröſſer, als die FG, ſey, ſo iſt wiederum die FG nicht kleiner, als die M. Es iſt aber die GH gröſſer, als die D; folglich iſt die ganze FH gröſſer, als die D, M zuſammen, das heiſst gröſſer, als die N. Die K aber iſt nicht gröſſer, als die N, weil die FG, welche gröſſer, als die GH, das heiſst, gröſſer, als die K, iſt, doch die N nicht übertrift. Und ſo kann auf ähnliche Art, wie zuvor, der Beweis geendiget werden.

Demnach hat von zwey ungleichen Gröſſen u. ſ. w. w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrſaz. Gröſſen, die zu *einer* dritten einerley Verhältniſs haben, ſind einander gleich, und ſolche, zu welchen *eine* dritte einerley Verhältniſs hat, ſind auch einander gleich.

Es habe jede der beyden Gröſſen A, B zu der dritten C einerley Verhältniſs, ſo behaupte ich, daſs die A der B gleich ſey.



Beweis. Denn wäre ſie ihr nicht gleich, ſo hätten (5, 8. S.) nicht die beyden A, B zu der dritten C einerley Verhältniſs. Dies haben ſie aber; folglich iſt die A der B gleich.

Es habe ferner die C zu den beyden A, B einerley Verhältniſs, ſo behaupte ich, daſs die A der B gleich ſey.

Denn

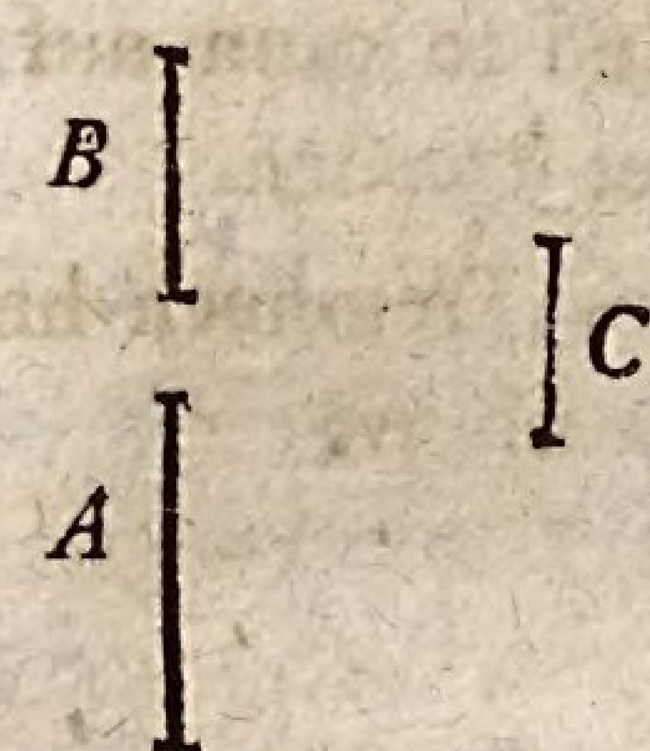
Denn wäre ſie es nicht, ſo hätte (5, 8. S.) nicht die C zu den beyden A, B einerley Verhältniſs. Dies hat ſie aber; folglich iſt die A der B gleich,

Gröſſen alſo, die zu *einer* dritten u. ſ. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrſaz. Von Gröſſen, die zu einerley Gröſſe ein Verhältniſs haben, iſt diejenige die gröſſere, welche das gröſſere Verhältniſs hat; diejenige aber, zu welcher einerley Gröſſe ein gröſſeres Verhältniſs hat, iſt die kleinere.

Es habe die A zu der C ein gröſſeres Verhältniſs, als die B zu der C, ſo behaupte ich, daſs die A gröſſer, als die B, ſey.



Beweis. Denn wenn dies nicht wäre, ſo iſt entweder die A der B gleich, oder ſie iſt kleiner, als ſie. Nun kann die A der B nicht gleich ſeyn, da ſonſt (5, 7. S.) die beyden A, B, zu der dritten C einerley Verhältniſs hätten. Dies haben ſie aber nicht; folglich iſt auch die *A* der B nicht gleich. Aber die A iſt auch nicht kleiner, als die B, denn ſonſt hätte (5, 8. S.) die A zu der C ein kleineres Verhältniſs, als die B zu der C. Dies hat ſie aber nicht, folglich iſt auch die A nicht kleiner, als die B. Es iſt aber gezeigt worden, daſs ſie ihr auch nicht gleich ſey; folglich iſt die A gröſſer, als die B.

Es habe ferner die C zu der B ein gröſſeres Verhältniſs, als die C zu der A, ſo behaupte ich, daſs die B kleiner, als die A, ſey.

Denn wäre ſie nicht kleiner, ſo wäre ſie entweder ihr gleich, oder ſie wäre gröſſer. Gleich kann die B der A nicht ſeyn, denn ſonſt hätte (5, 7. S.) die C zu den beyden A, B einerley Verhältniſs. Dies hat ſie aber nicht; folglich iſt auch die A der B nicht gleich. Aber die B iſt auch nicht gröſ-

grösser, als die A, denn sonst hätte (5, 8. S.) die C zu der B ein kleineres Verhältniss, als zu der A. Dies hat sie aber nicht; folglich ist auch die B nicht grösser, als die A. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch nicht gleich sey; folglich ist die B kleiner, als die A.

Demnach ist von Grössen u. s. w. w. z. e. w.

11. *Saz.*

Lehrsaz. Verhältnisse die *einem* dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

Es verhalte sich die A zu der B wie die C zu der D, und die C zu der D wie die E zu der F, so behaupte ich, dass die A zu der B sich verhalte, wie die E zu der F.

Beweis.

Man nehme von den Grössen A, C, E die Gleichvielfachen G, H, K und von den Grössen B, D, F andere beliebige Gleichvielfache L, M, N. Weil nun die A zu der B sich verhält



wie die C zu der D, und man von den Grössen A, C die Gleichvielfachen G, H, und von den Grössen B, D andere beliebige Gleichvielfache L, M genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) je nachdem die G grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die L, auch die H grösser, ebensogross, oder kleiner, als die M. Ferner da die C zu der D sich verhält wie die E zu der F, und man von den Grössen C, E die Gleichvielfachen H, K, von den Grössen D, F aber andere

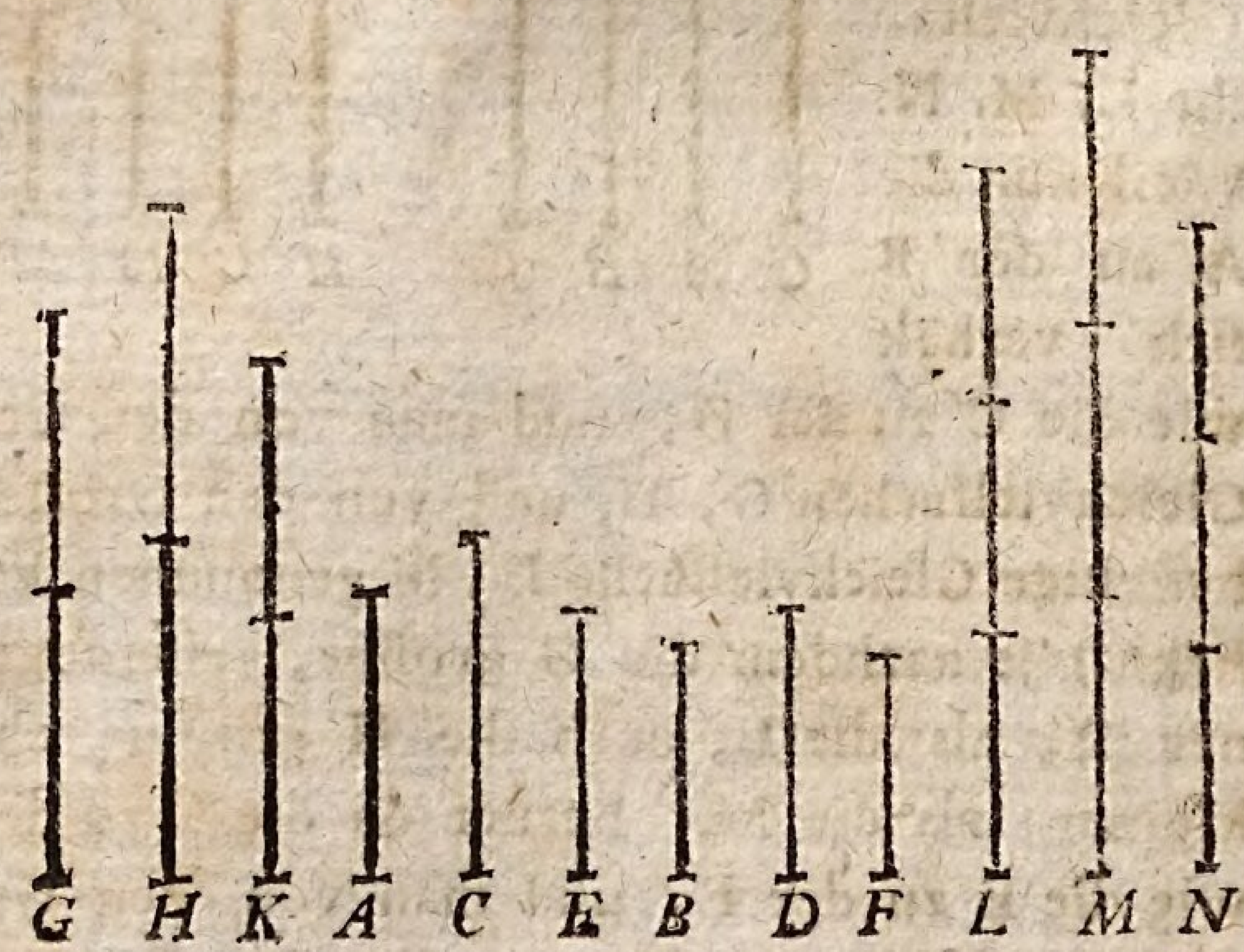
beliebige Gleichvielfache M, N genommen hat, so ist, jenachdem die H grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die M, auch die K grösser, ebensogross, oder kleiner, als die N. Aber jenachdem die H grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die M, so ist auch die G grösser, ebensogross, oder kleiner, als die L; Folglich ist, je nachdem die G grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die L, auch die K grösser, ebensogross, oder kleiner, als die N. Auch sind die G, K von den beyden A, E Gleichvielfache, die L, N aber von den beyden B, F andere beliebige Gleichvielfache; Folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der B wie die E zu der F.

Verhältnisse also, die u. s. w. w. z. v. w.

12. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Grössen, so viel ihrer seyn mögen, proportionirt sind, so verhält sich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen.

Es seyen Grössen, soviel ihrer seyn mögen, A, B, C, D, E, F proportionirt, so dass die A zu der B sich verhalte wie die C zu der D, und wie die E zu der F, so behaupte ich, dass die A zu der B sich verhalte wie die A, C, E zusammen zu den B, D, F zusammen.



Beweis.

Man nehme von den Grössen A, C, E die Gleichvielfachen G, H, K

und

und von den Gröſſen B, D, F andere beliebige Gleichvielfache L, M, N. Da nun die A zu der B ſich verhält wie die C zu der D, und die E zu der F, und da man von den Gröſſen A, C, E die Gleichvielfachen G, H, K, und von den Gröſſen B, D, F andere beliebige Gleichvielfache L, M, N genommen hat, ſo iſt (5, 5. Erkl.) jenachdem die G gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die L, auch die H gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die M, und die K gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die N. Jenachdem alſo die G gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die L, ſo werden auch die G, H, K zuſammen gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner ſeyn, als die L, M, N zuſammen. Auch ſind die G, H, K zuſammen von den A, und den A, C, D zuſammen Gleichvielfache, weil (5, 1. S.), wenn Gröſſen, ſoviel ihrer ſeyn mögen, von ebenſovielen andern ſtückweiſe gleichvielfach ſind, auch alle erſte zuſammen von allen lezten zuſammen ebenſovielfach ſind, als eine der erſten von einer der lezten. Aus eben dem Grunde alſo ſind auch die L und die L, M, N zuſammen von den B und den B, D, F zuſammen gleichvielfach; Folglich verhält ſich (5, 5. Erkl.) die A zu der B wie die A, C, E zuſammen zu den B, D, F zuſammen.

Wenn demnach Gröſſen, ſoviel ihrer ſeyn mögen u. ſ. w. w. z. e. w.

13. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn die erſte Gröſſe zu der zweyten ſich verhält, wie die dritte zur vierten, die dritte zur vierten aber ein gröſſeres Verhältniſs hat, als die fünfte zur ſechſten, ſo hat auch die erſte zur zweyten ein gröſſeres Verhältniſs, als die fünfte zur ſechſten.

Die erſte Gröſſe A verhalte ſich zur zweyten B wie die dritte C zur vierten D, die dritte C aber habe zur vierten D ein gröſſeres Verhältniſs, als die fünfte E zur ſechſten F, ſo behaupte ich, daſs auch die erſte A zur zweyten B

ein grösseres Verhältniss habe, als die fünfte E zur sechsten F.

Beweis. Da die C zu der D ein grösseres Verhältniss hat, als die E zu der F, so sind (5, 7. Erklär.) gewisse Gleichvielfache der Grössen C, E und gewisse andere Gleichvielfache der Grössen D, F so beschaffen, dass zwar das Vielfache von C grösser ist, als das Vielfache von D, aber das Vielfache von E nicht grösser ist, als das Vielfache von F. Man nehme diese Vielfachen, und es seyen von den beyden C, E die G, H gleichvielfach, von den beyden D, F aber die K, L andere beliebige Gleichvielfache, so dass zwar die G grösser sey, als die K, die H aber nicht grösser sey, als die L, auch sey die M von der A ebensovielfach, als die G von der C, und die N von der B ebensovielfach, als die K von der D.



Da nun A zu B sich verhält wie C zu D, und man von den beyden A, C die Gleichvielfachen M, G, und von den beyden B, D andere beliebige Gleichvielfache N, K genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) jenachdem die M grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die N, auch die G grösser ebensogross, oder kleiner, als die K. Aber die G ist grösser, als die *K*; folglich ist auch die M grösser, als die N. Die H aber ist nicht grösser, als die L. Auch sind die M, H von den beyden A, E gleichvielfach, die N, L aber von den beyden B, F andere beliebige Gleichvielfache; folglich hat (5, 7. Erkl.) die A zu der B ein grösseres Verhältniss, als die E zu der F.

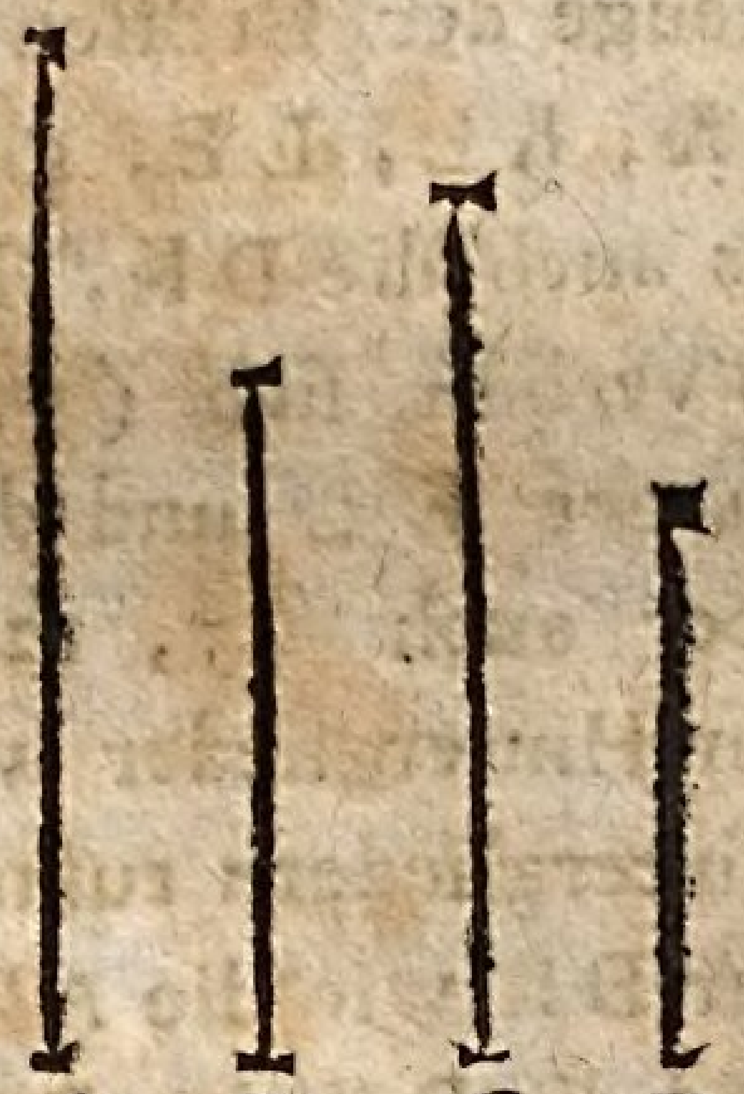
Wenn

Wenn demnach die erste Grösse zur zweyten sich verhält, u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn die erste Grösse zur zweyten sich verhält wie die dritte zur vierten, so ist, je nachdem die erste grösser, ebensogross, oder kleiner, als die dritte, ist, auch die zweyte grösser, ebensogross, oder kleiner, als die vierte.

Die erste Grösse A verhalte sich zur zweyten B wie die dritte C zur vierten D, es sey aber die A grösser, als die C, so behaupte ich, dass auch die B grösser, als die D, sey.



Beweis. Da die A grösser ist, als die C, und die B eine andere beliebige Grösse, so hat (5, 8. S.) die A zu der B ein grösseres Verhältniss, als die C zu der B. Aber wie die A zu der B sich verhält, so verhält sich auch die C zu der D, folglich hat (5, 13. S.) auch die C zu der D ein grösseres Verhältniss, als die C zu der B. Von zwey Grössen aber ist (5, 10. S.) diejenige die kleinere, zu welcher einerley Grösse ein grösseres Verhältniss hat; Folglich ist die D kleiner, als die B, und mithin die B grösser, als die D. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass, jenachdem die A ebensogross, oder kleiner ist, als die C, auch die B ebensogross, oder kleiner sey, als die D.

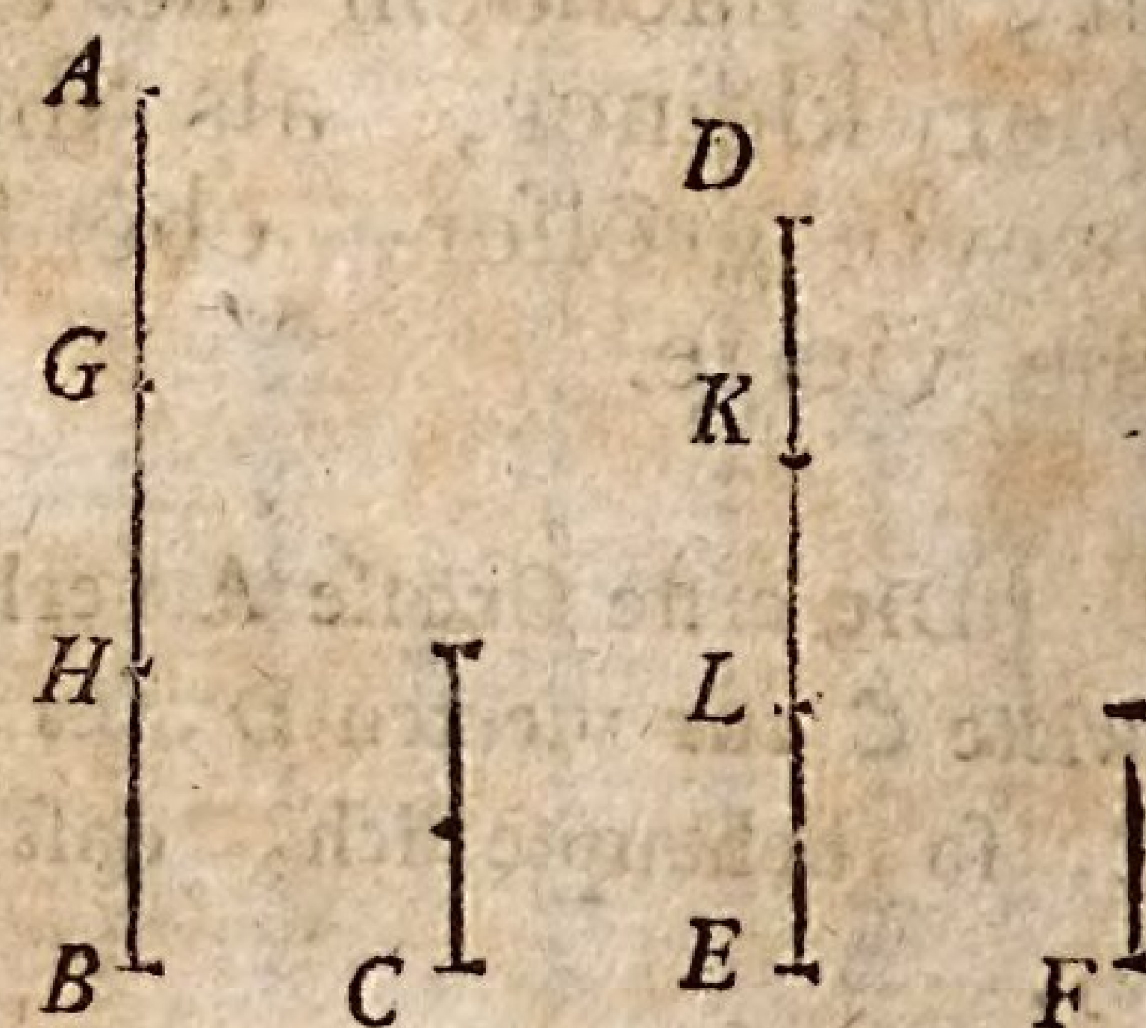
Wenn demnach die erste Grösse zur zweyten u. s. w. w. z. e. w.

15. Saz.

15. *Saz.*

Lehrsaz. Die Theile haben das nämliche Verhältniss zu einander, wie ihre Gleichvielfachen.

Es sey die AB von der C ebensovielfach, als die DE von der F, so behaupte, dass die C zu der F sich verhalte wie die AB zu der DE.



Beweis. Da die AB von der C ebensovielfach ist, als die DE von der F, so sind in der DE ebensoviele Grössen, jede gleich der F, als in der AB Grössen, jede gleich der C, sind. Man theile die AB in die Grössen DK, KL, LE, jede gleich der F, so ist die Menge der Grössen AG, GH, HB der Menge der Grössen DK, KL, LE, gleich. Und da sowohl die AG, GH, HB als auch die DK, KL, LE einander stückweise gleich sind, so verhält sich (5, 7. S.) die AG zu der DK wie die GH zu der KL und die HB zu der LE. Es verhält sich aber auch (5, 12. S.) eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen; Folglich verhält sich die AG zu der DK wie die AB zu der DE. Aber die AG ist der C, und die DK der F gleich; folglich verhält sich die C zu der F wie die AB zu der DE.

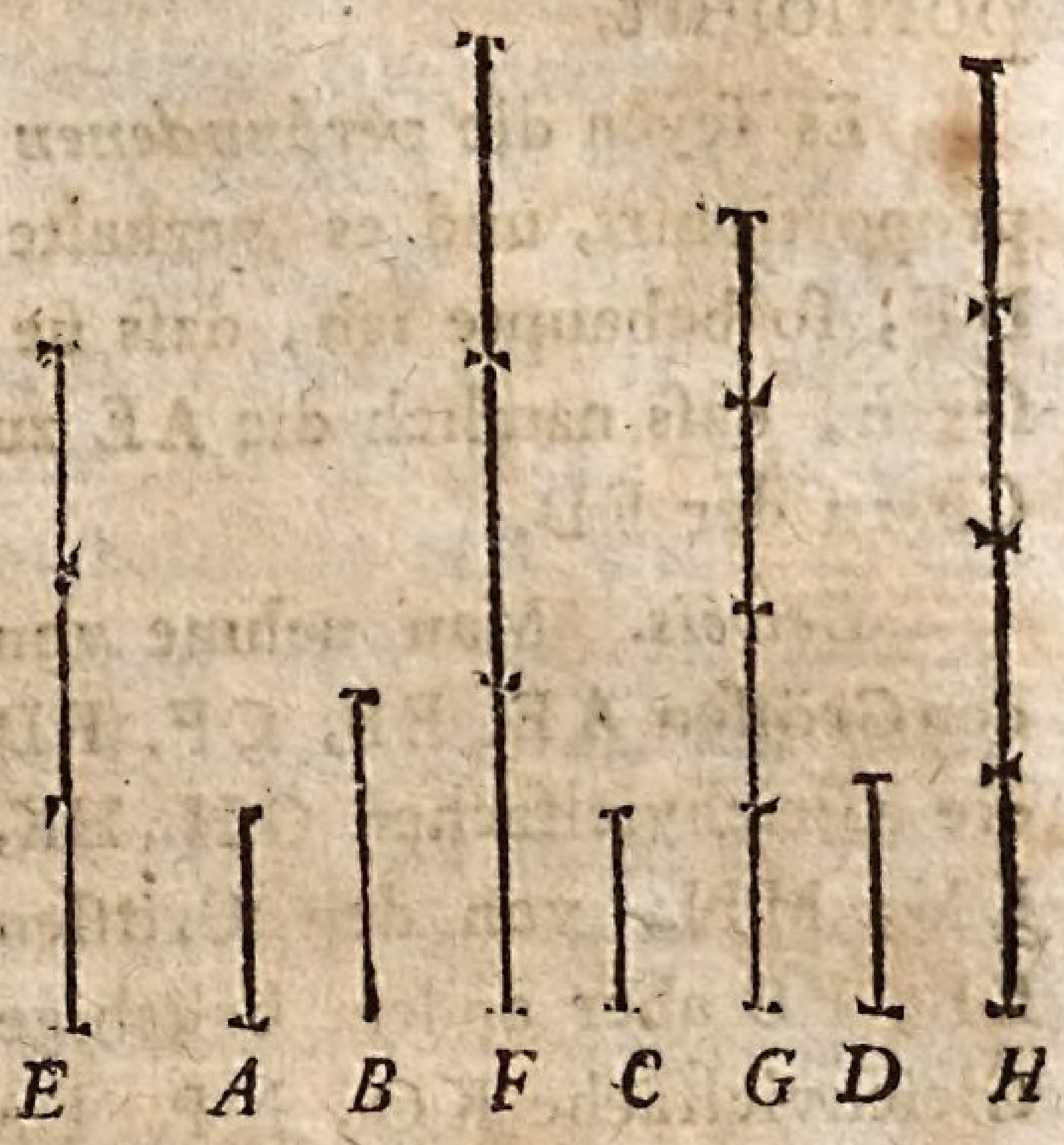
Demnach haben die Theile u. s. w. w. z. e. w.

16. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn vier Grössen proportionirt sind, so sind sie auch *verwechselt* proportionirt.

Es seyen die vier Grössen A, B, C, D proportionirt, und es verhalte sich die A zu der B wie die C zu der D, so be-

behaupte ich, daſs ſie auch verwechſelt proportionirt ſeyen, daſs nämlich die A zu der C ſich verhalte wie die B zu der D.



Beweis. Man nehme von den Gröſſen A, B die Gleichvielfachen E, F, von den Gröſſen C, D aber andere beliebige Gleichvielfache G, H. Da nun die E von der A ebenſovielfach iſt, als die F von der B, aber (5, 15. S.) die Theile das nämliche Verhältniſs zu einander haben, wie ihre Gleichvielfachen, ſo verhält ſich die A zu der B wie die E zu der F. Aber wie ſich die A zu der B verhält, ſo verhält ſich die C zu der D; Folglich verhält ſich auch (5, 11. S.) die C zu der D wie die E zu der F. Ferner da die G, H von den beyden C, D gleichvielfach ſind, ſo verhält ſich die C zu der D wie die G zu der H. Aber wie ſich die C zu der D verhält, ſo verhält ſich die E zu der F; Folglich verhält ſich auch (5, 11. S.) die E zu der F wie die G zu der H. Wenn aber vier Gröſſen proportionirt ſind, ſo iſt (5, 14. S.) je nachdem die erſte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die dritte, auch die zweyte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die vierte. Ie nachdem alſo die E gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die G, ſo iſt auch die F gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die H. Auch ſind die E, F von den beyden A, B gleichvielfach, die G, H aber von den beyden C, D andere beliebige Gleichvielfache; folglich verhält ſich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die B zu der D.

Wenn demnach vier Gröſſen proportionirt ſind u. ſ. w. w. z. e. w.

17. *Saz.*

17. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn Gröſſen *verbunden* proportionirt ſind, ſo ſind ſie auch *getrennt* proportionirt.

Es ſeyen die *verbundenen* Gröſſen AB, BE, CD, *DF* proportionirt, und es verhalte ſich AB zu BE wie C*D* zu DF, ſo behaupte ich, daſs ſie auch *getrennt* proportionirt ſeyen, daſs nämlich die AE zu der EB ſich verhalte wie die CF zu der FD.



Beweis. Man nehme von den Gröſſen AE, EB, CF, FD die Gleichvielfachen GH, HK, LM, MN, von den Gröſſen EB, FD aber andere beliebige Gleichvielfache KO, NP. Da nun die GH von der AE ebenſovielfach iſt, als die HK von der EB, ſo iſt (5, 1. S.) die GH von der AE ebenſovielfach, als die GK von der AB. Es iſt aber die GH von der AE ebenſovielfach, als die LM von der CF; folglich iſt auch die GK von der AB ebenſovielfach, als die LM von der CF. Ferner da die LM von der CF ebenſovielfach iſt, als die MN von der FD, ſo iſt auch die LM von der CF ebenſovielfach, als die LN von der CD. Es war aber die LM von der CF ebenſovielfach, als die GK von der AB; folglich iſt auch die GK von der AB ebenſovielfach, als die LN von der CD, und mithin ſind die GK, LN von den AB, CD gleichvielfach. Ferner da die HK von der EB ebenſovielfach iſt, als die MN von der FD, aber auch die KO von der EB ebenſovielfach iſt, als die NP von der FD, ſo iſt

(5, 2. S.) auch *verbunden* die HO von der EB ebensovielfach, als die MP von der FD. Da aber die AB zu der BE sich verhält wie die CD zu der DF, und man von den beyden AB, CD die Gleichvielfachen GK, LN, von den beyden EB, FD aber andere beliebige Gleichvielfache HO, MP genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) je nachdem die GK grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die HO, auch die LN grösser, ebensogross, oder kleiner, als die MP. Es sey nun die GK grösser, als die HO, und man nehme von beyden die gemeinschaftliche HK weg, so ist die GH grösser, als die KO. Wenn aber die GK grösser ist, als die HO, so ist auch die LN grösser, als die MP; folglich ist die LN grösser, als die MP, und wenn man von beyden die gemeinschaftliche MN wegnimmt, so ist auch die LM grösser als die NP. Wenn also die GH grösser ist, als die KO, so ist auch die LM grösser, als die NP. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass, je nachdem die GH ebensogross, oder kleiner ist, als die KO, auch die LM ebensogross, oder kleiner sey, als die NP. Es sind aber die GH, LM von den beyden AE, CF gleichvielfach, die KO, NP aber von den beyden EB, FD andere beliebige Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die AE zu der EB wie die CF zu der FD.

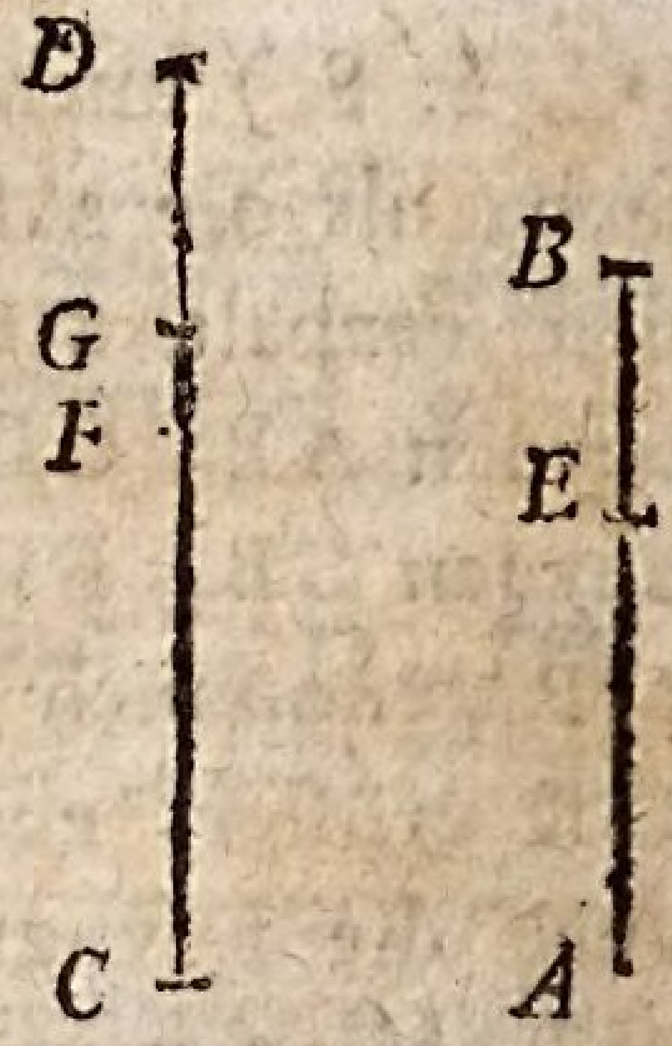
Wenn demnach Grössen *verbunden* proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Grössen *getrennt* proportionirt sind, so sind sie auch *verbunden* proportionirt.

Es seyen die *getrennten* Grössen AE, EB, CF, FD proportionirt, und es verhalte sich die AE zu der EB wie die CF zu der FD, so behaupte ich, dass sie auch *verbunden* proportionirt seyen, dass nämlich die AB zu der BE sich verhalte wie die CD zu der FD.

Be-



Beweis. Verhielte ſich nicht die A B zu der B E wie die C D zu der F D, ſo verhielte ſich die A B zu der B E wie die C D zu einer kleinern oder gröſſern Gröſſe, als die F D iſt. Es ſey erſtlich das vierte Glied dieſer Proportion eine kleinere Gröſſe, als die F D, nämlich die D G. Da nun die A B zu der B E ſich verhält wie die C D zu der D G, ſo ſind dieſe Gröſſen *verbunden* proportionirt; folglich ſind ſie (5, 17. S.) auch *getrennt* proportionirt, und es verhält ſich alſo die A E zu der E B wie die C G zu der G D. Nach der Vorausſezung aber verhält ſich auch die A E zu der E B wie die C F zu der F D; folglich verhält ſich auch (5, 11. S.) die C G zu der G D wie die C F zu der F D. Aber die erſte C G iſt gröſſer, als die dritte C F; folglich iſt (5, 14. S.) auch die zweyte G D gröſſer, als die vierte F D. Sie iſt aber auch kleiner, welches unmöglich iſt; folglich verhält ſich nicht die A B zu der B E wie die C D zu einer Gröſſe, die kleiner wäre, als die F D. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs das vierte Glied dieſer Proportion auch nicht gröſſer ſeyn könne, als die F D; Folglich muſs es die F D ſelbſt ſeyn.

Wenn demnach Gröſſen *verbunden* proportionirt ſind u. ſ. w. w. z. e. w.

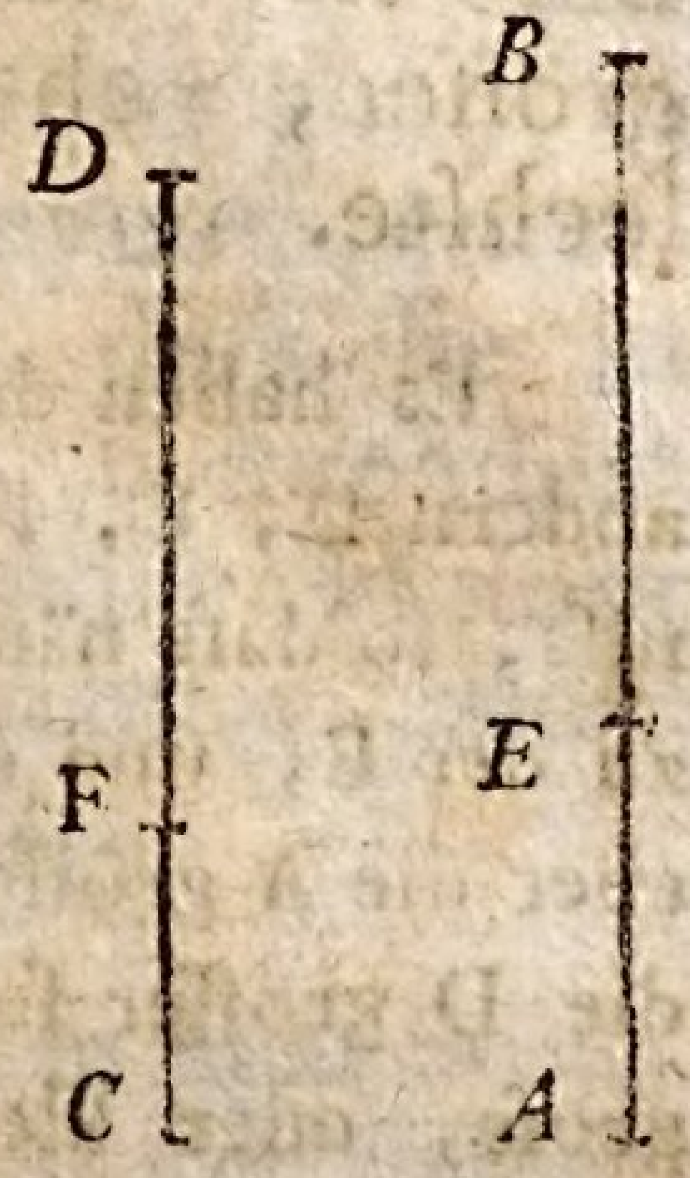
19. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine Gröſſe ſich zu einer andern verhält, wie ein Stück der erſten zu einem Stücke der andern, ſo verhält ſich auch der Reſt der erſten zum Reſte der andern wie die erſte zur andern.

Es verhalte ſich die Gröſſe A B zu der Gröſſe C D wie das Stück der erſten A E zu dem Stücke der andern C F; ſo behaupte ich, daſs auch der Reſt der erſten E B zum Reſte

der

der andern FD sich verhalte, wie die erste AB zu der andern CD.



Beweis. Da die AB zu der CD sich verhält wie die AE zu der CF, so verhält sich (5, 17. S.) auch *verwechselt* die BA zu der AE wie die DC zu der CF. Und da diese Grössen *verbunden* proportionirt sind, so sind sie (5, 17. S.) auch *getrennt* proportionirt, und es verhält sich also die BE zu der EA wie die DF zu der FC, und wiederum *verwechselt* die BE zu der DF wie die EA zu der FC. Aber wie die AE zu der CF sich verhält, so verhält sich, nach der Voraussezung, die AB zu der CD. Folglich verhält sich auch (5, 11. S.) der Rest EB zu dem Reste FD wie die ganze AB zu der ganzen CD.

Wenn demnach eine Grösse zu einer andern sich verhält u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Da gezeigt worden ist, dass, wenn die AB zu der CD sich verhält, wie die AE zu der CF, auch die AB zu der CD sich verhalte, wie die EB zu der FD, so verhält sich auch (5, 16. S.) *verwechselt* die AB zu der EB wie die CD zu der FD, und (5, 17. S.) *getrennt* die AE zu der BE wie die CF zu der FD, und (5, 4. Zus.) *umgekehrt* die BE zu der AE wie die FD zu der CF, und (5, 18. S.) *verbunden* die AB zu der AE wie die CD zu der CF. Dies ist aber (5, 17. Erkl.) *zurückkehrend.* Wenn demnach *verbundene* Grössen proportionirt sind, so sind sie auch *zurückkehrend* proportionirt.

20. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey Grössen mit eben so vielen andern, je zwey mit je zweyen einerley Verhältniss haben, so ist, je nachdem die

die erſte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die dritte, auch die vierte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die ſechſte.

Es haben die drey Gröſſen A, B, C zu eben ſo vielen andern D, E, F, je zwey zu je zweyen, einerley Verhältniſs, ſo daſs nämlich die A zu der B ſich verhalte wie die D zu der E, und die B zu der C wie die E zu der F, es ſey aber die A gröſſer, als die C, ſo behaupte ich, daſs auch die D gröſſer ſey, als die F. Wäre aber die A eben ſo groſs, oder kleiner, als die C, ſo behaupte ich, daſs alsdann auch die D eben ſo groſs, oder kleiner ſey, als die F.



Beweis. Da die A gröſſer iſt, als die C, die B aber eine andere beliebige Gröſſe, und da (5, 8. S.) von zwey ungleichen Gröſſen die gröſſere zu einerley Gröſſe ein gröſſeres Verhältniſs hat, als die kleinere, ſo hat die A zu der B ein gröſſeres Verhältniſs, als die C zu der B. Aber wie die A zu der B ſich verhält, ſo verhält ſich auch die D zu der E, und *umgekehrt* die C zu der B wie die F zu der E; folglich hat auch die D zu der E ein gröſſeres Verhältniſs, als die F zu der E. Von Gröſſen aber, die zu einerley Gröſſe ein Verhältniſs haben, iſt (5, 10. Erkl.) diejenige die gröſſere, welche das gröſſere Verhältniſs hat; folglich iſt die D gröſſer, als die F. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs, je nachdem die A ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die C, auch die D ebenſogroſs, oder kleiner ſey, als die F.

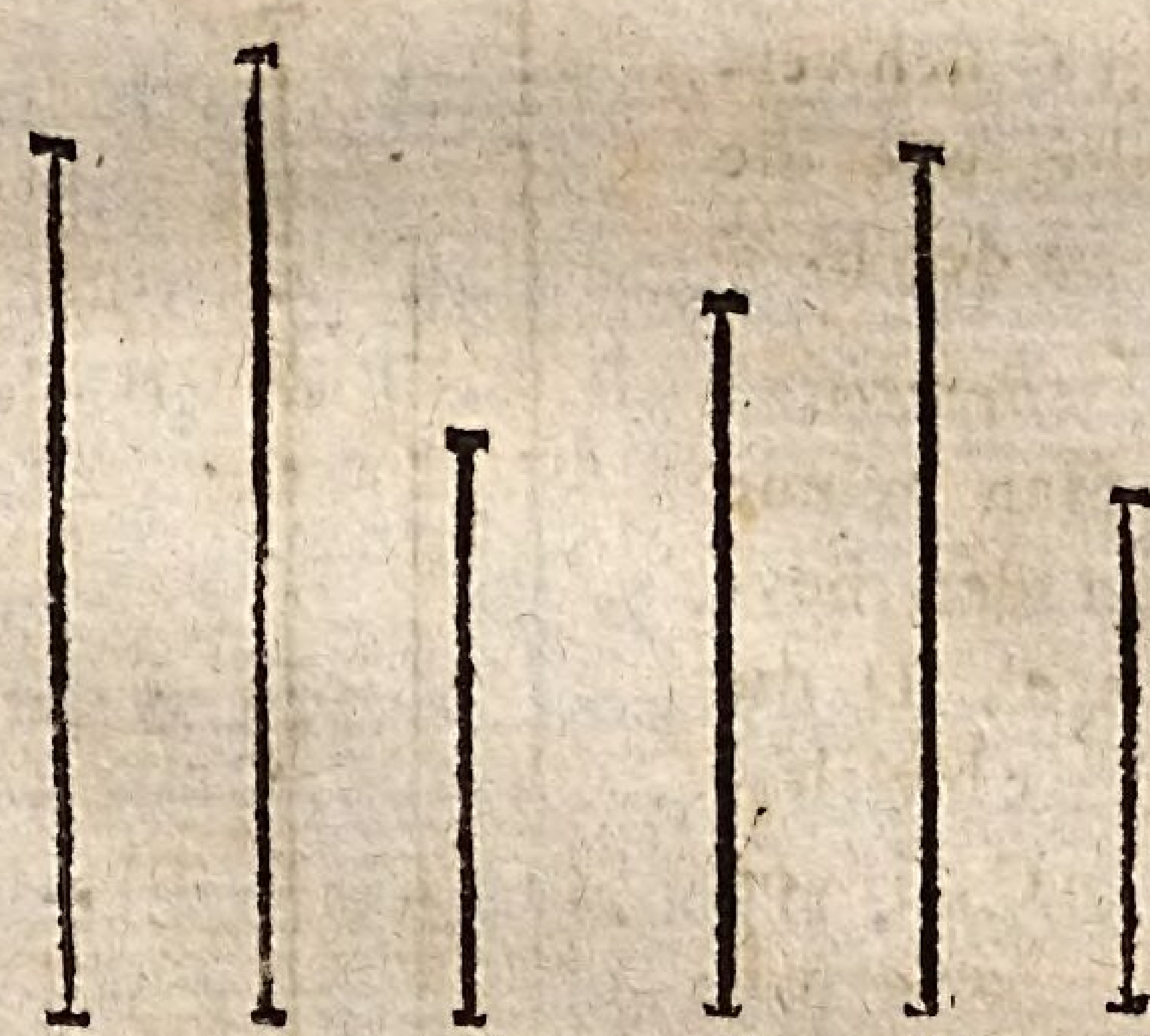
Wenn demnach drey Gröſſen zu eben ſo vielen andern u. ſ. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

21. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey Gröſſen zu eben ſo vielen andern, je zwey zu je zweyen, einerley Verhältniſs haben, aber ſo, daſs ſie in *zerſtreuter* Proportion ſtehen, ſo iſt, je nachdem die erſte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die dritte, auch die vierte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die ſechſte.

Es haben die drey Gröſſen A, B, C zu eben ſo vielen andern D, E, F, je zwey zu je zweyen, einerley Verhältniſs, aber ſo, daſs ſie in zerſtreuter Proportion ſtehen, daſs nämlich die A zu der B ſich verhalte wie die E zu der F, und die B zu der C wie die D zu der E, es ſey aber die A gröſſer, als die C, ſo behaupte ich, daſs auch die D gröſſer, als die F, ſey. Wäre aber die A eben ſo groſs, oder kleiner, als die C, ſo behaupte ich, daſs auch die D eben ſo groſs, oder kleiner, als die F, ſey.



Beweis. Da die A gröſſer, äls die C, die B aber eine andere Gröſſe iſt, ſo hat (5, 8. S.) die A zu der B ein gröſſeres Verhältniſs, als die C zu der B. Aber wie die A zu der B ſich verhält, ſo verhält ſich die E zu der F, und *umgekehrt* die C zu der B wie die E zu der D; folglich hat auch die E zu der F ein gröſſeres Verhältniſs, als die E zu der D. Von zwey Gröſſen aber iſt (5, 10. Erkl.) diejenige die kleinere, zu welcher einerley Gröſſe ein gröſſeres Verhältniſs hat; folglich iſt die F kleiner, als die D, und mithin die D gröſſer, als die F. Auf gleiche Art kann nun

ge-

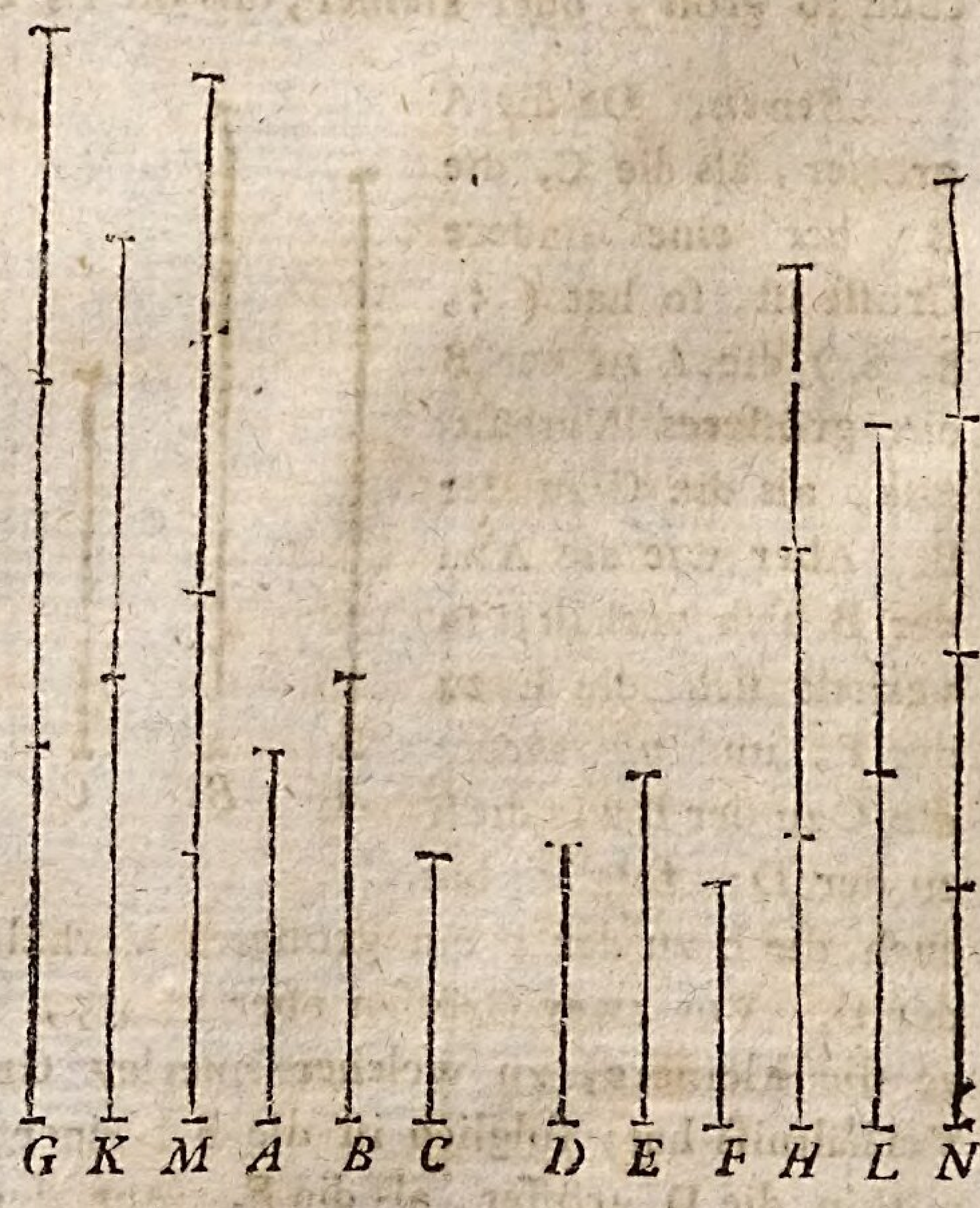
gezeigt werden, dass, je nachdem die A ebensogross, oder kleiner ist, als die C, auch die D ebensogross, oder klei-kleiner sey, als die F.

Wenn demnach drey Grössen zu eben so vielen andern u. s. w.w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Grössen, so viel ihrer seyn mögen, mit eben so vielen andern, je zwey mit je zweyen proportionirt sind, so sind sie auch *gleichförmig* proportionirt.

Es seyen Grössen, so viel ihrer seyn mögen, A, B, C mit eben so vielen andern D, E, F, je zwey mit je zweyen, proportionirt, so dass die A zu der B sich verhalte wie die D zu der E, und die B zu der C wie die E zu der F, so behaupte ich, dass sie auch gleichförmig proportionirt seyen, dass nämlich die A zu der C sich verhalte wie die D zu der F.



Beweis. Man nehme von den beyden A, D die Gleichvielfachen G, H von den beyden B E andere beliebige Gleichvielfache K, L, und von den beyden C, F wiederum andere beliebige

Gleich-

Gleichvielfache M, N. Da nun die A zu der B sich verhält wie die D zu der E, und man von den beyden A, D die Gleichvielfachen G, H, und von den beyden B, E andere beliebige Gleichvielfache K, L genommen hat, so verhält sich (5, 4. S.) die G zu der K wie die H zu der L, und aus eben dem Grunde auch die K zu der M wie die L zu der N. Da nun hier die drey Grössen G, K, M mit eben so vielen andern H, L, N, je zwey mit je zweyen, proportionirt sind, so ist (5, 20. S.) *gleichförmig* je nachdem die G grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die M auch die H grösser, ebensogross, oder kleiner, als die N. Auch sind die G, H von den beyden A, D Gleichvielfache, die M, N, aber von den beyden C, F andere beliebige Gleichvielfache. Folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die D zu der F.

Wenn demnach Grössen so viel ihrer seyn mögen, u. s. w. w. z. e. w.

23. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey Grössen mit ebensovielen andern, je zwey mit je zweyen, proportionirt sind, aber so, dass sie in *zerstreuter* Proportionirt stehen, so sind sie auch *gleichförmig* proportionirt.

Es seyen drey Grössen A, B, C, mit eben so vielen andern D, E, F, je zwey mit je zweyen, proportionirt, aber so, dass sie in *zerstreuter* Proportion stehen, dass nämlich die A zu der B sich verhalte, wie die E zu der F, und die B zu der C wie die D zu der E, so behaupte ich, dass auch die A zu der C sich verhalte wie die D zu der F.

Beweis. Man nehme von den Grössen A, B, D, die Gleichvielfachen G, H, K, von den Grössen C, E, F aber andere beliebige Gleichvielfache L, M, N. Da nun die G, H von den beyden A, B Gleichvielfache sind, die Theile aber (5, 15. S.) sich eben so verhalten wie ihre Gleichvielfachen, so verhält sich die A zu der B wie die G zu der



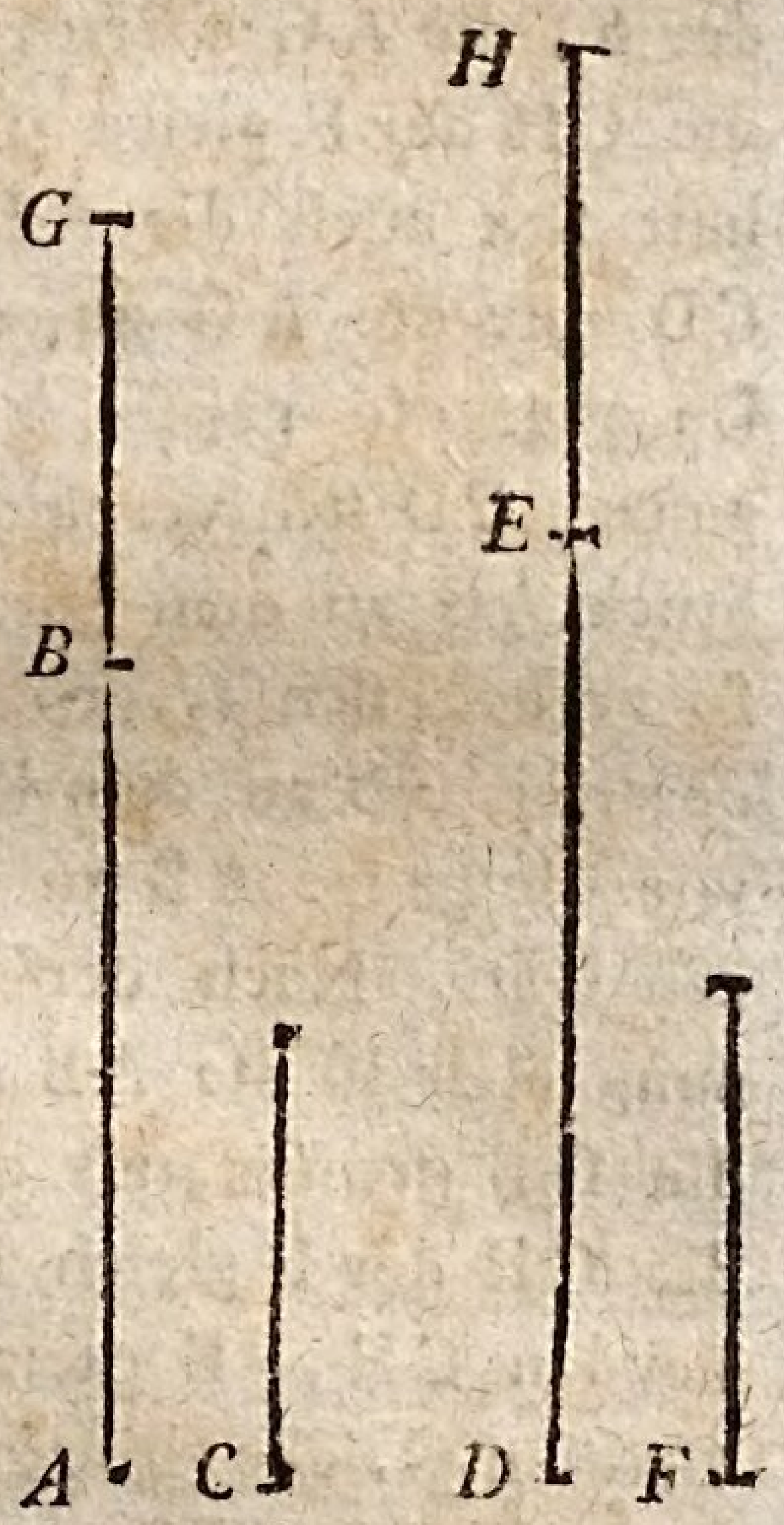
H, und aus gleichem Grunde die E zu der F wie die M zu der N. Auch verhält sich die A zu der B wie die E zu der F; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) die G zu der H wie die M zu der N. Da nun auch die B zu der C sich verhält, wie die D zu der E, und man von den beyden B, D die Gleichvielfachen H, K, von den beyden C, E aber andere beliebige Gleichvielfache L, M genommen hat, so verhält sich (5, 15. S.) die H zu der L wie die K zu der M. Es ist aber gezeigt worden, dass die G zu der H sich verhalte, wie die M zu der N. Da nun drey Grössen G, H, L mit eben so vielen andern K, M, N, je zwey mit je zweyen, proportionirt sind, und ihre Proportion *zerstreut* ist, so ist (5, 21. S.) *gleichförmig* je nachdem die *G* grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die L, auch die K grösser, ebensogross, oder kleiner, als die N. Es sind aber die G, K von den beyden A, D, die L, N aber von den beyden C, F Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die D zu der F.

Wenn demnach drey Grössen mit ebensovielen andern u. s. w. w. z. e. w.

24 *Saz.*

Lehrſaz. Wenn die erſte Gröſſe zur zweyten ſich verhält, wie die dritte zur vierten, aber auch die fünfte zur zweyten wie die ſechſte zur vierten, ſo verhält ſich auch *verbunden* die erſte und fünfte zur zweyten, wie die dritte und ſechſte zur vierten.

Es verhalte ſich die erſte Gröſſe A B zur zweyten C wie dit dritte D E zur vierten F, aber auch die fünfte B G zur zweyten C wie die ſechſte E H zur vierten F, ſo behaupte ich, daſs auch *verbunden* die erſte und fünfte A G zur zweyten C ſich verhalte wie die dritte und ſechſte D H zur vierten F.



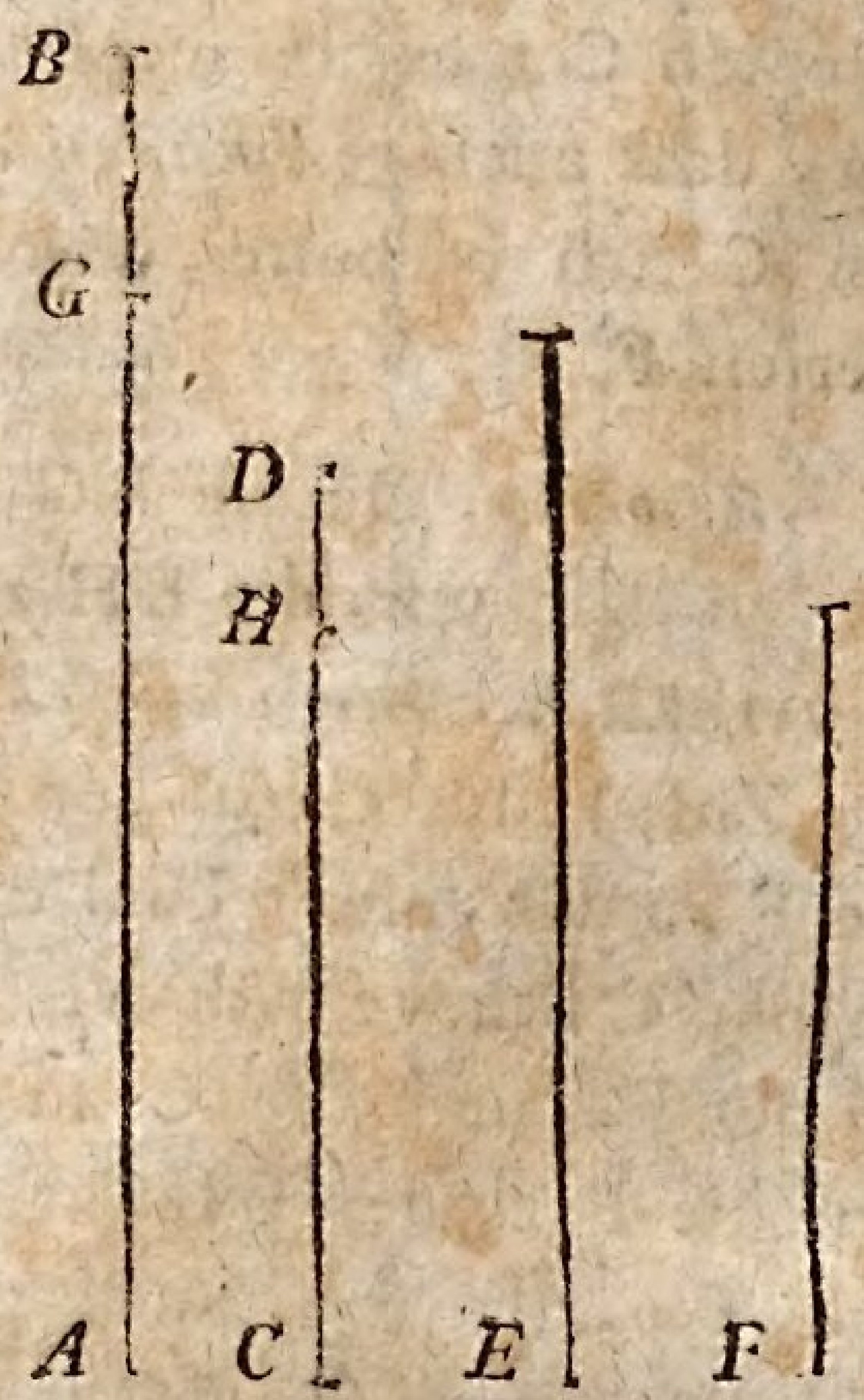
Beweis. Da die B G zu der C ſich verhält wie die E H zu der F, ſo verhält ſich auch *umgekehrt* (5, 4. Zuſ.) die C zu der B G wie die F zu der E H. Und da die A B zu der C ſich verhält wie die D E zu der F, und die C zu der B G wie die F zu der E H, ſo verhält ſich (5, 22. S.) auch gleichförmig die A B zu der B G wie die D E zu der E H. Da aber hier *getrennte* Gröſſen proportionirt ſind, ſo ſind ſie (5, 18. S.) auch *verbunden* proportionirt; Es verhält ſich alſo die A G zu der G B wie die D H zu der H E. Es verhält ſich aber auch die G B zu der C wie die E H zu der F; folglich verhält ſich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die A G zu der C wie die D H zu der F.

Wenn demnach die erſte Gröſſe zur zweyten ſich verhält u. ſ. w. w. z. e. w.

25. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn vier Grössen proportionirt sind, so ist die grösste und die kleinste von ihnen grösser, als die beyden übrigen.

Es seyen die vier Grössen AB, CD, E, F proportionirt, so dass die AB zu der CD sich verhalte wie die E zu der F, und es sey die AB die grösste von ihnen, die F aber die kleinste, so behaupte ich, dass die AB, F grösser seyen, als die CD, E.



Beweis. Man mache der E die AG, der F aber die CH gleich. Da nun die AB zu der CD sich verhält wie die E zu der F, die AG aber der E, und die CH der F gleich ist, so verhält sich auch die AB zu der CD wie die AG zu der CH. Da aber die ganze AB zu der ganzen CD sich verhält wie das Stück AG zu dem Stücke CH, so verhält sich (5, 19. S.) auch der Rest GB zu dem Reste HD wie die ganze AB zu der ganzen CD. Nach der Voraussezung aber ist die AB grösser, als die CD, folglich ist auch die GB grösser, als die HD. Da aber die AG der E, und die CH der F gleich ist, so sind die beyden AG, F den beyden CH, E gleich. Wenn man aber zu ungleichen Grössen gleiches hinzusezt, so sind die Ganzen ungleich. Da nun die GB, HD ungleich sind, und die GB die grössere ist, so sind, wenn man zu der GB die AG, F, zu der HD aber die CH, E hinzusezt, die beyden AB, F grösser, als die beyden CD, E.

Wenn demnach vier Grössen proportionirt sind, u. s. w. w. z. e. w.

EUKLIDS ELEMENTE.

SECHSTES BUCH.

Erklärungen.

1. *Aehnliche geradlinigte Figuren* sind, in welchen alle Winkel einander stückweise gleich, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind.

2. *Umgekehrt* sind Figuren (in Ansehung des Verhältnisses ihrer Seiten), wenn in beyden Vorderglieder und Hinterglieder der Verhältnisse sind.

3. Eine gerade Linie heisst *nach äusserem und mittlerem Verhältnisse* getheilt, wenn die ganze sich zum grössern Abschnitte, wie der grössere Abschnitt zum kleinern, verhält.

4. Die *Höhe* einer Figur ist ein Loth, das von der Spize derselben nach der Grundlinie gefällt wird.

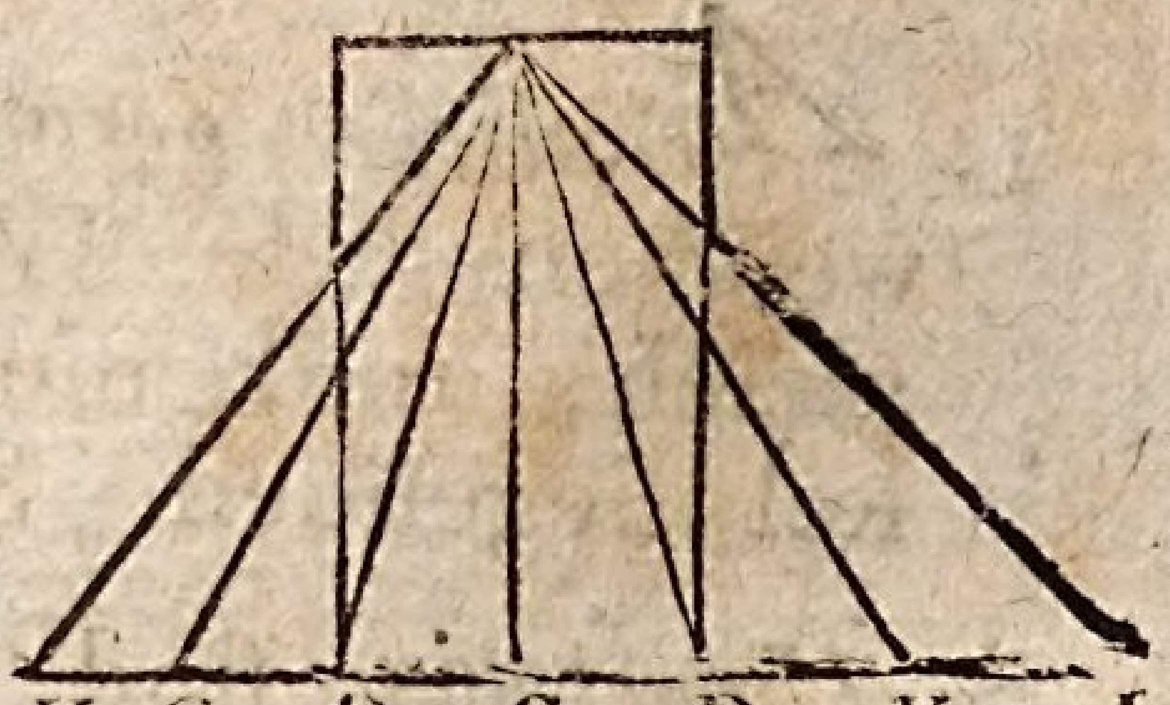
5. Ein Verhältniss heisst aus andern *zusammengesezt*, wenn die Grössen der Verhältnisse

nisse durch einander vervielfältigt ein Verhältniss ausmachen.

1. *Saz.*

Lehrsaz. Dreyecke und Parallelogramme, welche einerley Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Es seyen die Dreyecke ABC, ACD, und die Parallelogramme EC, CF, welche einerley Höhe haben, nämlich das Loth, das von dem Punkte A nach BD gefällt wird, so behaupte ich, dass die Grundlinie BC zu der CD sich verhalte wie das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke ACD und das Parallelogramm EC zu dem Parallelogramme CF.



Beweis. Man verlängere die BD auf beyden Seiten nach den Punkten H, L, und mache der Grundlinie BC die BG, GH, so viel man will, gleich, der Grundlinie CD aber mache man wiederum Linien, so viel man will, wie die DK, KL gleich, und ziehe die AG, AH, AK, AL.

Da nun die CB, BG, GH, einander gleich sind, so sind (1, 38. S.) die Dreyecke AGH, AGB, ABC, einander gleich; wievielfach also die Grundlinie HC von der Grundlinie BC ist, ebensovielfach ist das Dreyeck AHC von dem Dreyecke ABC. Aus gleichem Grunde ist das Dreyeck ALC von dem Dreyecke ACD ebensovielfach, als die Grundlinie LC von der Grundlinie CD, und (1, 38. S.) ist, je nachdem die Grundlinie HC eben so gross, oder grösser, oder kleiner ist, als die Grundlinie CL, auch das Dreyeck AHC ebensogross, oder grösser, oder kleiner, als das Dreyeck ALC. Es sind also hier von den vier Grössen nämlich den zwey Grundlinien BC, BD, und den zwey Drey-

Dreyecken A B C, A C D Gleichvielfache genommen worden, nämlich von der Grundlinie B C und dem Dreyecke A B C die Grundlinie H C und das Dreyeck A H C, von der Grundlinie C D und dem Dreyecke A C D aber andere beliebige Gleichvielfache, nämlich die Grundlinie C L und das Dreyeck A C L, und es ist gezeigt worden, daſs, je nachdem die Grundlinie H C gröſser, eben so groſs, oder kleiner ist, als die Grundlinie C L, auch das Dreyeck A H C gröſser, eben so groſs, oder kleiner sey, als das Dreyeck A L C; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die Grundlinie BC zu der Grundlinie C D wie das Dreyeck A B C zu dem Dreyecke A C D.

Und da (1, 41. S.) das Parallelogramm EC das Doppelte von dem Dreyecke A B C, und das Parallelogramm FC das Doppelte von dem Dreyecke ACD ist, aber (5, 15. S.) die Theile sich zu einander verhalten wie ihre Gleichvielfachen, so verhält sich das Parallelogramm E C zu dem Parallelogramme F C wie das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke ACD. Da nun gezeigt worden ist, daſs das Dreyeck ABC zum Dreyecke ACD sich verhalte wie die Grundlinie B C zur Grundlinie C D, und daſs das Parallelogramm E C zum Parallelogramme F C sich verhalte wie das Dreyeck A B C zum Dreyecke A C D, so verhält sich (5, 11. S.) auch das Parallelogramm E C zum Parallelogramme F C wie die Grundlinie B C zur Grundlinie C D.

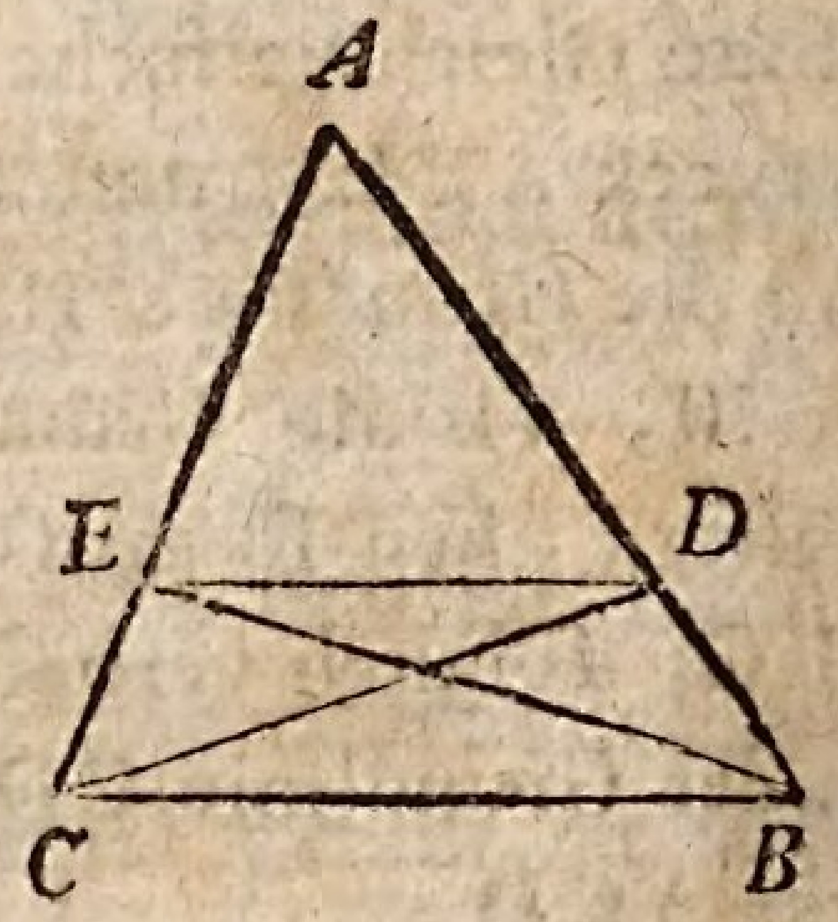
Demnach verhalten sich Dreyecke und Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn mit einer der Seiten eines Dreyecks eine gerade Linie parallel gezogen wird, so schneidet sie die übrigen Seiten des Dreyecks proportionirt; und wenn die Seiten eines Dreyecks proportionirt geschnitten werden, so ist die gerade Linie, welche die Durchschnitte verbindet, der übrigen Seite des Dreyecks parallel.

Man

Man ziehe mit einer Seite BC des Dreyecks ABC die DE parallel, so behaupte ich, dass die CE zu der EA sich verhalte, wie die BD zu der DA.



Beweis. Man ziehe die BE und CD. Nun ist (1, 37. S.) das Dreyeck BDE dem Dreyecke CDE gleich, denn sie sind auf einerley Grundlinie DE und in einerley Parallelen DE, BC. Es ist aber ADE ein anderes Dreyeck, und (5, 7. S.) haben gleiche Grössen zu *einer* Grösse einerley Verhältniss, folglich verhält sich das Dreyeck CDE zum Dreyecke *A*DE wie das Dreyeck BDE zum Dreyecke ADE. Aber wie das Dreyeck B*D*E sich zum Dreyecke ADE verhält, so verhält sich die BD zu der D*A*, denn da sie einerley Höhe haben, nämlich das Loth von dem Punkte E nach der AB, so verhalten sie sich (6, 1. S.) wie ihre Grundlinien. Aus eben dem Grunde verhält sich auch die CE zu der EA wie das Dreyeck CDE zu dem Dreyecke ADE; folglich verhält sich (5, 11. S.) die BD zu der DA wie die CE zu der EA.

Es seyen nun die Seiten AB, AC des Dreyecks *A*BC in den Punkten D, E proportionirt geschnitten, so dass die BD zu der DA sich verhalte wie die CE zu der EA, und man ziehe die DE, so behaupte ich, dass die DE der BC parallel sey.

Da, nach der vorigen Construction, die CE zu der E*A* sich verhält, wie die BD zu der DA, aber (6, 1. S.) das Dreyeck BDE zum Dreyecke *A*DE wie die BD zu der DA, und das Dreyeck CDE zum Dreyecke ADE wie die CE zu der EA, so verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck CDE zum Dreyecke *A*DE wie das *D*reyeck BDE zum Dreyecke ADE. Beyde Dreyecke BDE, CDE haben also zum Dreyecke ADE einerley Verhältniss; folglich ist (5, 9. S.) das Dreyeck BDE dem Dreyecke C*D*E gleich; auch sind sie auf einerley Grundlinie DE. Gleiche Dreyecke aber

auf

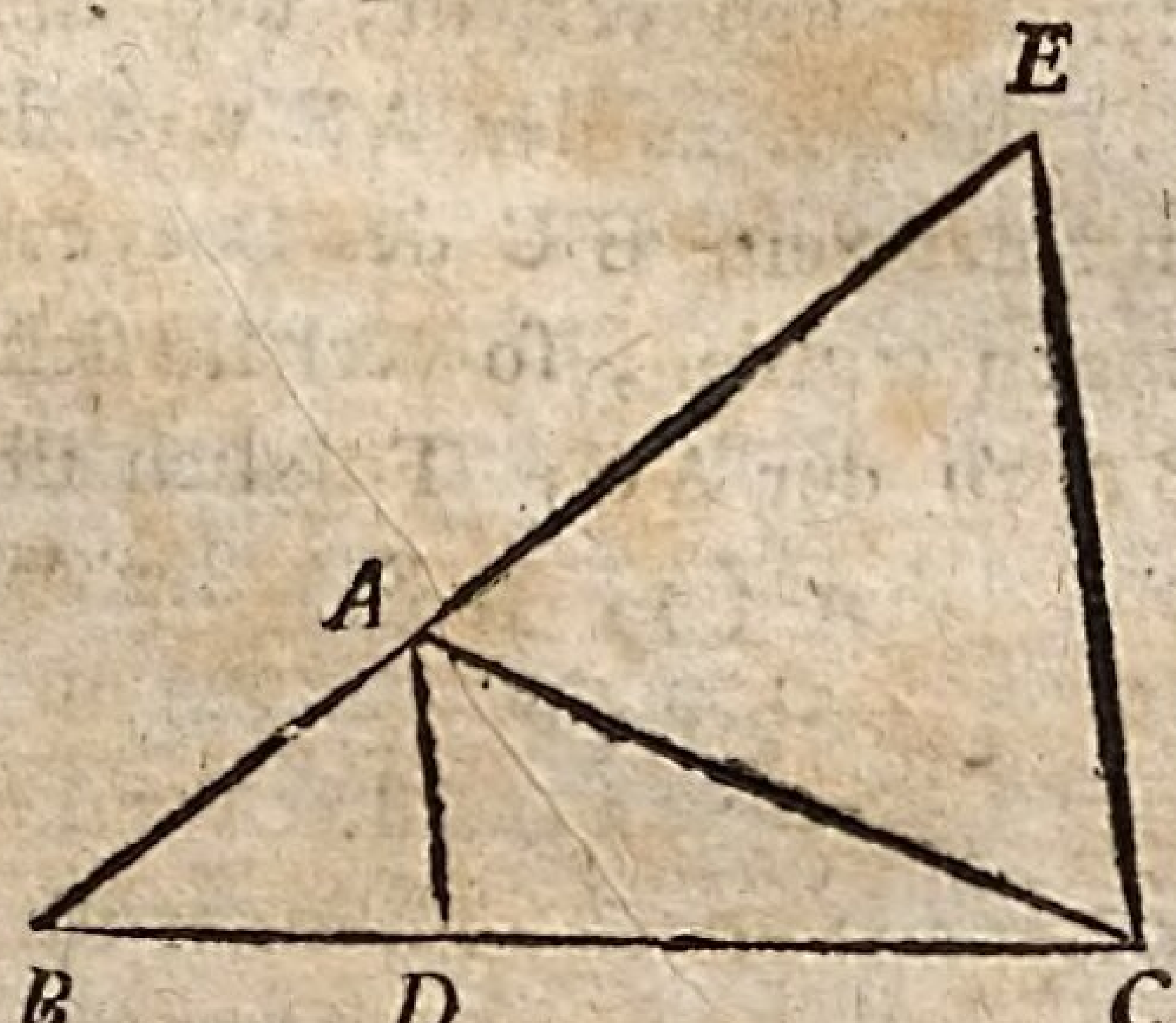
auf einerley Grundlinie sind (1, 39. S.) auch in einerley Parallelen; folglich ist die DE der BC parallel.

Wenn demnach mit einer der Seiten eines Dreyecks u. s. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Winkel eines Dreyecks halbirt wird, und die den Winkel halbirende Linie auch die Grundlinie schneidet, so sind die Abschnitte der Grundlinie den übrigen Seiten des Dreyecks proportionirt; und wenn die Abschnitte der Grundlinie den übrigen Seiten des Dreyecks proportionirt sind, so halbirt die gerade Linie, welche von der Spize nach dem Durchschnitte gezogen wird, den gegenüberliegenden Winkel des Dreyecks.

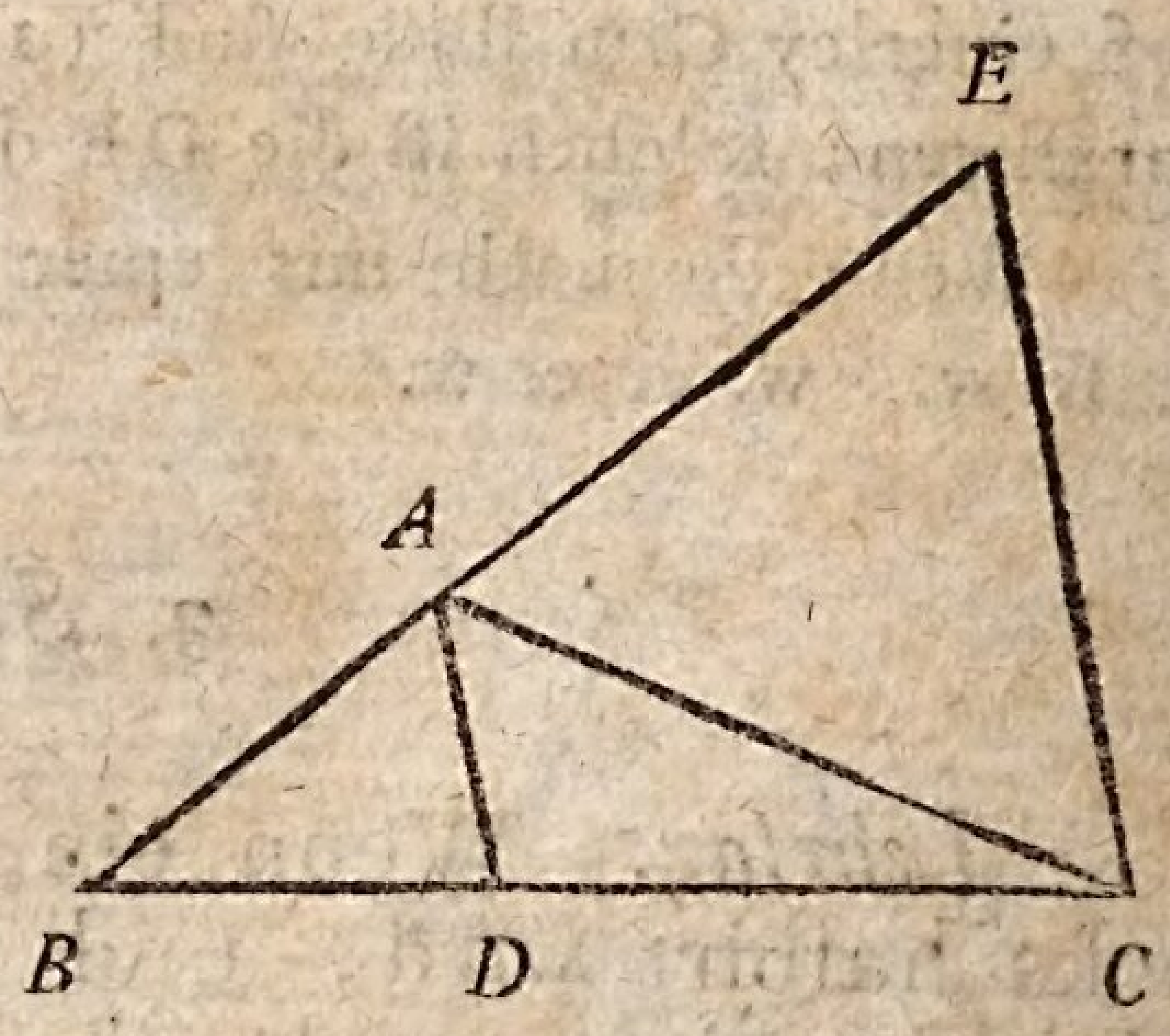
Es sey das Dreyeck *A*BC, und dessen Winkel BAC werde von der geraden Linie *A*D halbirt, so behaupte ich, dass die *B*D zu der DC sich verhalte, wie die BA zu der AC.



Beweis. Man ziehe (1, 31. S.) durch den Punkt *C* mit der DA die CE parallel, verlängere hierauf die *B*A, bis sie mit der CE in dem Punkte E zusammentrift.

Da nun die Parallelen AD, EC von der Linie A*C* geschnitten werden, so ist (1, 29. S.) der Winkel A*C*E dem Winkel CAD gleich. Aber nach der Voraussezung ist der Winkel C*A*D dem Winkel *B*AD gleich; folglich ist auch der Winkel B*A*D dem Winkel ACE gleich. Ferner da die Parallelen AD, EC von der Linie B*A*E geschnitten werden, so ist (1, 29. S.) der

der äussere Winkel BAD dem inneren AEC gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel ACE dem Winkel *B*AD gleich sey; folglich ist auch der Winkel *A*CE dem Winkel AEC, und daher (1, 6. S.) die Seite AE der Seite AC gleich. Und da mit der Seite EC des Dreyecks BCE die AD parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S.) die BA zu der AE wie die BD zu der DC. Es ist aber der AE die AC gleich; Folglich verhält sich (5, 7. S.) die B*A* zu der AC wie die *B*D zu der DC.



Es verhalte sich aber nun die BA zu der A*C* wie die BD zu der DC, und man ziehe die AD, so behaupte ich, dass der Winkel *B*A*C* von der Linie *A*D halbirt werde.

Denn da, nach der vorigen Construction, die BA zu der A*C* sich verhält, wie die BD zu der DC, aber (6, 2. S.) die B*A* zu der AE wie die *B*D zu der DC, denn es ist mit der Seite EC des Dreyecks BCE die AD parallel gezogen worden, so verhält sich die *B*A zu der AE wie die BA zu der AC; Folglich ist (5, 9. S.) die AC der AE und daher (1, 5. S.) der Winkel *A*EC dem Winkel *AC*E gleich. Aber (1, 29. S.) ist der Winkel AEC dem äusseren Winkel *B*AD, der Winkel ACE aber dem Wechselwinkel CA*D* gleich; Folglich ist auch der Winkel BAD dem CAD gleich, und mithin der Winkel BAC von der Linie AD halbirt.

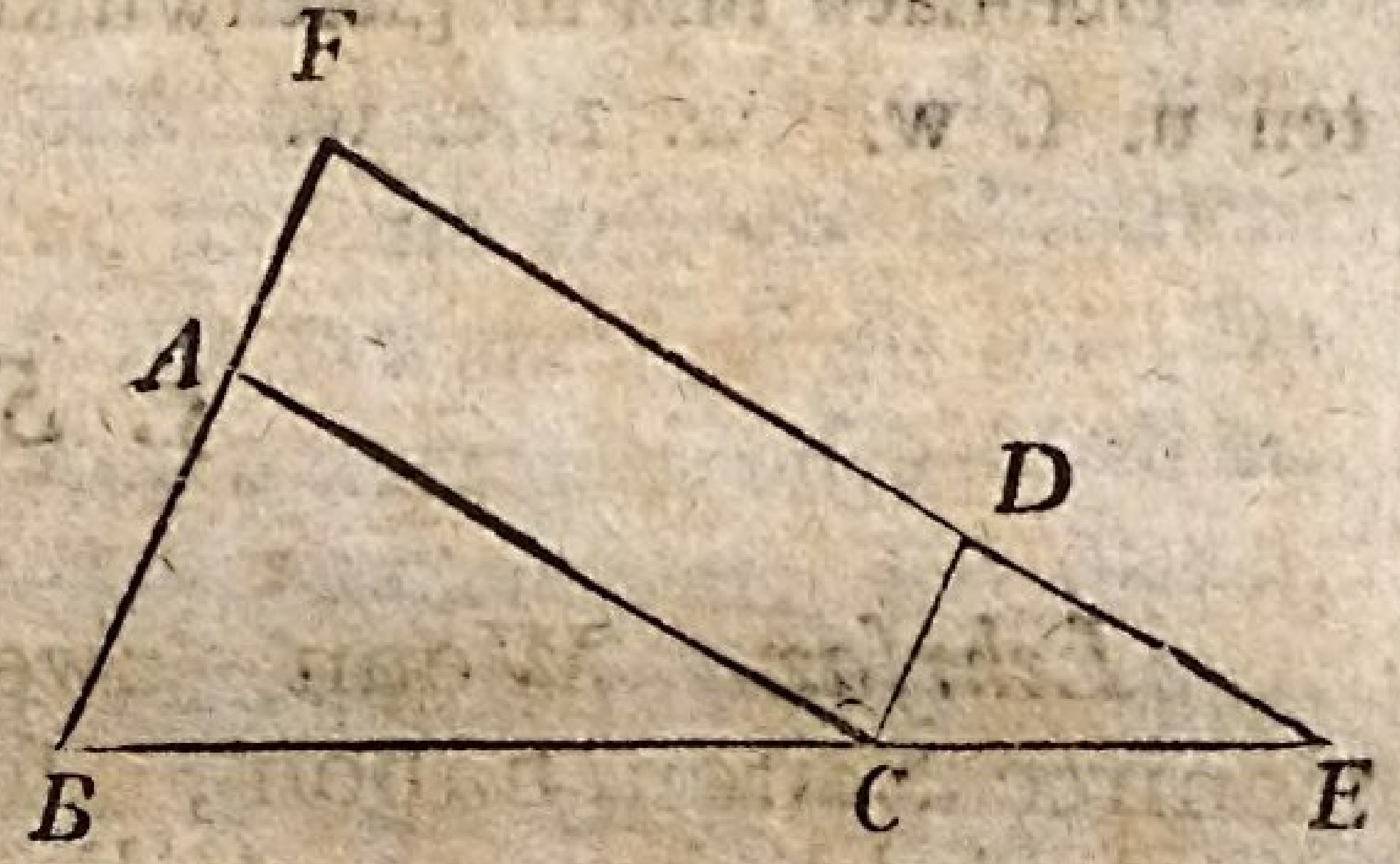
Wenn demnach ein Winkel eines Dreyecks halbirt wird u. s. w. w. z. e. w.

5. *Saz.*

4. *Saz.*

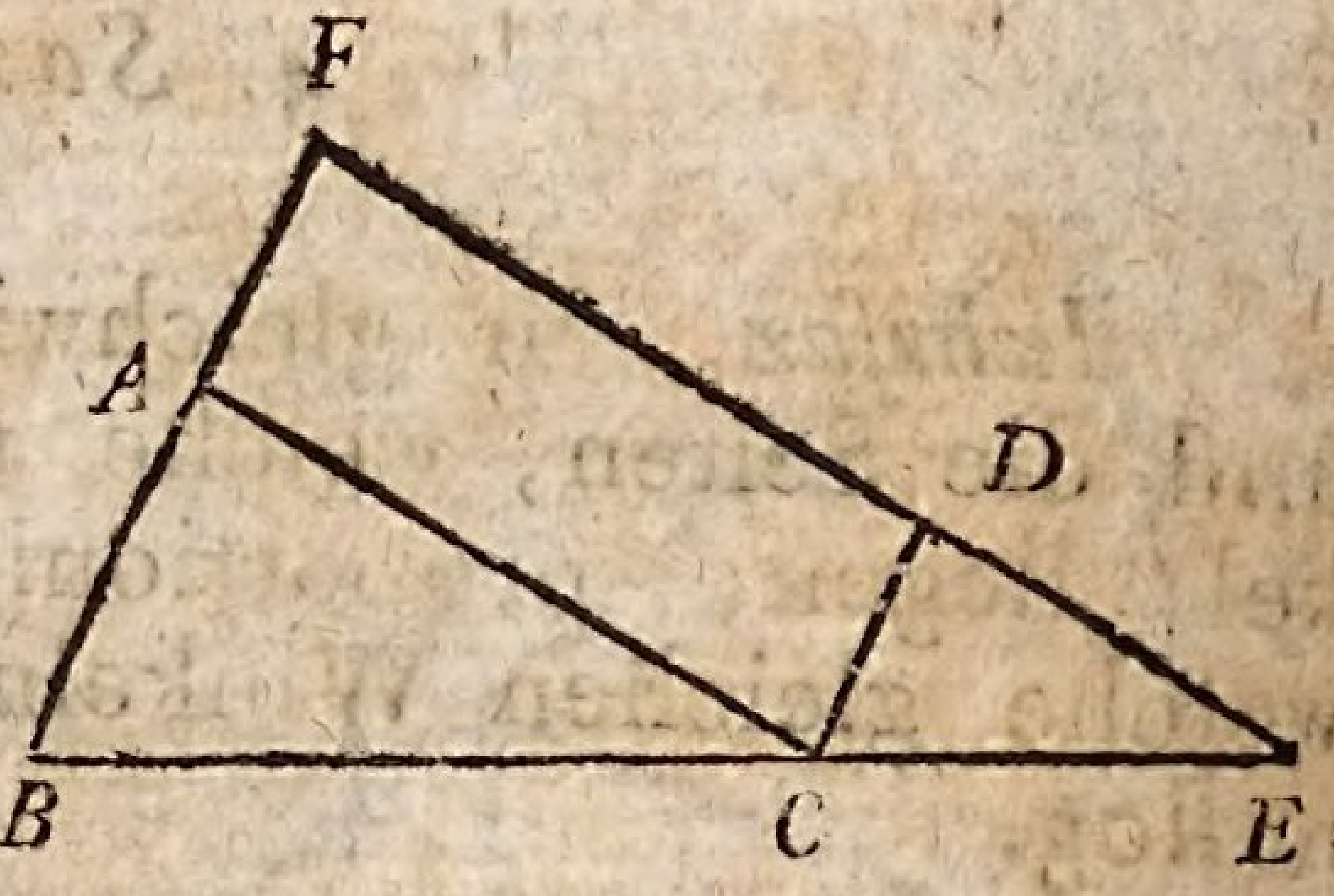
Lehrsaz In gleichwinklichten Dreyecken sind die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt, und die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog.

Es seyen die Dreyecke ABC, DCE gleichwinklicht, so dass der Winkel ABC dem DCE, der Winkel *A*CB dem DEC, und daher auch der Winkel BAC dem CDE gleich sey, so behaupte ich, dass in den gleichwinklichten Dreyecken AB*C*, DCE die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt, und die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog seyen.



Beweis. Man bringe die BC mit der CE in *eine* gerade Linie. Da nun (1, 17. S.) die Winkel ABC, ACB kleiner, als zwey rechte, sind, der Winkel ACB aber dem Winkel DEC gleich ist, so sind auch die Winkel A*B*C, DEC kleiner, als zwey rechte, folglich treffen (11. Grunds.) die BA, ED verlängert zusammen. Man verläagere sie, und sie treffen in dem Punkte F zusammen. Da nun der Winkel DCE dem Winkel AB*C* gleich ist, so ist (1, 28. S.) die BF der CD parallel. Ferner da der Winkel A*C*B dem Winkel DEC gleich ist, so ist die AC der FE parallel. Demnach ist FACD ein Parallelogramm, und daher (1, 34. S.) die FA der CD, die AC aber der FD gleich. Und da mit der Seite FE des Dreyecks FBE die AC parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S.) die *B C* zu der CE, wie die BA zu der AF. Es ist aber die AF der CD gleich; folglich verhält sich auch (5, 7. S.) die BC zu der CE wie die B*A* zu der CD, und (5, 16. S.) *verwechselt* die AB zu der BC wie die DC zu der CE.

Fer-



Ferner, weil die CD der BF parallel ist, so verhält sich die BC zu der CE wie die FD zu der DE. Aber die DF ist der AC gleich; Folglich verhält sich auch die BC zu der CE wie die AC zu der DE, und *verwechselt* die BC zu der CA wie die CE zu der ED. Da nun gezeigt worden ist, daſs die AB zu der BC sich verhalte, wie die DC zu der CE, die BC aber zu der CA wie die CE zu der ED; so verhält sich auch (5, 22. S.) *gleichförmig* die BA zu der AC wie die CD zu der DE.

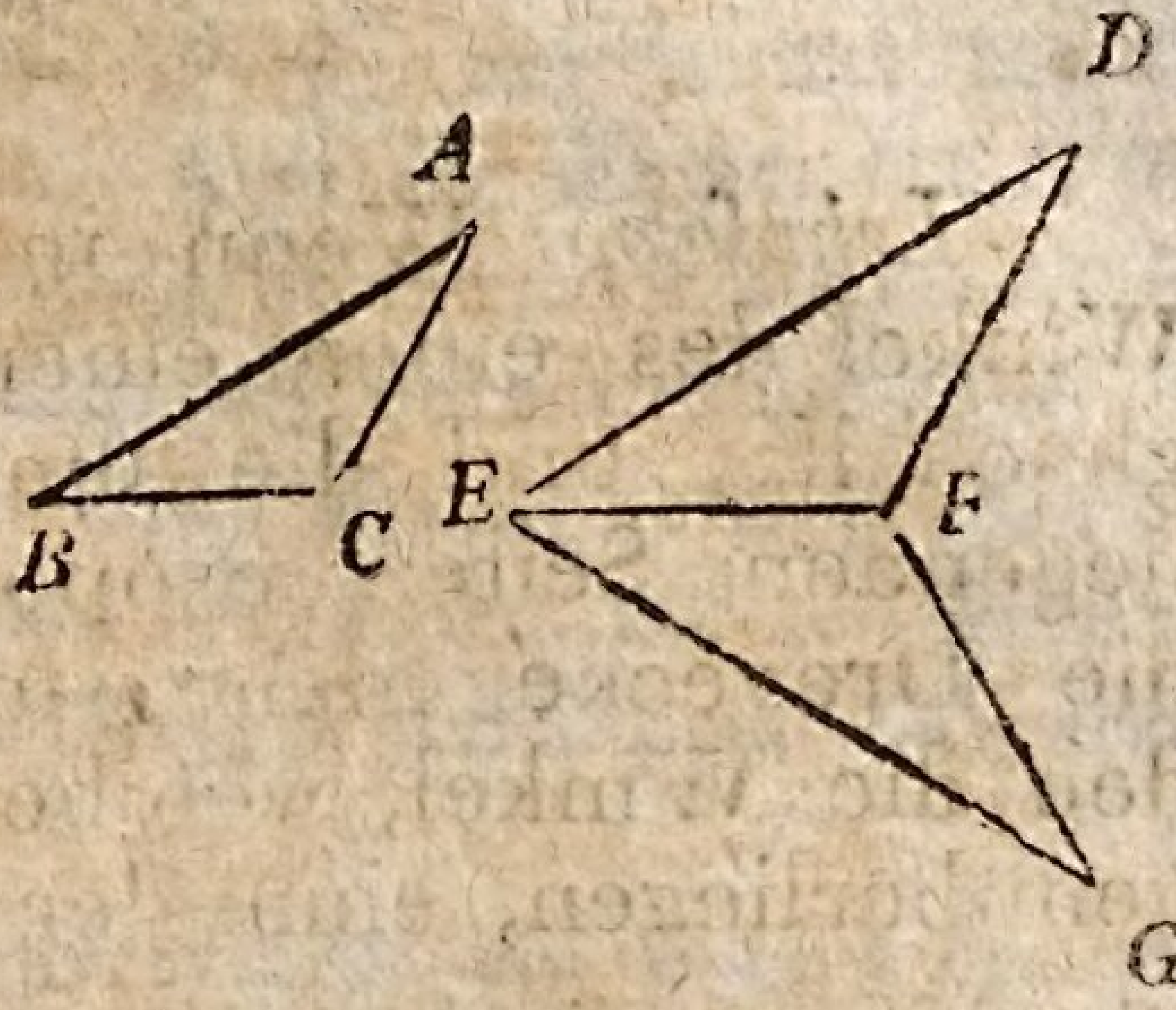
Demnach sind in gleichwinklichten Dreyecken die Seiten u. s. w. w. z. e. w.

5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Dreyecke proportionirte Seiten haben, so sind die Dreyecke gleichwinklicht, und die Winkel welchen homologe Seiten gegenüberliegen, sind in beyden einander gleich.

Es seyen die zwey Dreyecke ABC, DEF, welche proportionirte Seiten haben, so, daſs die AB zu der BC sich verhalte, wie die DE zu der EF, die BC aber zu der CA wie die EF zu der FD, und die BA zu der AC wie die ED zu der DF, so behaupte ich, daſs das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinklicht sey, und daſs in beyden die Winkel, welchen homologe Seiten gegenüberliegen, einander gleich seyen, nämlich der Winkel ABC dem Winkel DEF, der Winkel BCA dem Winkel EFD, und der Winkel BAC dem Winkel EDF.

Beweis. Man seze (1, 23. S.) an die Punkte E, F der Linie EF, den Winkel FEG, der dem Winkel ABC, und den Winkel EFG, der dem Winkel BCA gleich sey, so



so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EGF gleich; Folglich ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke EGF gleichwinklicht, und es sind daher (6, 4. S.) in den Dreyecken ABC, EGF die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt, und die, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog; folglich verhält sich die AB zu der BC wie die GE zu der EF. Aber wie die AB zu der BC sich verhält, so verhält sich die DE zu der EF; folglich verhält sich (5, 11. S.) die DE zu der EF wie die GE zu der EF; die beyden DE, GE haben also zu der EF einerley Verhältniss, und mithin ist (5, 9. S.) die DE der GE gleich. Aus eben dem Grunde ist auch die DF der GF gleich. Da nun die DE der EG gleich, die EF aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DE, EF den beyden GE, EF gleich, und die Grundlinie DF ist der Grundlinie GF gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel DEF dem Winkel GEF; und das Dreyeck DEF dem Dreyecke GEF gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welchen gleiche Seiten gegenüberliegen, einander gleich; folglich ist der Winkel DFE dem Winkel GFE, der Winkel EDF aber dem Winkel EGF gleich. Und da der Winkel DEF dem Winkel GEF, der Winkel GEF aber dem Winkel ABC gleich ist, so ist auch der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel ACB dem Winkel DFE, und der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich; folglich das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinklicht.

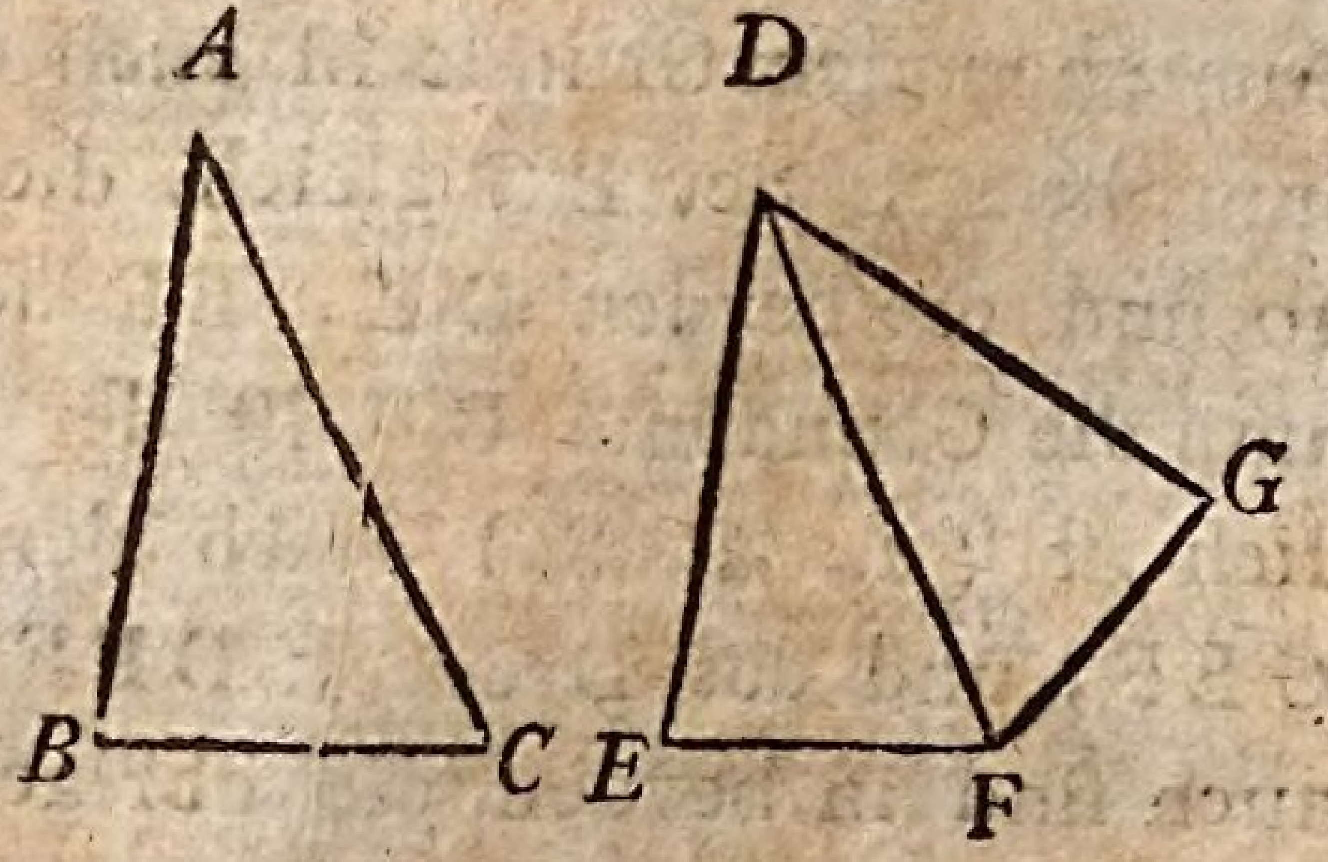
Wenn demnach zwey Dreyecke proportionirte Seiten haben u. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

6. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, so sind die Dreyecke gleichwinklicht, und in beyden die Winkel, welchen homologe Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Es seyen die zwey Dreyecke ABC, DEF, und ein Winkel BAC des einen einem Winkel EDF des andern gleich, auch die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt, so, daſs die BA zu der AC sich verhalte, wie die ED zu der DF, so behaupte ich, daſs das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinklicht, und der Winkel ABC dem Winkel DEF, der Winkel ACB aber dem Winkel DFE gleich sey.



Beweis. Man seze (1, 23. S.) an die Punkte D, F der Linie DF den Winkel FDG, der dem Winkel BAC oder EDF, und den Winkel DFG der dem Winkel ACB gleich sey, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey B dem übrigen Winkel bey G gleich, folglich das Dreyeck ABC dem Dreyecke DGF gleichwinklicht, und mithin verhält sich (6, 4. S.) die BA zu der AC wie die GD zu der DF. Nach der Voraussezung aber verhält sich die BA zu der AC wie die ED zu der DF; folglich verhält sich (5, 11. S.) auch die ED zu der DF wie die GD zu der DF, und mithin ist (5, 9. S.) die ED der DG gleich, die DF aber ist gemeinschaftlich; Folglich sind die beyden ED, DF den beyden GD, DF gleich, auch ist der Winkel EDF dem Winkel GDF gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie EF der Grundlinie FG, und das Dreyeck DEF dem Dreyecke GDF gleich, auch sind die übrigen Winkel in beyden, denen gleiche Seiten

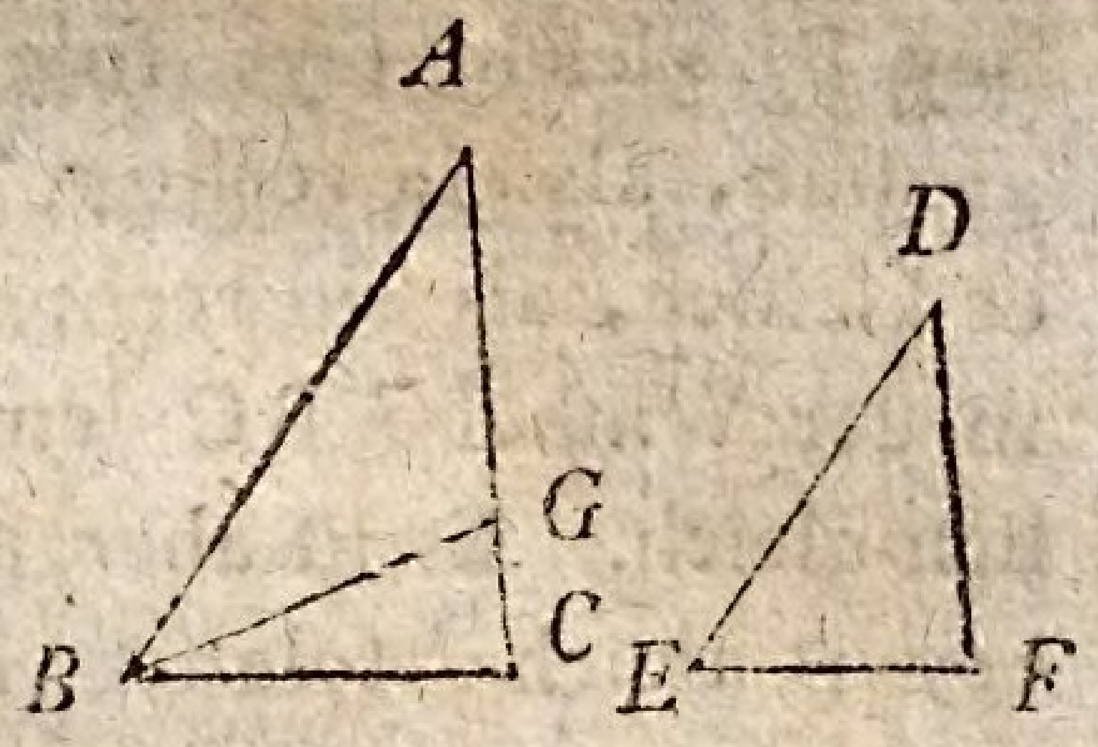
ten

ten gegenüberliegen, einander stückweise gleich, der Winkel D F G also ist dem Winkel D F E, der Winkel bey G aber dem Winkel bey E gleich. Aber der Winkel D F G ist dem Winkel A C B gleich; folglich ist auch der Winkel A C B dem Winkel D F E gleich. Nach der Voraussezung aber ist der Winkel B A C dem Winkel E D F gleich; folglich ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey B dem übrigen Winkel bey E gleich, und mithin das Dreyeck A B C dem Dreyecke D E F gleichwinklicht.

Wenn demnach in zwey *Dreyecken* ein Winkel des einen u. s. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, die um zwey andere Winkel liegende Seiten aber proportionirt sind, und von den übrigen Winkeln jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, als ein rechter, ist, so sind die Dreyecke gleichwinklicht, und in beyden die Winkel, um welche die proportionirten Seiten liegen, einander gleich.

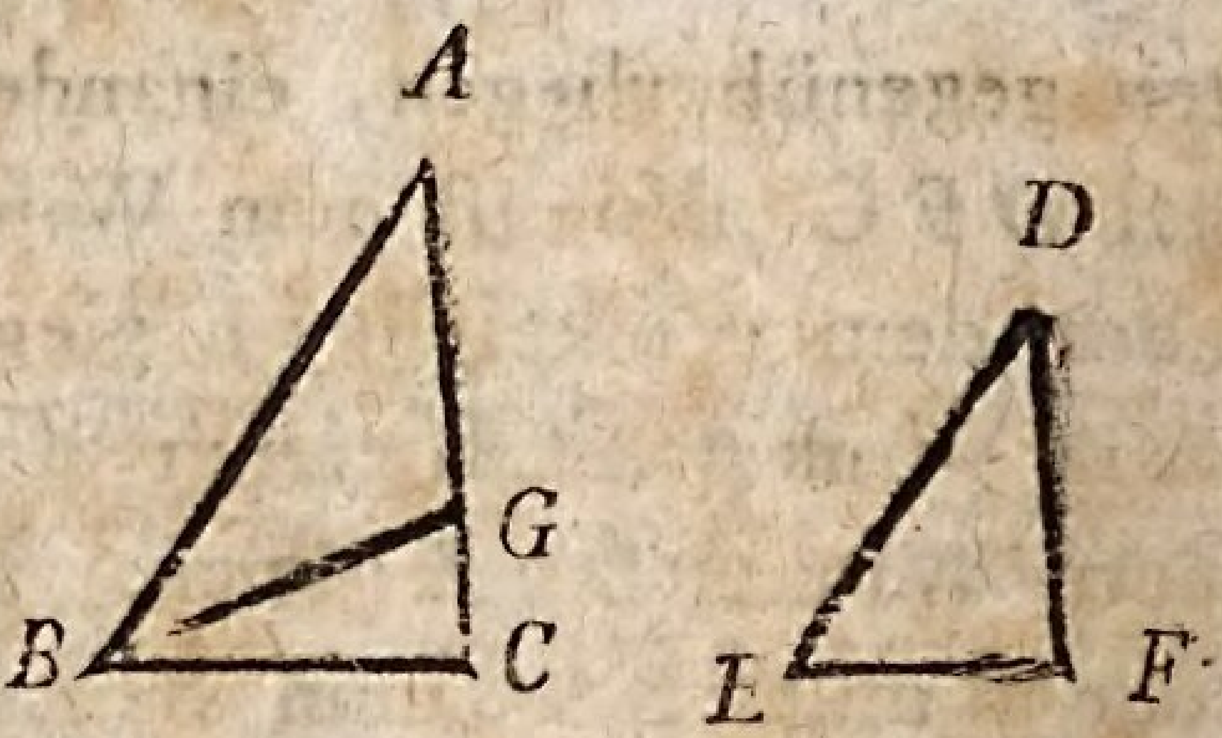


Es seyen die Dreyecke ABC, DEF, und darin der Winkel B A C dem Winkel E D F gleich, auch die Seiten, welche um zwey andere Winkel ACB, DEF liegen, proportionirt, so dass die A B zu der B C sich verhalte wie die D E zu der E F, auch sey von den übrigen Winkeln bey C, F *erstens* jeder zugleich kleiner, als ein rechter, so behaupte ich, dass das Dreyeck A B C dem Dreyecke D E F gleichwinklicht, und der Winkel A B C dem Winkel D E F, auch der übrige Winkel bey C dem übrigen Winkel bey F gleich sey.

Beweis. Wäre der Winkel A B C dem Winkel D E F nicht gleich, so würde der eine von ihnen grösser, als der andere, seyn. Es sey der A B C der grössere, und man seze

(1,

(1, 23. S.) an den Punkt B der Linie AB den Winkel ABG, der dem Winkel DEF gleich sey.



Da nun der Winkel A dem Winkel D, und der Winkel ABG dem Winkel DEF gleich ist, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel AGB dem übrigen Winkel DFE gleich, folglich das Dreyeck ABG dem Dreyecke DEF gleichwinklicht, und mithin verhält sich (6, 4. S.) die AB zu der BG wie die DE zu der EF. Nach der Voraussezung aber verhält sich die AB zu der BC wie die DE zu der EF; folglich verhält sich (5, 11. S.) die AB zu der BC wie die AB zu der BG, und mithin hat die AB zu den beyden BC, BG einerley Verhältniss, es ist also die BC der BG, und daher (1, 5. S) auch der Winkel BGC dem Winkel BCG gleich. Nach der Voraussezung aber ist der Winkel bey C kleiner, als ein rechter; folglich ist auch der Winkel BGC kleiner, als ein rechter, und mithin (1, 13. S.) sein Nebenwinkel AGB grösser, als ein rechter. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel AGB dem Winkel bey F gleich sey; folglich ist auch der Winkel bey F grösser, als ein rechter. Nach der Voraussezung aber ist er kleiner, als ein rechter, welches ungereimt ist. Es ist also der Winkel ABC dem Winkel DEF nicht ungleich, folglich gleich. Es ist aber auch der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich; folglich ist auch der übrige Winkel bey C dem übrigen Winkel bey F gleich, und mithin das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinklicht.

Man seze aber nun jeder der Winkel bey C, F sey zugleich nicht kleiner, als ein rechter, so behaupte ich, dass auch dann das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinklicht sey.

Nach der vorigen Construction kann auf gleiche Art gezeigt werden, dass die BC der BG, und der Winkel bey C dem Winkel BGC gleich sey. Aber der Winkel bey C ist

nicht

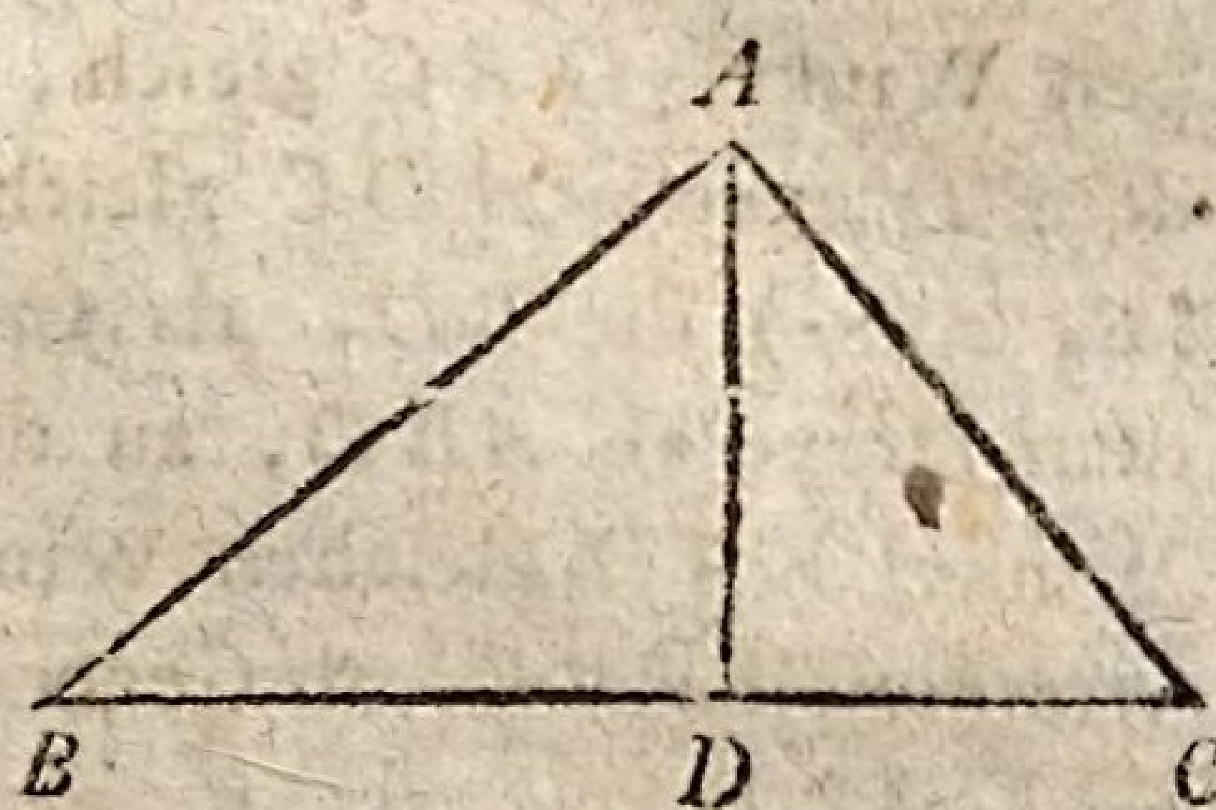
nicht kleiner, als ein rechter; folglich ist auch der Winkel BGC nicht kleiner, als ein rechter. In dem *Dreyecke* BGC sind also zwey Winkel nicht kleiner, als zwey rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich ist. Es ist also wiederum der Winkel ABC dem Winkel DEF nicht ungleich, folglich gleich. Es ist aber auch der Winkel bey *A* dem Winkel bey D gleich; folglich ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey C dem übrigen Winkel bey F gleich, und mithin das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinklicht.

Wenn demnach in zwey Dreyecken ein Winkel des einen u. s. w. w. z. e. w.

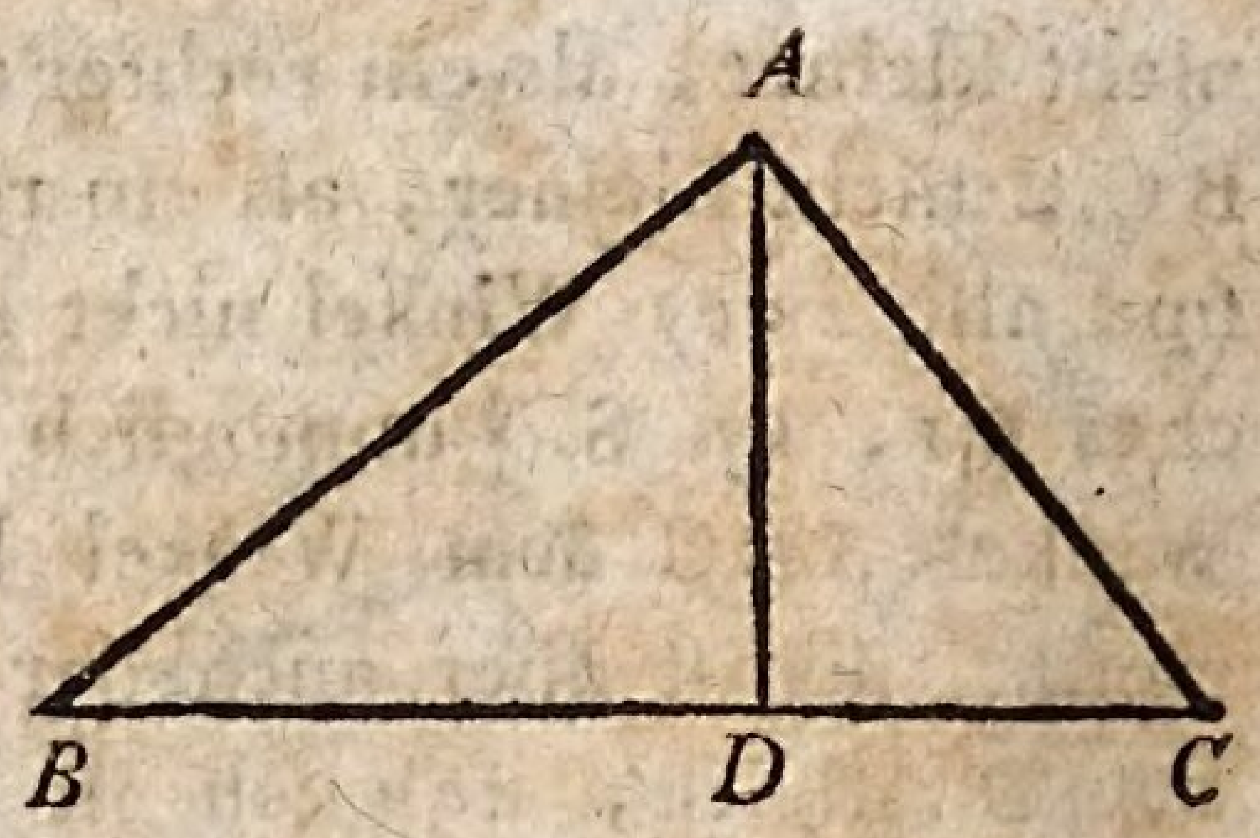
8. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyecke von dem rechten Winkel nach der Grundlinie ein Loth gefällt wird, so sind die an dem Lothe liegenden Dreyecke sowohl dem ganzen als auch einander selbst ähnlich.

Es sey das rechtwinklichte Dreyeck ABC, dessen Winkel BAC, ein rechter, und man fälle von dem Punkte A nach der B*C* das Loth AD, so behaupte ich, daſs die beyden Dreyecke AB D, AD*C* sowohl dem ganzen AB*C*, als auch einander selbst, ähnlich seyen.



Beweis. Da der Winkel BA*C* dem Winkel A*D*B gleich, indem jeder ein rechter ist, und der Winkel bey B den beyden *Dreyecken* AB*C*, AB*D* gemeinschaftlich ist; so ist (1, 32. S.) der übrige Winkel A*C*B dem übrigen Winkel BA*D* gleich, und mithin das *Dreyeck* AB*C* dem *Dreyecke* AB*D* gleichwinklicht. *Demnach* verhält sich (*6*, 4. S.) die B*C*, als Gegenseite des rechten Winkels in dem Dreyecke AB*C*, zu der BA, als Gegenseite des



des rechten Winkels in dem Dreyecke A B *D*, wie dieselbe *A* B, als Gegenseite des Winkels *C* in dem *D*reyecke A B *C*, zu der B *D*, als Gegenseite des dem Winkel bey *C* gleichen Winkels *B* A *D* in dem *D*reyecke A B *D*, und eben so auch die A *C* zu der *A D*, als Gegenseite des den beyden *D*reyecken gemeinschaftlichen Winkels bey B; *D*emnach ist das *D*reyeck A B *C* dem *D*reyecke A B *D* gleichwinklicht, und in beyden sind die um die gleichen Winkel liegende Seiten proportionirt; folglich ist (6, 1. Erkl.) das *D*reyeck *A* B *C* dem *D*reyecke A B *D* ähnlich.

*A*uf gleiche *A*rt kann nun gezeigt werden, daſs auch das *D*reyeck A *D C* dem *D*reyecke A B *C* ähnlich sey; Folglich sind die beyden *D*reyecke A B *D*, A *D C* dem ganzen *D*reyecke *A B C* ähnlich.

Ich behaupte ferner, daſs die *D*reyecke *A* B *D*, *A D C*, auch einander selbst ähnlich seyen.

*D*enn da der Winkel B *D A*, als ein rechter, dem rechten Winkel *A D C* gleich ist, aber auch von dem Winkel B *A D* gezeigt worden ist, daſs er dem Winkel bey *C* gleich sey, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey B dem übrigen Winkel *D A C* gleich, und mithin das *D*reyeck *A* B *D* dem *D*reyecke *A D C* gleichwinklicht; folglich verhält sich (6, 4. S.) die B *D*, als Gegenseite des Winkels B *A D* in dem *D*reyecke *A* B *D*, zu der *D A*, als Gegenseite des dem Winkel B *A D* gleichen Winkels *C* in dem *D*reyecke *A D C*, wie dieselbe *A D*, als Gegenseite des Winkels B in dem *D*reyecke *A* B *D* zu der *D C*, als Gegenseite des dem Winkel B gleichen Winkels *D A C* in dem *D*reyecke *A D C*, und eben so auch die B *A*, als Gegenseite des rechten Winkels *A D* B, zu der *A C*, als Gegenseite des rechten Winkels *A D C*; Folglich ist (6, 1. Erkl.) das *D*reyeck *A B D* dem *D*reyecke *A D C* ähnlich.

Wenn

Wenn demnach in einem rechtwinklichten Dreyecke vom rechten Winkel u. s. w. w. z. e. w.

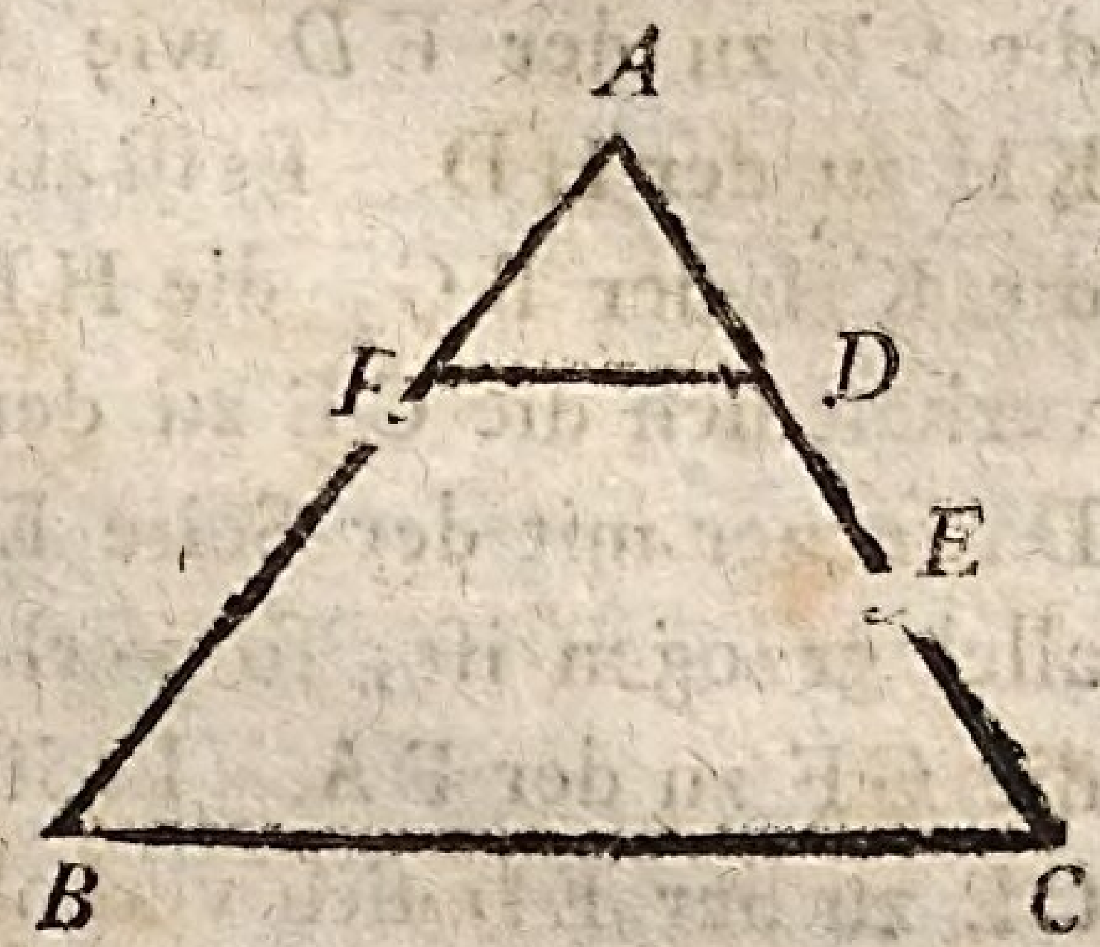
Zusaz. Hieraus erhellet, dass in dem rechtwinklichten Dreyecke das von dem rechten Winkel nach der Grundlinie gefällte Loth zwischen den Abschnitten der Grundlinie, und die an jedem Abschnitte liegende Seite zwischen der Grundlinie und diesem Abschnitte die mittlere Proportionallinie sey.

9. *Saz.*

Aufgabe. Von einer gegebenen geraden Linie einen verlangten Theil abzuschneiden.

Es sey die gegebene gerade Linie A B, man soll von der A B einen verlangten Theil abschneiden.

Auflösung. Es werde der dritte Theil verlangt, so ziehe man von dem Punkte A eine gerade Linie A C, welche mit der A B einen beliebigen Winkel einschliesse; hierauf nehme man in der A C einen Punkt D an, und mache (1, 3. S.) der A D die D E, E C gleich, endlich ziehe man die B C und (1, 31. S.) durch den Punkt D mit der B C die D F parallel.



Beweis. Da nun mit der Seite B C des Dreyecks A B C die FD parallel gezogen worden ist, so verhält sich (6, 2. S.) die CD zu der DA wie die *B*F zu der FA. Es ist aber die CD das Doppelte von der D A, folglich ist auch die B F das Doppelte von der F A, und mithin die B A das Dreyfache von der A F.

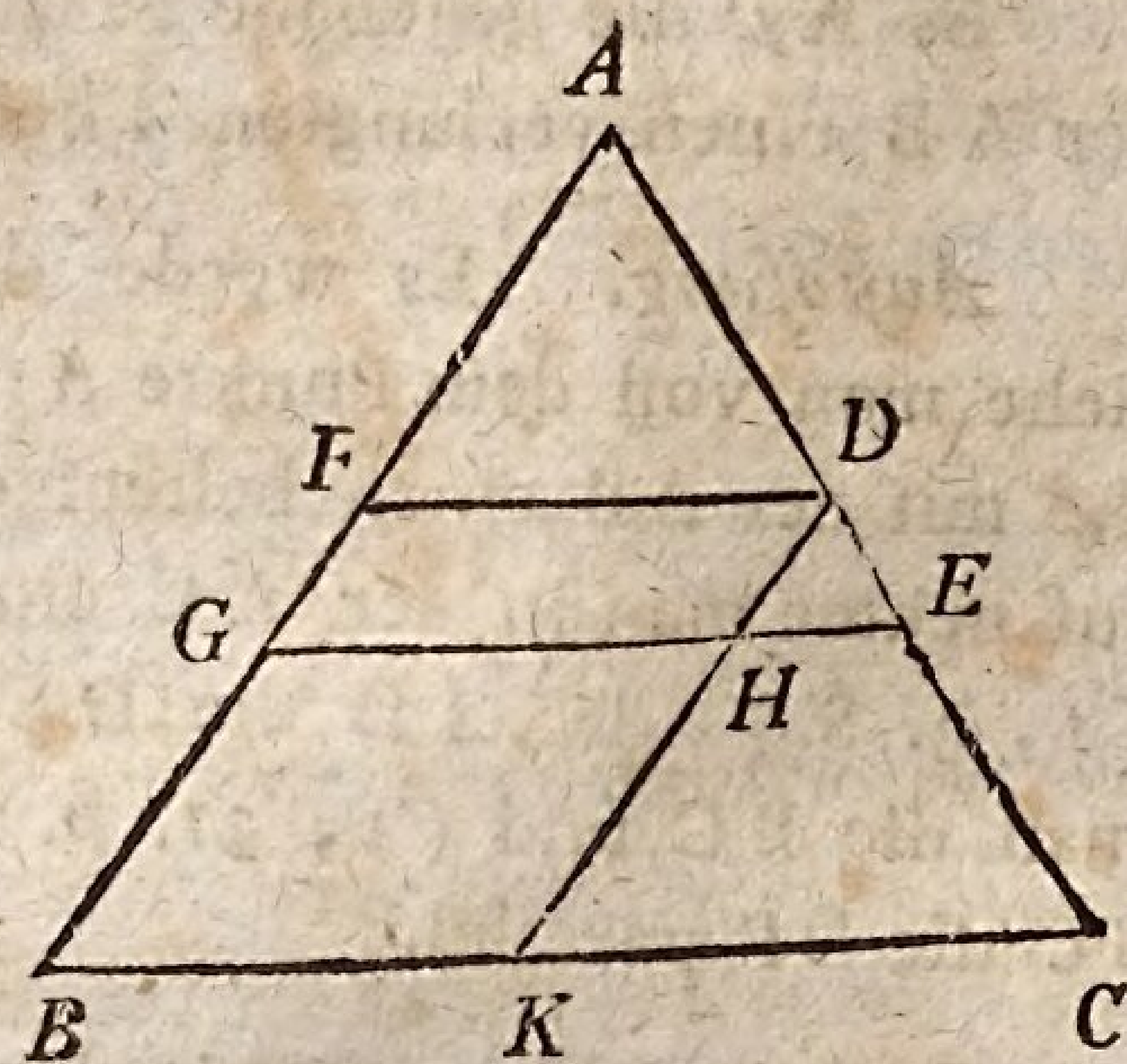
Demnach ist von der gegebenen geraden Linie A B der verlangte dritte Theil abgeschnitten worden, w. z. v. w.

10. *Saz.*

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie auf ähnliche Art zu theilen, wie eine andere gegebene getheilt ist.

Es sey die gegebene ganze Linie A B, die getheilte A C, und man soll die ganze A B auf ähnliche Art theilen, wie die A C getheilt ist.

Auflösung. Es sey die A C in den Punkten D, E getheilt, und man bringe beyde Linien so an einander, dass sie einen beliebigen Winkel einschliessen, und ziehe alsdann die B C und durch die Punkte D, E (1, 31 S.) der B C die D F, E G, durch den Punkt D aber der A B die D H K parallel.



Beweis. Jede der Figuren F H, H B ist ein Parallelogramm, und daher (1, 35. S.) die D H der F G, die H K aber der G B gleich. Da nun mit der Seite K C des Dreyecks D K C die H E parallel gezogen worden ist, so verhält sich (6, 2. S.) die C E zu der E D wie die K H zu der H D. Es ist aber die K H der B G, die H D aber der G F gleich; Folglich verhält sich die C E zu der E D wie die B G zu der G F. Da ferner mit der Seite E G des Dreyecks A G E die F D parallel gezogen ist, so verhält sich die E D zu der D A wie die G F zu der F A. Es ist aber gezeigt worden, dass die C E zu der E D sich verhalte wie die B G zu der G F; Folglich verhält sich die C E zu der E D wie die B G zu der G F, und die E D zu der D A wie die G F zu der F A.

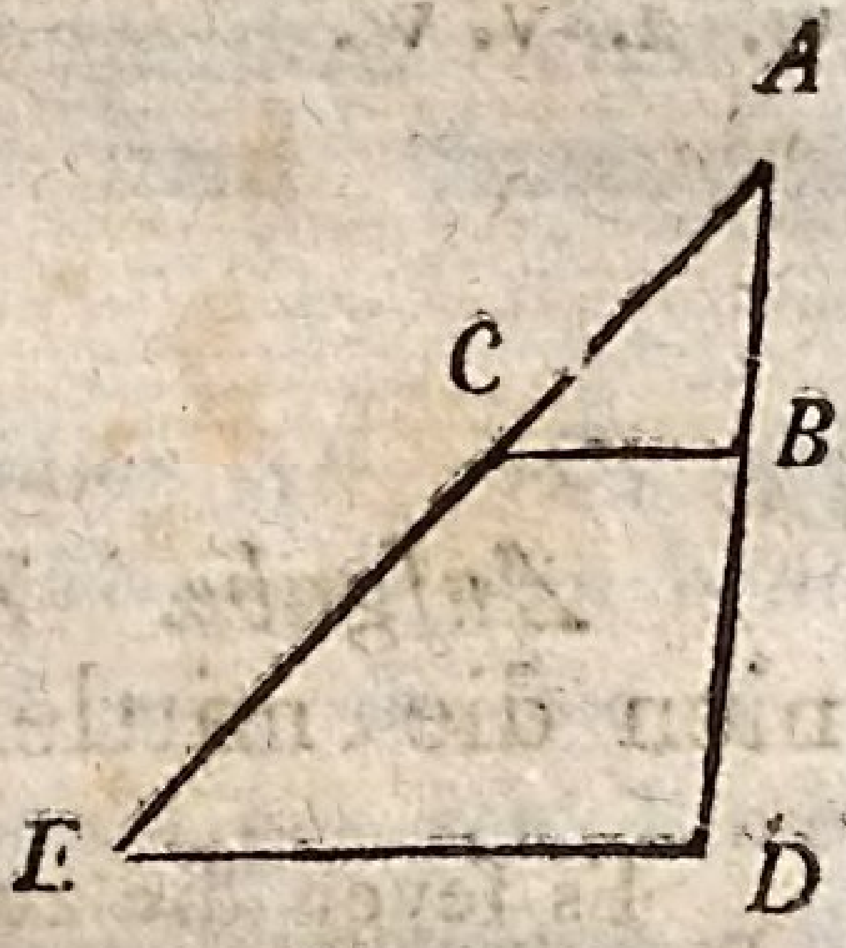
Demnach ist die gegebene ganze gerade Linie A B auf ähnliche Art, wie die gegebene getheilte gerade Linie A C, getheilt worden, w. z. v. w.

11. Saz.

Aufgabe. Zu zwey gegebenen geraden Linien die dritte Proportionallinie zu finden.

Es seyen die zwey gegebenen geraden Linien AB, AC, und man bringe sie so an einander, daſs sie einen beliebigen Winkel einschlieſſen, man soll nun zu den beyden AB, AC die dritte Proportionallinie finden.

Auflösung. Man verlängere die AB, AC nach den Punkten D, E, mache der AC die BD gleich, ziehe hierauf die BC, und (1, 31. S.) durch den Punkt D mit der BC die DE parallel.



Beweis. Da mit der Seite DE des Dreyecks ADE die BC parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S.) die AB zu der BD wie die AC zu der CE. Es ist aber die BD der AC gleich; folglich verhält sich die AB zu der AC wie die AC zu der CE.

Demnach ist zu den zwey gegebenen geraden Linien AB, AC, die dritte Proportionallinie CE gefunden worden, w. z. v. w.

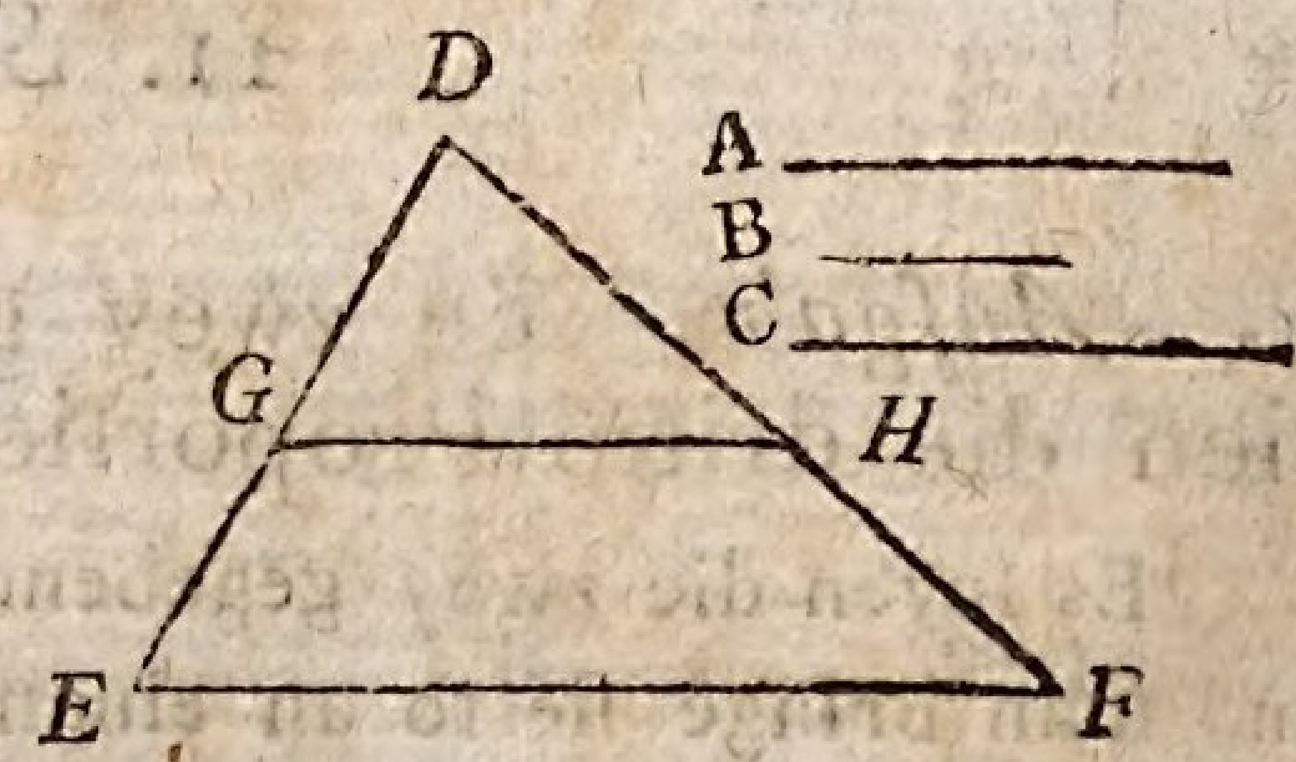
12. Saz.

Aufgabe. Zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Es seyen die drey gegebenen geraden Linien A, B, C, man soll zu den dreyen A, B, C die vierte Proportionallinie finden.

Auflösung. Man bringe die Linien DE, DF unter einem beliebigen Winkel EDF an einander, und mache der A die DG, der B aber die GE, und der C die DH gleich. Hierauf ziehe man die GH, und mit ihr durch den Punkt E die EF parallel.

Beweis. Da mit der Seite EF des Dreyecks DEF die GH parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S.) die DG zu der GE wie die *D*H zu der HF. Es ist aber die DG der A, die GE der B, und die DH der C gleich; folglich verhält sich die A zu der B wie C zu der HF.



Demnach ist zu den drey gebebenen geraden Linien A, B, C die vierte Proportionallinie HF gefunden worden, w. z. v. w.

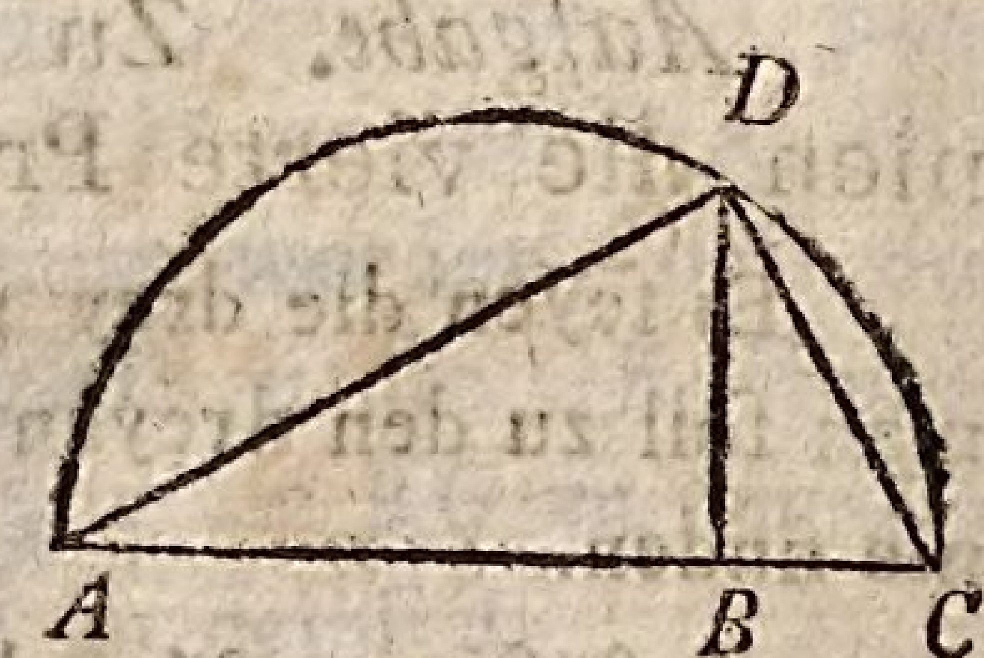
13. *Saz.*

Aufgabe. Zu zwey gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Es seyen die zwey gegebenen geraden Linien AB, BC, und man soll zu den beyden AB, BC die mittlere Proportionallinie finden.

Auflösung. Man bringe sie in *eine* gerade Linie an einander, beschreibe alsdann über der AC einen Halbkreis A*D*C, errichte in dem Punkte B (1, 11. S.) auf der AC die BD lothrecht, und ziehe die *A*D, DC.

Beweis. Da der Winkel ADC ein Winkel im Halbkreise ist, so ist er (3, 31. S.) ein rechter. *D*a nun in dem rechtwinklichten Dreyecke *A*DC von dem rechten Winkel aus nach der Grundlinie das Loth *D*B gefällt worden ist, so ist (6, 8. *Zus.*) die *D*B die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten *A*B, BC der Grundlinie.



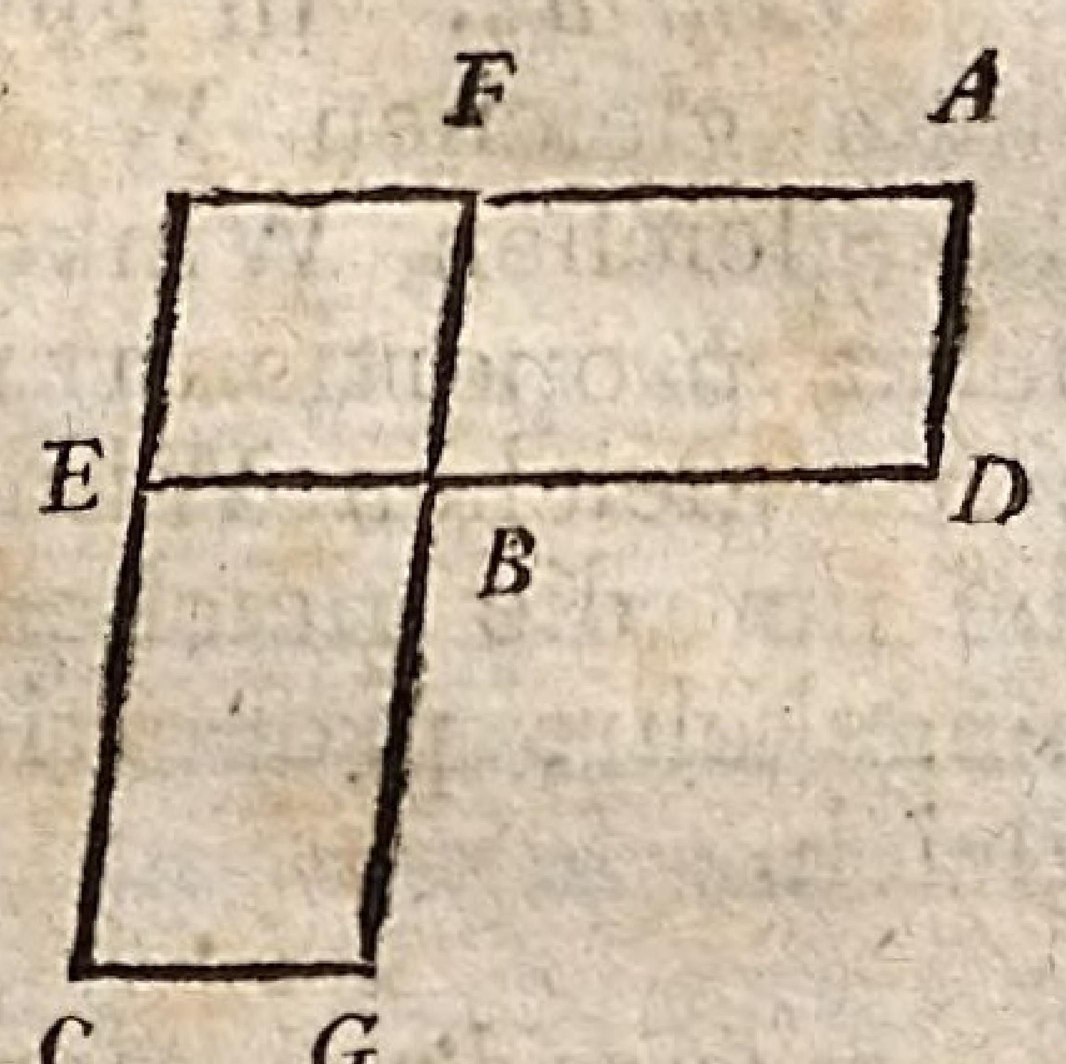
Dem-

Demnach ist zu den zwey gegebenen geraden Linien AB, BC, die mittlere Proportionallinie *DB* gefunden worden w. z. v. w.

14. *Saz.*

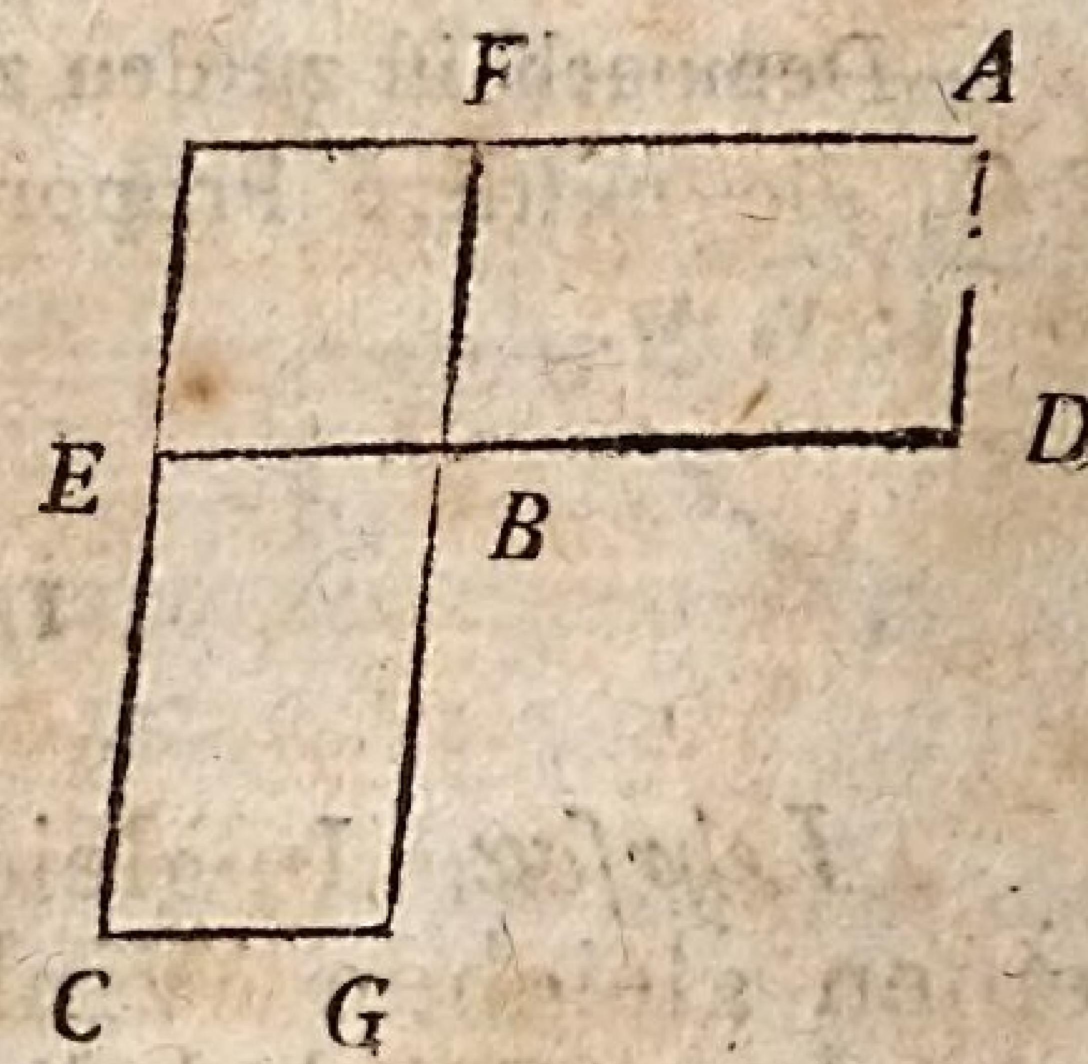
Lehrsaz. In gleichen Parallelogrammen, die einen gleichen Winkel haben, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt; und Parallelogramme, die einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt sind, sind einander gleich.

Es seyen die gleichen Parallelogramme AB, BC, und in beyden die Winkel bey B einander gleich, und man bringe ihre Seiten DB, BE in *eine* gerade Linie, so sind (1, 14. S.) auch die Seiten FB, BG in *einer* geraden Linie, und ich behaupte, dass die Seiten der Parallelogramme AB, BC, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt seyen, das heisst, dass die *D*B zu der BE sich verhalte wie die GB zu der BF.



Beweis. Nan ergänze das Parallelogramm FE. *D*a nun das Parallelogramm *A*B dem Parallelogramme BC gleich, FE aber ein anderes Parallelogramm ist, so verhält sich (5, 7. S.) die Figur AB zu der FE wie die BC zu der FE. *A*ber (6, 1. S.) verhält sich die Figur AB zu der FE wie die Seite DB zu der *B*E, und die Figur BC zu der FE wie die Seite GB zu der BF; folglich (5, 11. S.) die *D B* zu der BE wie die GB zu der BF. *D*emnach sind die Seiten der Parallelogramme AB, BC, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt.

Es



Es ſeyen aber nun die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt, und es verhalte ſich die *DB* zu der BE wie die GB zu der BF, ſo behaupte ich, daſs das Parallelogramm AB dem Parallelogramme BC gleich ſey.

Da die *D*B zu der *B*E ſich verhält wie die G*B* zu der BF, aber (6, 1. S.) das Parallelogramm *AB* zu dem Parallelogramme FE wie die DB zu der *B*E, und das Parallelogramm B*C* zu dem Parallelogramme FE wie die GB zu der *B*F, ſo verhält ſich (5, 11. S.) die Figur AB zu der FE wie die *B*C zu der FE, und mithin iſt (5, 9. S.) das Parallelogramm AB dem Parallelogramme BC gleich.

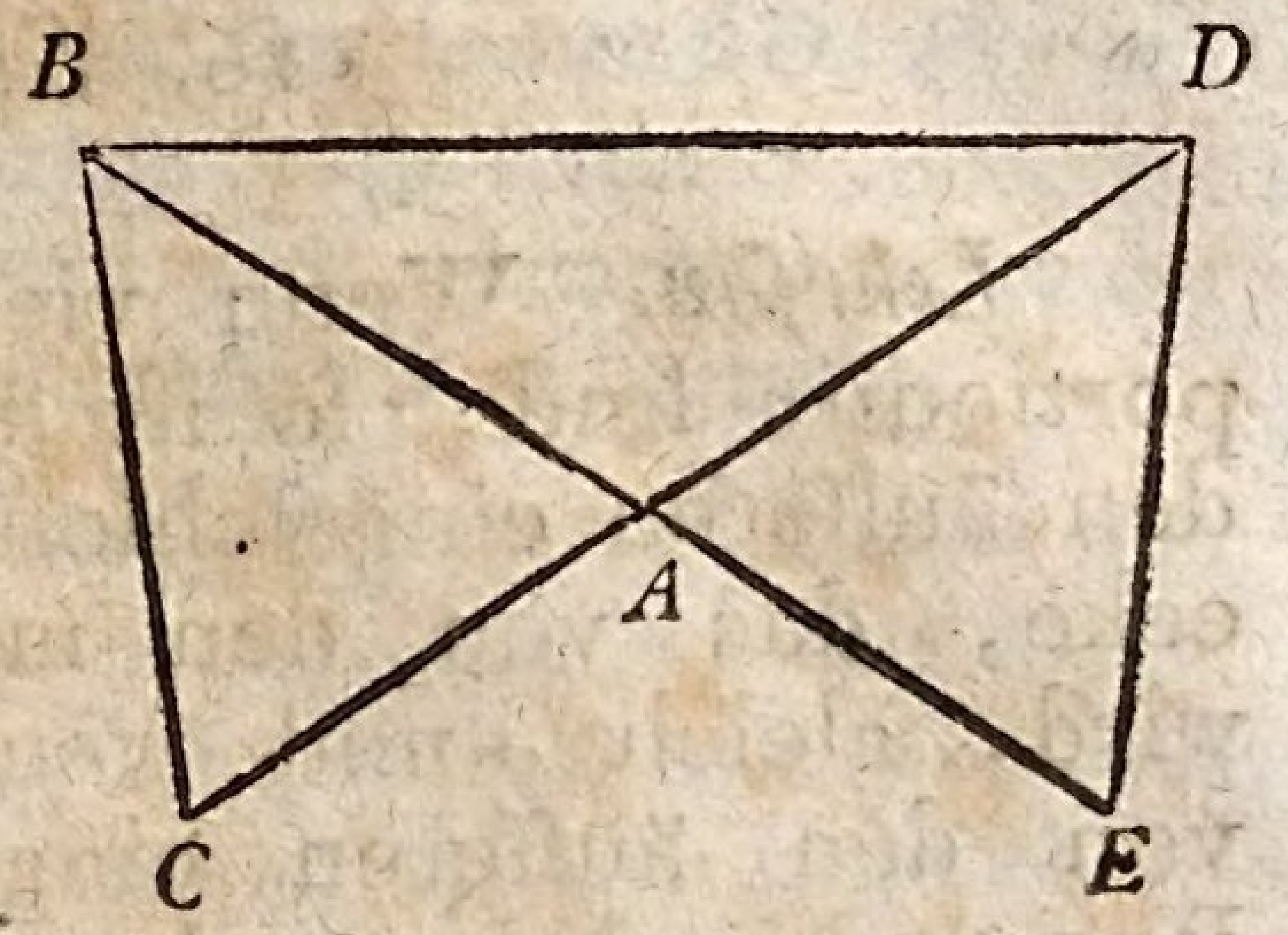
Demnach ſind in gleichen Parallelogrammen welche einen gleichen Winkel haben u. ſ. w. w. z. e. w.

15. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichen Dreyecken, welche einen gleichen Winkel haben, ſind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt; und Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſind, ſind einander gleich.

Es ſeyen die gleichen Dreyecke A*BC*, *AD*E, in welchen der Winkel BAC des einen dem Winkel DAE des andern gleich ſey, ſo behaupte ich, daſs in den Dreyecken *ABC*, *ADE* die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſeyen, das heiſst, daſs die CA zu der *AD* ſich verhalte wie die *A*E zu der *AB*.

Be-



Beweis. Man bringe sie so an einander, dass die C*A* mit der *A*D in *einer* geraden Linie liege, so ist (1, 14. S.) auch die E*A* mit der *AB* in *einer* geraden Linie. Man ziehe die *B*D. Da nun das Dreyeck *AB*C dem *A*DE gleich, *AB*D aber ein anderes Dreyeck ist, so verhält sich (5, 7. S.) das Dreyeck C*AB* zum Dreyecke *BA*D wie das Dreyeck *A*DE zum Dreyecke *BA*D. Aber (6, 1. S.) verhält sich das Dreyeck C*AB* zum Dreyecke *BA*D, wie die C*A* zu der *A*D, und das Dreyeck E*A*D zum Dreyecke *BA*D wie die E*A* zu der *AB*; folglich verhält sich (5, 11. S.) die C*A* zu der *A*D wie die E*A* zu der *AB*. Demnach sind die Seiten der Dreyecke *AB*C, *ADE*, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt groportionirt.

Es seyen aber nun die Seiten der Dreyecke *A*BC, *AD*E umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die C*A* zu der *AD* wie die E*A* zu der *A*B, so behaupte ich, dass das Dreyeck *AB*C dem Dreyecke *AD*E gleich sey.

Man ziehe wiederum die B*D*. Da nun die C*A* zu der *AD* sich verhält wie die E*A* zu der *A*B, aber (6, 1. S.) das Dreyeck *A*BC zum Dreyecke B*AD* wie die C*A* zu der *AD*, und das Dreyeck EAD zum Dreyecke *B*AD wie die E*A* zu der *A*B, so verhält (5, 11. S.) das Dreyeck *AB*C zum Dreyecke *AB*D wie das Dreyeck E*AD* zum Dreyecke B*AD*. Die beyden Dreyecke *AB C*, A*D*E also haben zu dem Dreyecke *B*A*D* einerley Verhältniss; folglich ist (5, 9. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke E*AD* gleich.

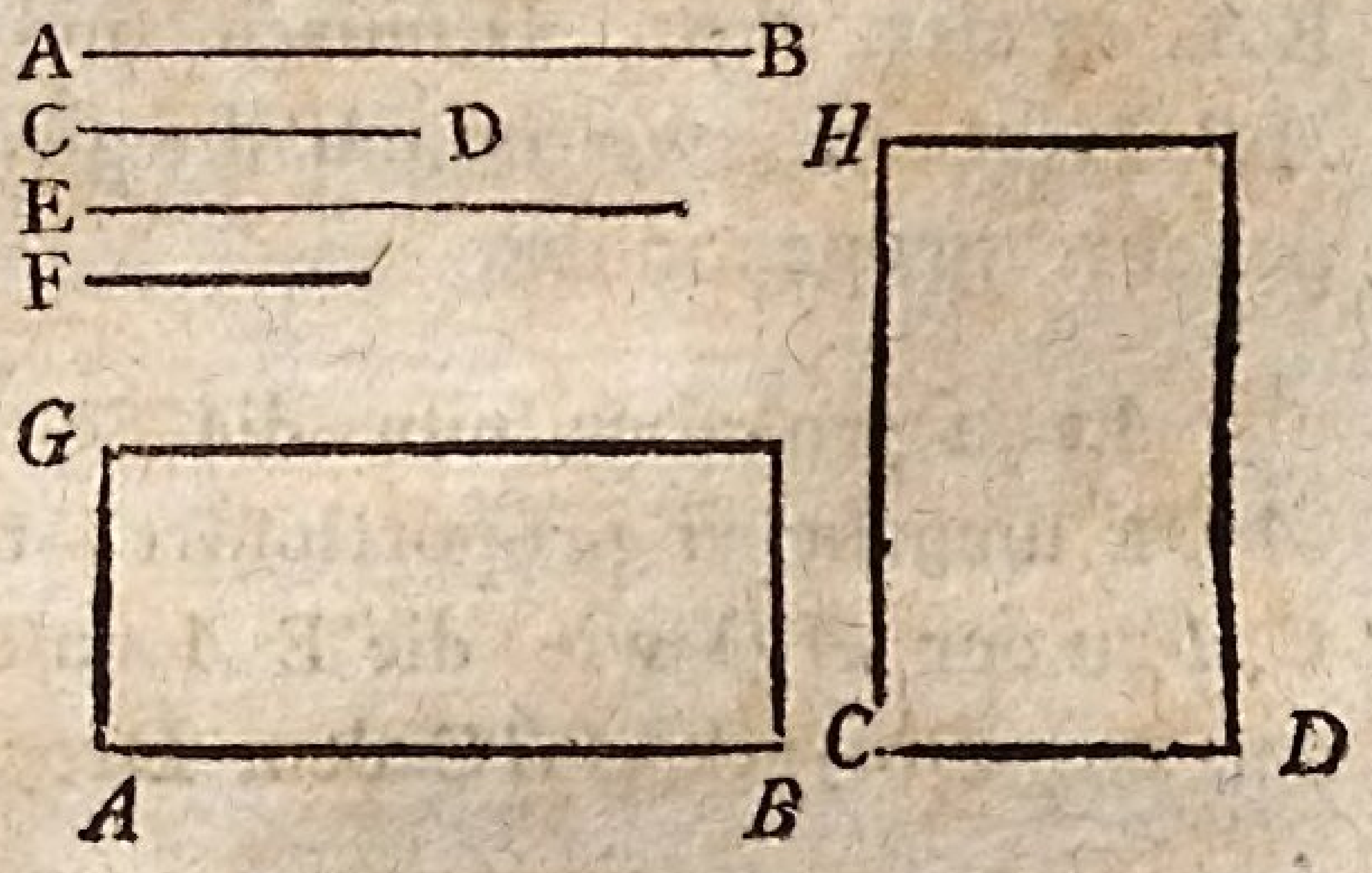
Demnach sind in gleichen Dreyecken, die einen gleichen Winkel haben u. s. w. w. z. e. w.

16. *Saz.*

16. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn vier gerade Linien proportionirt sind, so ist das Rechteck, das von den äusseren eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den mittleren eingeschlossen wird, gleich; und wenn das Rechteck, das von den äusseren eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den mittleren eingeschlossen wird, gleich ist, so sind die vier geraden Linien proportionirt.

Es seyen die vier geraden Linien AB, CD, E, F proportionirt, so dass die AB sich zu der CD verhalte wie die E zu der F, so behaupte ich, dass das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien CD, E eingeschlossen wird, gleich sey.



Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in den Punkten A, C, auf den Linien AB, CD die AG, CH lothrecht, mache der F die AG, der E aber die CH gleich, und ergänze die Parallelogramme BG, DH.

Da nun die AB zu der CD sich verhält wie die E zu der F, die E aber der CH, und die F der HG gleich ist, so verhält sich (5, 7. S.) die AB zu der CD wie die CH zu der AG; Folglich sind in den Parallelogrammen BG, DH die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportonirt. Gleichwinklichte Parallelogramme aber, in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt sind, sind (6, 14. S.) einander gleich; folglich ist das Parallelogramm BG dem Parallelogramme DH gleich. Das Parallelogramm BG aber wird von den Linien AB, F eingeschlossen, denn die AG ist der F gleich, das Par-

Parallelogramm DH hingegen von den Linien CD, E, denn die CH ist der E gleich; Folglich ist das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien CD, E eingeschlossen wird, gleich.

Es sey aber nun das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien CD, E eingeschlossen wird, gleich, so behaupte ich, daſs die vier geraden Linien proportionirt seyen, daſs nämlich die AB zu der CD sich verhalte wie die E zu der F.

Da, nach der vorigen Construction, das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien CD, E eingeschlossen wird, gleich ist, BG aber das von den Linien AB, F eingeschlossene Rechteck ist, weil die AG der F gleich ist, DH hingegen das von den Linien CD, E eingeschlossene Rechteck ist, weil die CH der E gleich ist, so ist das Parallelogramm BG dem Parallelogramme DH gleich, auch sind sie gleichwinklicht. In gleichen und gleichwinklichten Parallelogrammen aber sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten (6, 14. S.) umgekehrt proportionirt; Folglich verhält sich die AB zu der CD wie die CH zu der AG. Es ist aber die CH der E, und die AG der F gleich; Folglich verhält sich die AB zu der CD wie die E zu der F.

Wenn demnach vier gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

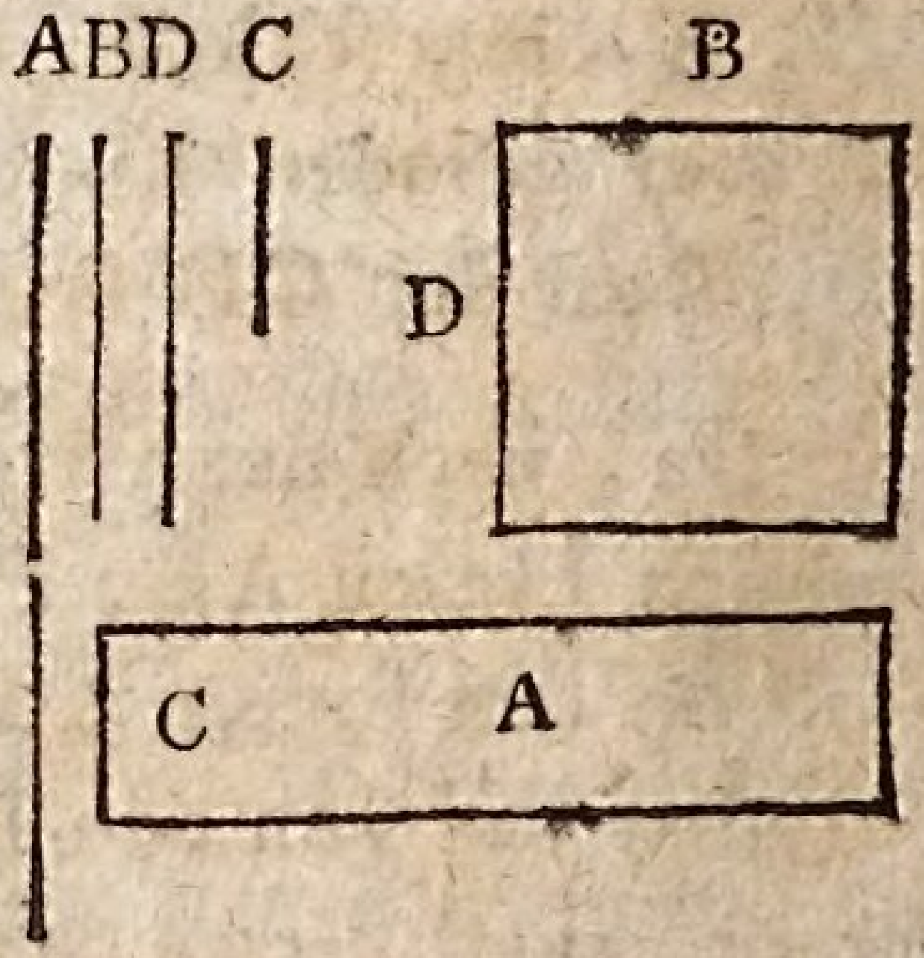
17. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey gerade Linien proportionirt sind, so ist das Rechteck, das von den beyden äussern eingeschlossen wird, dem Quadrate der mittleren gleich; und wenn das Rechteck, das von den beyden äussern eingeschlossen wird, dem Quadrate der mittleren gleich ist, so sind die drey geraden Linien proportionirt.

Es

Es seyen die drey geraden Linien A, B, C, proportionirt, so daſs die A zu der B sich verhalte, wie die B zu der C, so behaupte ich, daſs das Rechteck, das von den Linien A, C eingeschlossen wird, dem Quadrate der mittleren B gleich sey.

Beweis Man mache der B die D gleich.



Da nun die A zu der B sich verhält, wie die B zu der C, die B aber der D gleich ist, so verhält sich auch die A zu der B wie die D zu der C. Wenn aber vier gerade Linien proportionirt sind, so ist (6, 16. S.) das von den äussern eingeschlossene Reckteck, dem von den mittlern eingeschlossenen Rechtecke gleich; Folglich ist das von den Linien A, C eingeschlossene Rechteck dem von den Linien B, D eingeschlossenen Rechtecke gleich. Aber das von den Linien B, D eingeschlossene Rechteck ist dem Quadrate der B gleich, denn die B selbst ist der D gleich; folglich ist das Rechteck, das von den Linien A, C eingeschlossen wird, dem Quadrate der Linie B gleich.

Es sey nun aber das Rechteck, das von den Linien A, C eingeschlossen wird, dem Quadrate der Linie B gleich, so behaupte ich, daſs die A zu der B sich verhalte wie die B zu der C.

Da, nach der vorigen Construction, das von den Linien A, C eingeschlossene Rechteck dem Quadrate der B gleich ist, das Quadrat der E aber dem von den Linien B, D eingeschlossenen Rechtecke gleich ist, weil die B selbst der D gleich ist, so ist das von den Linien A, C eingeschlossene Rechteck dem von den Linien B, D eingeschlossenen gleich. Wenn aber das von den äusseren eingeschlossene Rechteck dem von den mittleren eingeschlossenen gleich ist, so sind (6, 16. S.) die vier geraden Linien proportionirt; folglich verhält sich die A zu der B wie die D zu der C.

Die

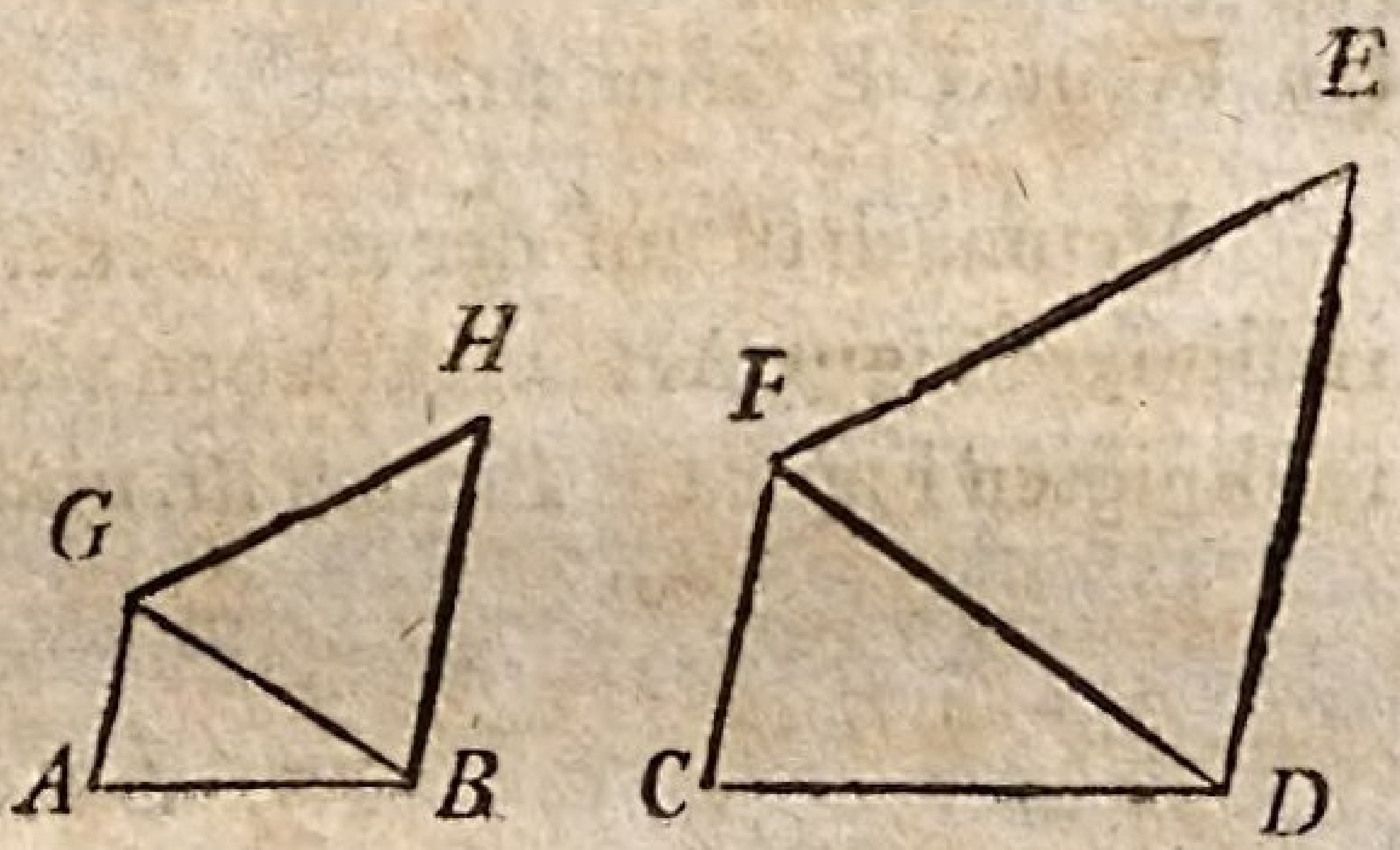
Die B aber ist der D gleich, folglich verhält sich auch die A zu der *B* wie die B zu der C.

Wenn demnach drey gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie eine geradlinigte Figur zu beschreiben, die einer andern gegebenen ähnlich sey, und ähnlich liege.

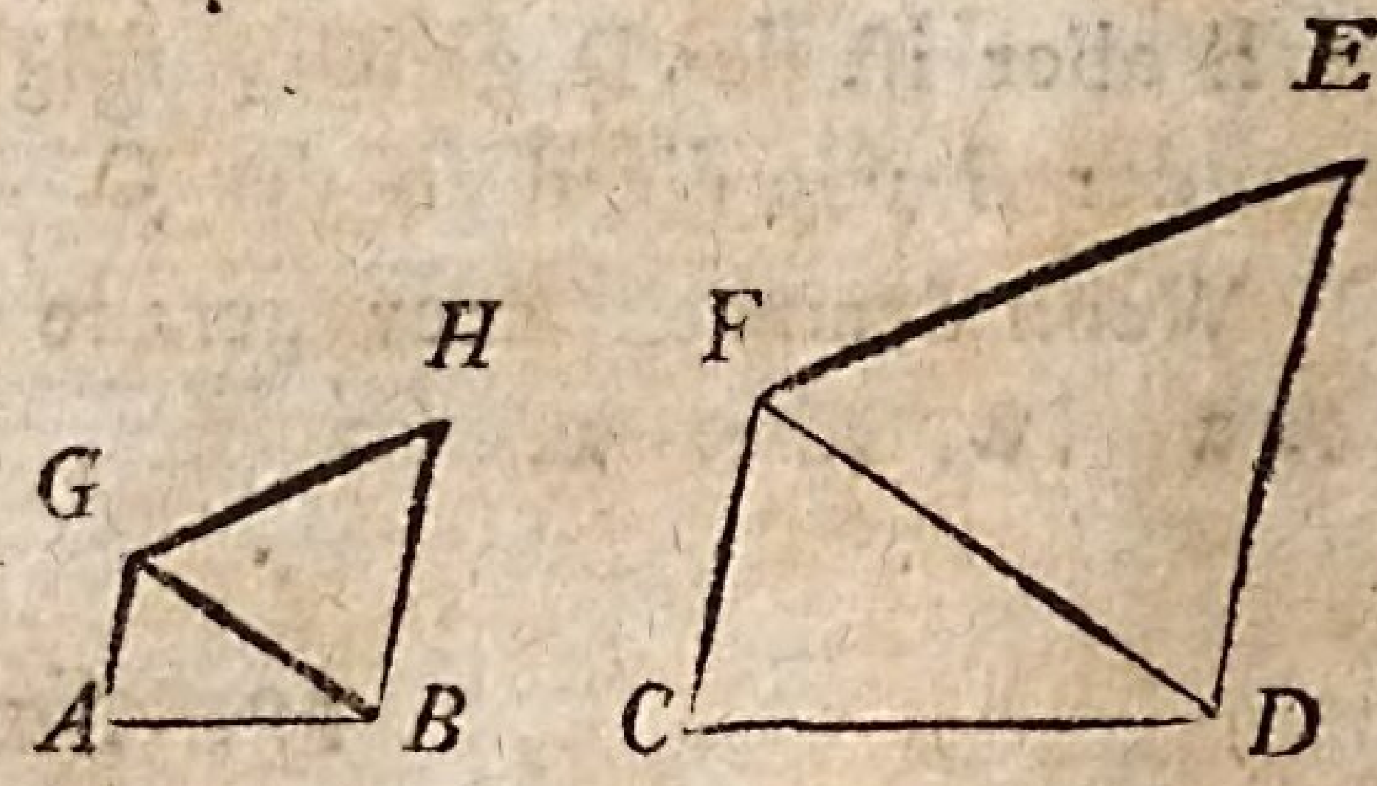
Es sey die gegebene gerade Linie AB, die gegebene geradlinigte Figur CE, man soll auf der Linie AB eine geradlinigte Figur beschreiben, die der CE ähnlich sey, und ähnlich liege.



Auflösung u. *Beweis.* Man ziehe die DF, und seze (1, 23. S.) an die Punkte A, B der geraden Linie AB den Winkel GAB, der dem Winkel C, und den Winkel ABG, der dem Winkel CDF gleich sey, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel CFD dem übrigen Winkel AGB gleich, folglich das Dreyeck FDC dem Dreyecke GAB gleichwinklicht, und mithin verhält sich (6, 4. S.) die FD zu der G*B* wie die FC zu der GA, und wie die CD zu der AB. Man seze ferner an die Punkte B, G der Linie BG den Winkel BGH, der dem Winkel DFE, und den Winkel GBH, der dem Winkel FDE gleich sey, so ist auch der übrige Winkel bey E dem übrigen Winkel bey H gleich, und mithin das Dreyeck FDE dem Dreyecke G*B*H gleichwinklicht; folglich (6, 4. S.) die FD zu der G*B* wie die FE zu der GH, und wie die ED zu der HB. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die FD zu der BG sich verhalte wie die FC zu der GA, und wie die CD zu der AB; folglich verhält sich

auch

auch (5, 11. S.) die FC zu der GA wie die CD zu der AB, wie die FE zu der GH, und wie die ED zu der HB. Da nun der Winkel CFD dem Winkel AGB, der Winkel DFE aber dem Winkel BGH gleich ist, so ist der ganze Winkel CFE dem ganzen Winkel AGH gleich. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel CDE dem Winkel ABH, gleich, überdies ist auch der Winkel bey C dem Winkel bey A, und der Winkel bey E dem Winkel bey H gleich; Demnach ist die Figur AH der CE gleichwinklicht und in beyden sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt; Folglich ist (6, 1. Erkl.) die geradlinigte Figur AH der geradlinigten Figur CE ähnlich.



Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie *AB* eine geradlinigte Figur AH beschrieben worden, die der gegebenen geradlinigten Figur CE ähnlich ist, und ähnlich liegt, w. z. v. w.

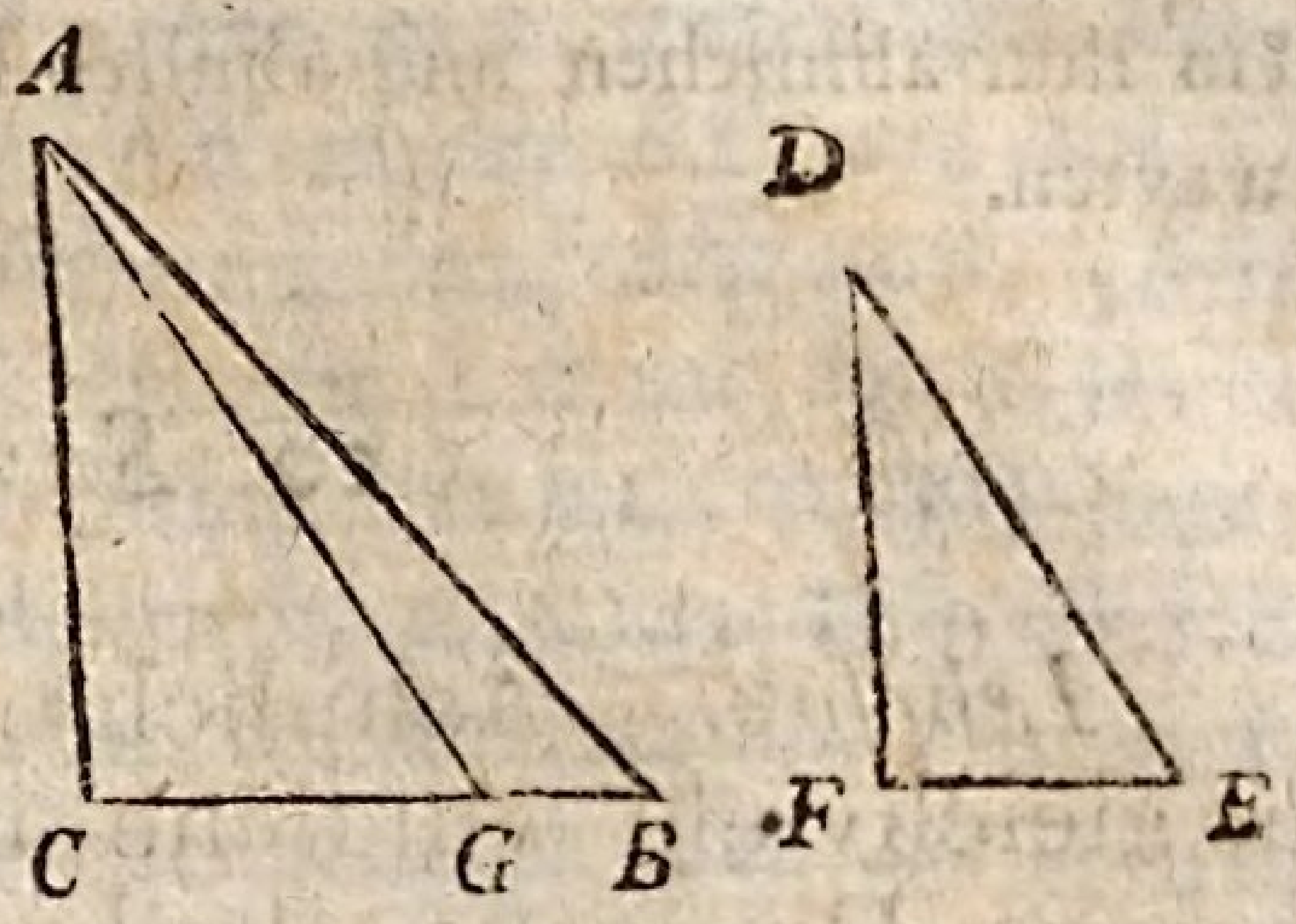
19. *Saz.*

Lehrsaz Aehnliche Dreyecke sind in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seyen die ähnlichen Dreyecke ABC, DEF, in welchen der Winkel bey B dem Winkel bey E gleich sey, und es verhalte sich die AB zu der BC wie die DE zu der EF, und es sey also (5, 13. Erkl.) die Seite BC der EF homolog, so behaupte ich, dass das Dreyeck *A*BC zu dem Dreyecke DEF ein zweymal höheres Verhältniss habe, als die Seite BC zu der EF.

Beweis. Man nehme (6, 11. S.) zu den beyden BC, EF die dritte Proportionallinie BG, und es verhalte sich die

die B C zu der E F, wie die E F zu der B G, hierauf ziehe man die G A.



Da nun die A B zu der B C ſich verhält wie die D E zu der E F, ſo verhält ſich auch *verwechſelt* (5, 16. S.) die A B zu der D E wie die B C zu der E F. Aber wie die B C zu der E F, ſo verhält ſich die E F zu der B G; folglich (1, 32. S.) auch die A B zu der D E wie die E F zu der B G; es ſind alſo in den Dreyecken A B G, D E F die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt. Dreyecke aber, die einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſind, ſind (6, 15. S) einander gleich; folglich iſt das Dreyeck A B G dem Dreyecke E D F gleich. Und da die B C zu der E F ſich verhält, wie die E F zu der B G, wenn aber drey gerade Linien proportionirt ſind, die erſte zur dritten (5, 10. Erkl) ein zweymal höheres Verhältniſs hat, als zur zweyten, ſo hat die B C zu der B G ein zweymal höheres Verhältniſs, als die B C zu der E F. Aber wie die B C zu der B G ſich verhält ſo verhält ſich (6, 1. S.) das Dreyeck A B C zum Dreyecke A B G; folglich hat auch das Dreyeck A B C zum Dreyecke A B G ein zweymal höheres Verhältniſs, als die B C zu der E F. Das Dreyeck A B G aber iſt dem Dreyecke D E F gleich; folglich hat (5, 7. S.) auch das Dreyeck A B C zu dem Dreyecke D E F ein zweymal höheres Verhältniſs, als die B C zu der E F.

Demnach ſind ähnliche Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

Zuſaz. Da gezeigt worden iſt, daſs das Dreyeck A B C zum Dreyecke A B G, das heiſst zum Dreyecke D E F, ſich verhalte, wie die C B zu der B G, ſo erhellet hieraus, daſs wenn drey gerade Linien proportionirt ſind, die erſte zur dritten ſich verhalte, wie das Dreyeck über der erſten zu

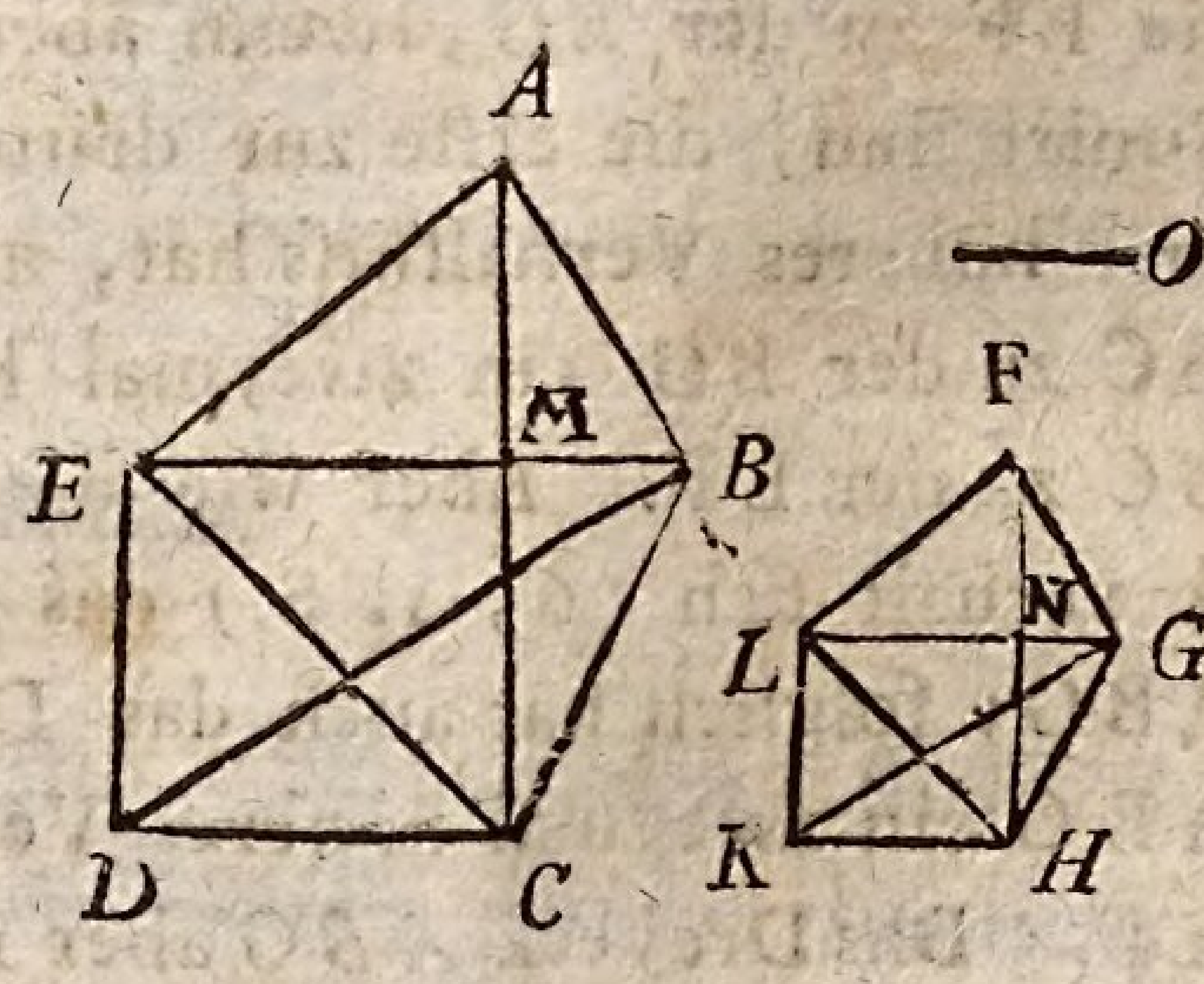
dem

dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Dreyecke über der zweyten.

20. *Saz.*

Lehrsaz. Aehnliche Polygone lassen sich in gleichviele ähnliche und den Ganzen homologe Dreyecke theilen. Und ein Polygon hat zum andern ein zweymal höheres Verhältniss, als eine homologe Seite des einen zu einer homologen Seite des andern.

Es seyen die ähnlichen Polygone, ABCDE, FGHKL, und die Seite AB der FG homolog, so behaupte ich, dass die Polygone A*B*CDE, FGH*K*L in gleichviele ähnliche und den Ganzen homologe Dreyecke sich theilen lassen, und dass das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL ein zweymal höheres Verhältniss habe, als die Seite AB zu der FG.

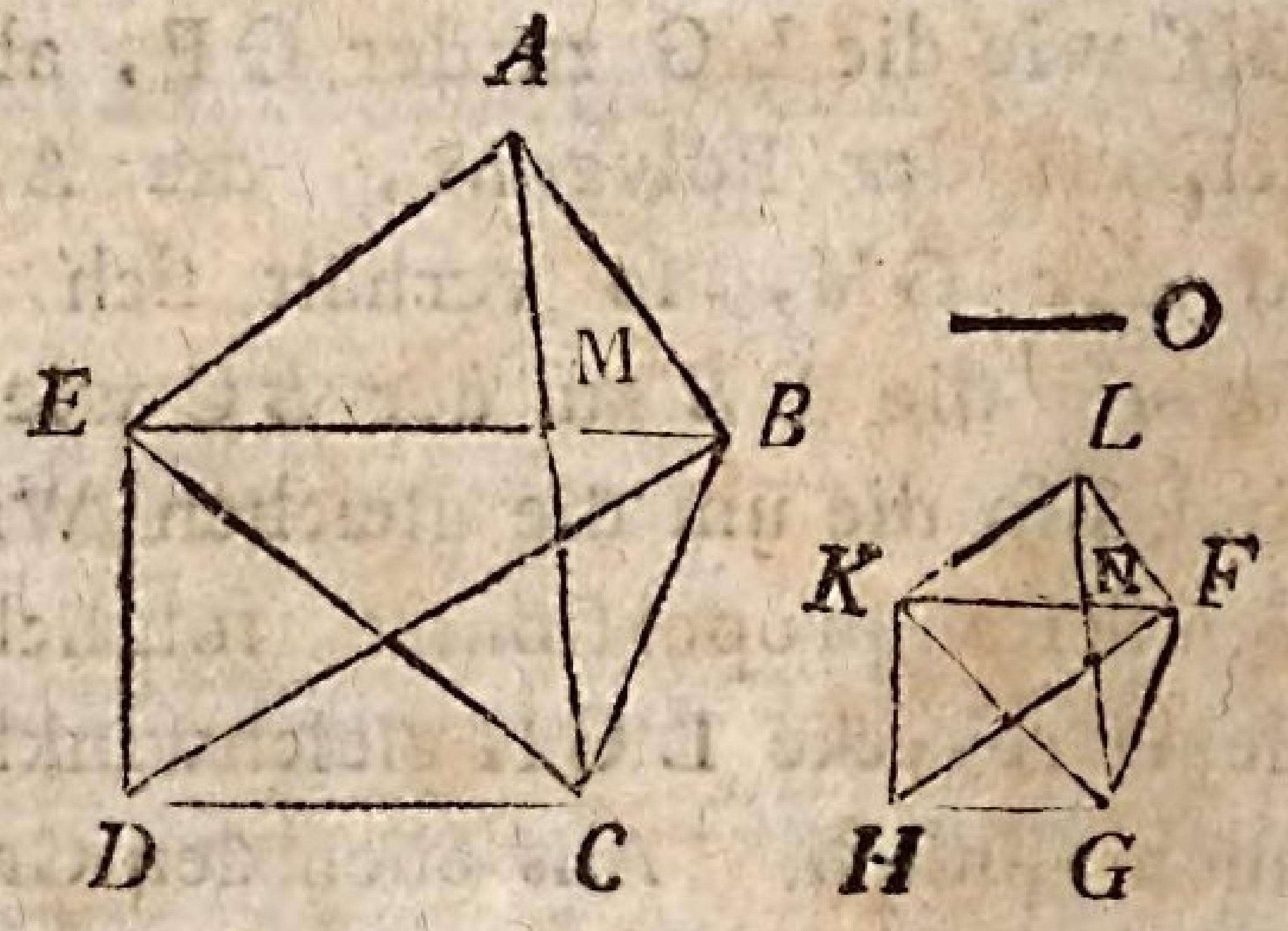


Beweis. Man ziehe die Linien BE, EC, GL, LH. Da das Polygon ABCDE dem Polygone FGHKL ähnlich ist, so ist der Winkel BAE dem Winkel GFL gleich, und es verhält sich die *B*A zu der AE wie die GF zu der FL. Da nun ABE, FGL zwey Dreyecke sind, die einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, so ist (*6*, *6*. S.) das Dreyeck ABE dem Dreyecke FGL gleichwinklicht; folglich (*6*, 4. S.) auch ähnlich. Demnach ist der Winkel ABE dem Winkel FGL gleich. Wegen der Aehnlichkeit der Polygone aber ist auch der ganze Winkel A*B*C dem ganzen FGH gleich; folglich auch der Rest E*BC* dem Reste LGH. Da nun wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke *A*BE, FGL die EB zu der BA sich verhält

hält wie die L G zu der G F, aber auch, wegen der Aehnlichkeit der Polygone, die AB zu der *BC* wie die FG zu der GH, so verhält sich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die E*B* zu der *B*C wie die LG zu der GH; es sind also die um die gleichen Winkel EBC, LGH liegenden Seiten proportionirt, folglich (6, 6. S.) das Dreyeck *EBC* dem Dreyecke L GH gleichwinklicht, und mithin (6, 4. S.) auch ähnlich. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck ECD dem Dreyecke L*H*K ähnlich; Folglich lassen sich die ähnlichen Polygone A*B*CDE, FGHKL in gleichviele ähnliche Dreyecke theilen.

Ich behaupte ferner, dass sie auch den Ganzen homolog seyen, das heisst, dass die Dreyecke auch proportionirt seyen, und zwar so, dass *AB*E, E*B*C, ECD Vorderglieder, FGL, LGH, LHK Hinterglieder seyen, und dass das Polygon A*B*CDE zu dem Polygone FGHKL ein zweymal höheres Verhältniss habe, als eine homologe Seite des einen zu einer homologen Seite des andern, das heisst, als die AB zu der FG.

Man ziehe die AC, FH. Da nun, wegen der Aehnlichkeit der Polygone, der Winkel *AB*C dem Winkel FGH gleich ist, und die AB zu der BC sich verhält wie die FG zu der GH, so ist (6, 6. S.) des Dreyeck A*B*C dem Dreyecke FGH gleichwinklicht; Folglich ist der Winkel *B*AC dem Winkel GFH, der Winkel *B*CA aber dem Winkel GHF gleich. Da ferner der Winkel *B*AM dem Winkel GFN gleich ist, von dem Winkel ABM aber gezeigt ist, dass er dem Winkel FGN gleich sey, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel AM*B* dem übrigen FNG gleich; folglich das Dreyeck ABM dem Dreyecke FGN gleichwinklicht. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass auch das Dreyeck *B*MC dem Dreyecke GNH gleichwinklicht sey; folglich verhält sich (6, 4. S.) die AM zu der M*B* wie die FN zu der NG, und die BM zu der MC wie die GN zu der NH; folglich (5, 22. S.) auch *gleichförmig*, die *A*M zu der MC wie die FN zu der NH. Aber wie die AM zu der MC, so verhält sich das Dreyeck *AM*E zu dem Dreyecke EMC, denn die-



ſe verhalten ſich (6, 1. S.) zu einander wie ihre Grundlinien, (5, 12. S.) aber verhält ſich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zuſammen zu allen Hintergliedern zuſammen; folglich verhält ſich das Dreyeck AMB zum Dreyecke BMC wie das Dreyeck ABE zum Dreyecke CBE. Aber das Dreyeck AMB verhält ſich zum Dreyecke BMC wie die AM zu der MC; folglich verhält ſich auch (5, 11. S.) die AM zu der MC wie das Dreyeck ABE zum Dreyecke EBC. Aus eben den Gründen verhält ſich auch die FN zu der NH wie das Dreyeck FGL zum Dreyecke GLH. Es verhält ſich aber auch die AM zu der MC wie die FN zu der NH; folglich (5, 11. S) das Dreyeck ABE zum Dreyecke EBC wie das Dreyeck FGL zum Dreyecke GLH, und (5, 16. S) *verwechſelt*, das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH. Auf gleiche Art kann nun, wenn man die BD, GK zieht, gezeigt werden, daſs auch das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH ſich verhalte wie das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK. Und da das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL ſich verhält wie das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH, und wie das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK, und (5, 12. S.) eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder, wie alle Vorderglieder zuſammen zu allen Hintergliedern zuſammen, ſo verhält ſich auch das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Polygon ABCDE zum Polygone FGHKL. Aber das Dreyeck ABE hat zu dem Dreyecke FGL ein zweymal höheres Verhältniſs, als die homologe Seite AB zu der homologen Seite FG, denn (6, 19. S.) ſind ähnliche Dreyecke in zweymal höherem Verhältniſſe ihrer homologen Seiten; folglich hat auch das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL ein zweymal höheres Verhältniſs, als die homologe Seite AB zu der homologen Seite FG.

Dem-

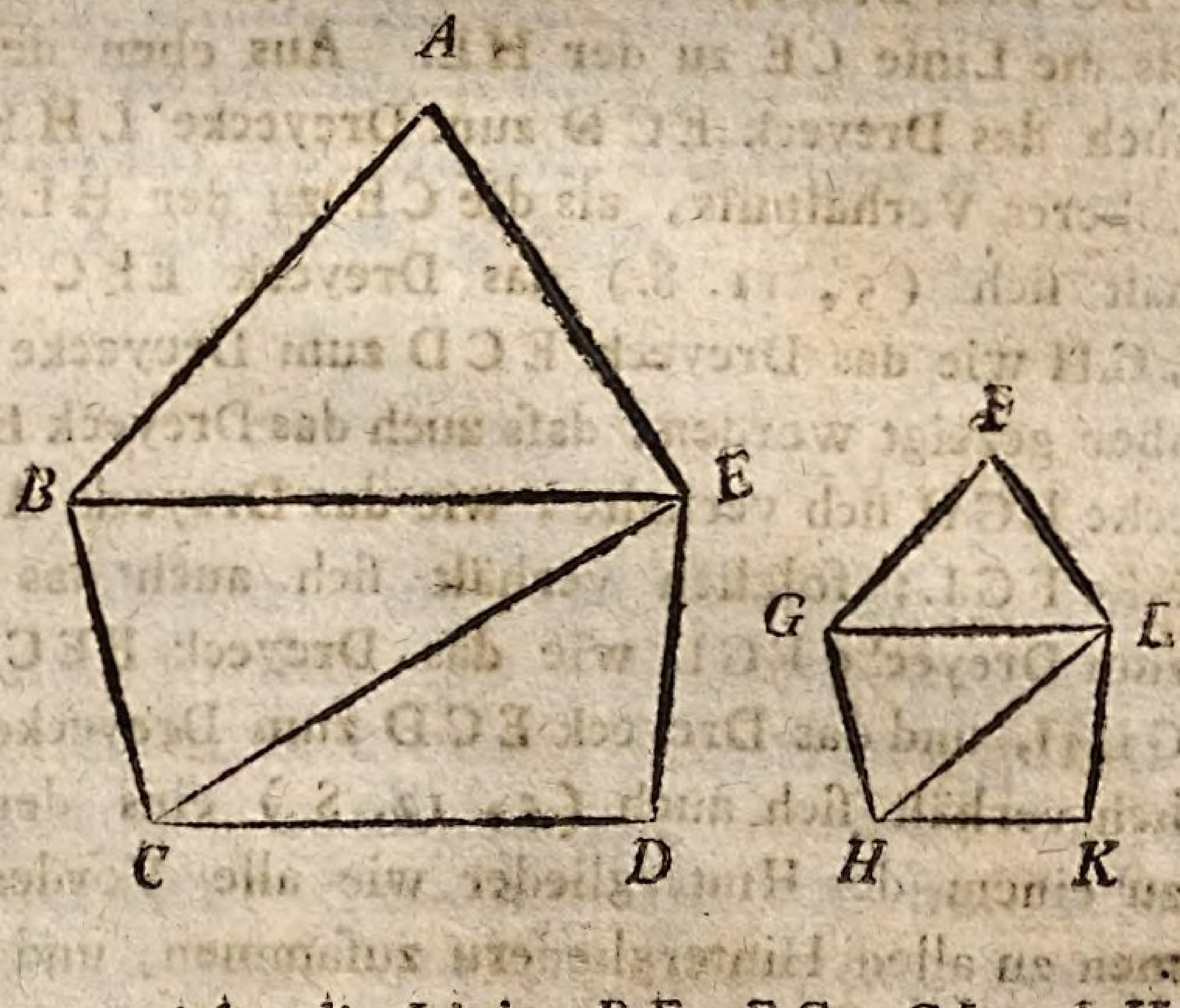
Demnach laſſen ſich ähnliche Palygone u. ſ. w. w. z. e. w.

Zuſaz. 1. Auf gleiche Art kann auch von ähnlichen vierſeitigen Figuren gezeigt werden, daſs ſie in zweymal höherem Verhältniſſe ihrer homologen Seiten ſeyen. Es iſt aber (6, 19. S.) auch von den Dreyecken gezeigt worden; Folglich ſind allgemein die ähnlichen geradlinigten Figuren in zweymal höherem Verhältniſſe ihrer homologen Seiten.

Zuſaz. 2. Nimmt man zu den beyden AB, FG die dritte Proportionallinie O, ſo hat (5, 10. Erkl.) die AB zu der O ein zveymal höheres Verhältniſs, als die AB zu der FG. Es hat aber auch ein Polygon zu einem andern, und eine vierſeitige Figur zu einer andern ein zweymal höheres Verhältniſs, als eine homologe Seite zu einer andern, das heiſst, als die AB zu der FG. Und eben dieſes iſt auch von den Dreyecken gezeigt worden, folglich erhellet im allgemeinen, daſs wenn drey gerade Linien proportionirt ſind, die erſte zur dritten ſich verhalte wie eine geradlinigte Figur über der erſten zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figur über der zweyten.

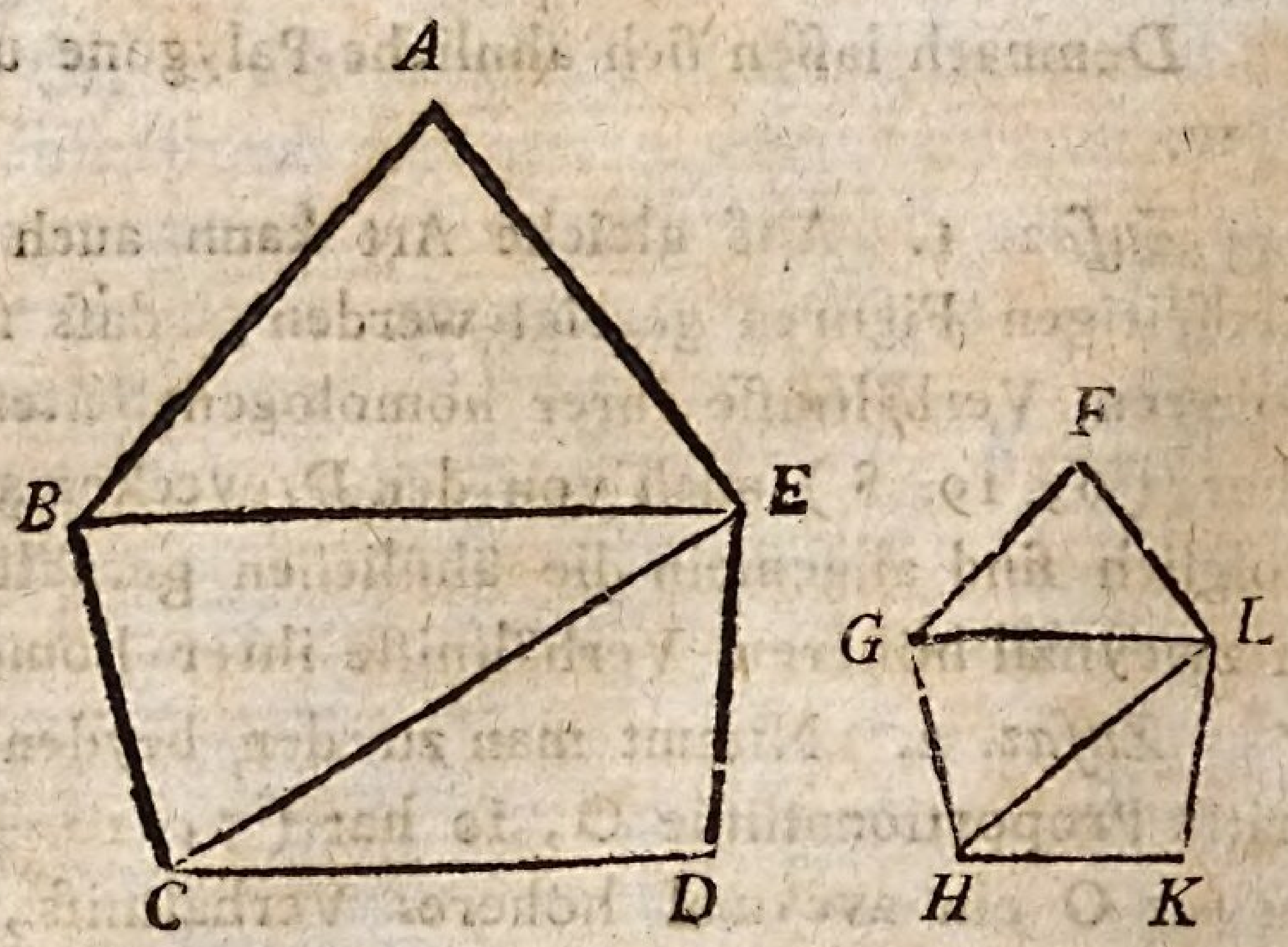
Anderer Beweis.

Es kann auch auf eine andere Art kürzer gezeigt werden, daſs die Dreyecke homolog ſeyen.



Es ſeyen wieder die Polygone ABCDE, FGHKL, und man ziehe die Linien BE, EC, GL, LH, ſo behaupte ich, daſs das Dreyeck *ABE* zum Dreyecke

FGL sich verhalte, wie das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH, und das Dreyeck CDE zum Dreyecke HKL.



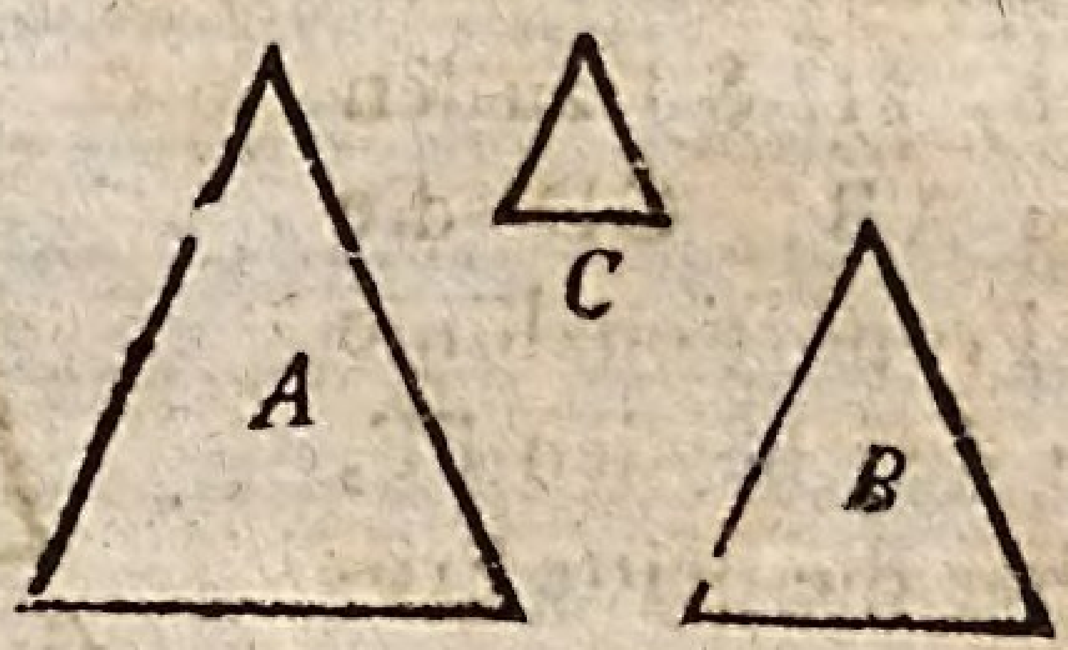
Da das Dreyeck ABE dem Dreyecke FGL ähnlich ist, so hat das Dreyeck ABE (6, 19. S.) zum Dreyecke FGL ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BE zu der GL. Aus eben dem Grunde hat auch das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BE zu der GL; folglich verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH. Da ferner das Dreyeck EBC dem Dreyecke LGH ähnlich ist, so hat (6, 19. S.) das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH ein zweymal höheres Verhältniſs, als die Linie CE zu der HL. Aus eben dem Grunde hat auch das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK ein zweymal höheres Verhältniſs, als die CE zu der HL; folglich verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH wie das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK. Es ist aber gezeigt worden, daſs auch das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH sich verhalte, wie das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL; folglich verhält sich auch das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH, und das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK; folglich verhält sich auch (5, 12. S.) eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen, und so weiter wie im vorigen Beweis, w. z. e. w.

21. *Saz.*

21. *Saz.*

Lehrsaz. Geradlinigte Figuren, die einer und derselben ähnlich sind, sind auch einander selbst ähnlich.

Es seyen die beyden geradlinigten Figuren A, B der C ähnlich, so behaupte ich, dass auch die A der B ähnlich sey.

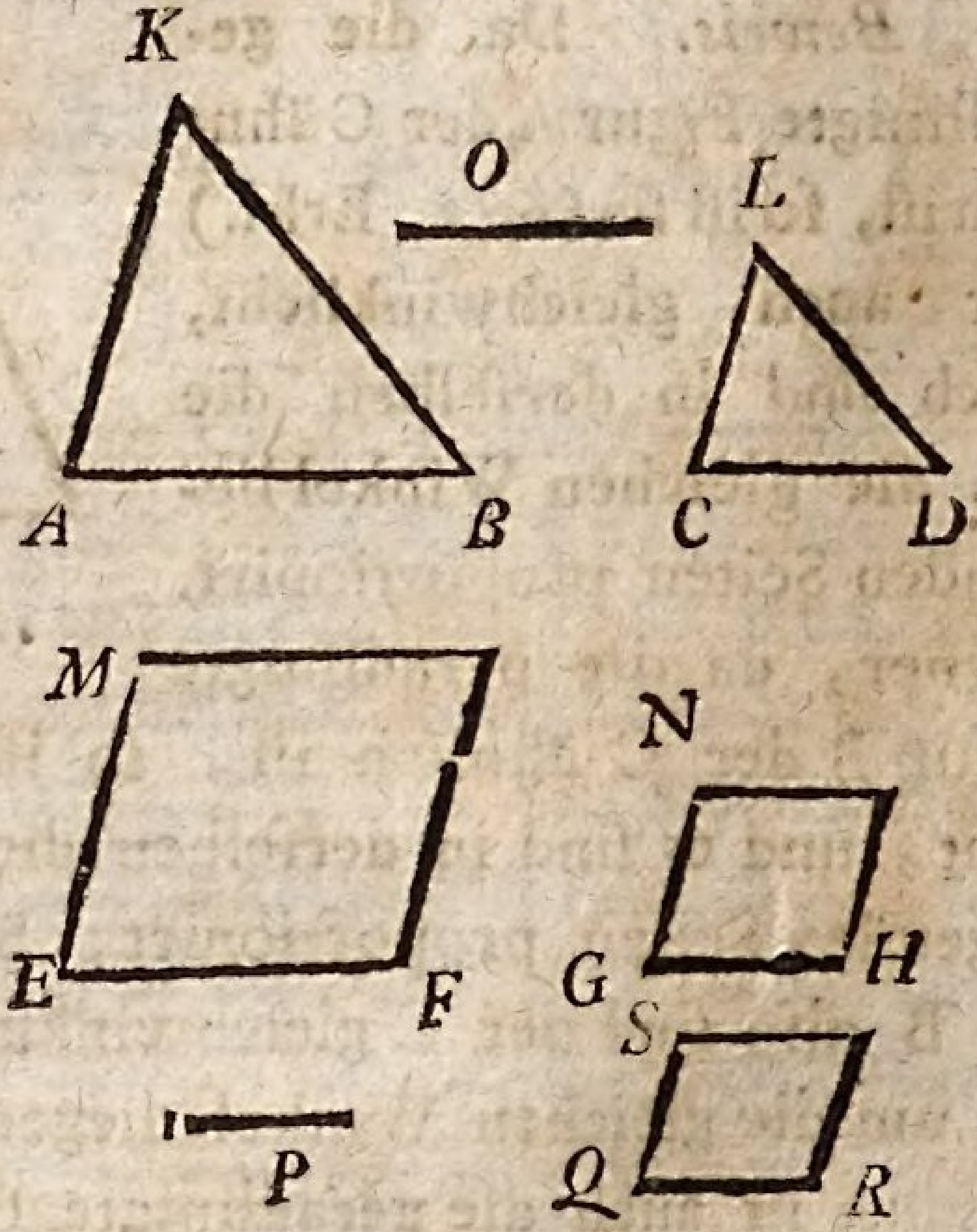


Beweis. Da die geradlinigte Figur A der C ähnlich ist, so ist sie (6, 1. Erkl.) ihr auch gleichwinklicht, auch sind in derselben die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt. Ferner, da die geradlinigte Figur B der C ähnlich ist, so ist sie ihr auch gleichwinklicht, und es sind in derselben die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt; Beyde geradlinigte Figuren A, B also sind der C gleichwinklicht, und in beyden sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt; folglich ist auch die geradlinigte Figur A der B gleichwinklicht, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten sind (5, 11. S.) in beyden proportionirt, und mithin ist (6, 1. Erkl.) die A der B ähnlich w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn vier gerade Linien proportionirt sind, so sind die auf ihnen beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren auch proportionirt; und wenn die über vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren proportionirt sind, so sind auch die geraden Linien proportionirt.

Es ſeyen die vier geraden Linien A B, C D, E F, G H, proportionirt, ſo daſs die A B zu der C D ſich verhalte wie die E F zu der G H, und man beſchreibe über den Linien *A* B, C D die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren K A B, L C D, über den Linien E F, G H aber die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren M F, N H, ſo behaupte ich, daſs die geradlinigte Figur K A B zu der L C D ſich verhalte wie die M F zu der N H.



Beweis. Man nehme (6, 11. S.) zu den beyden A B, C D die dritte Proportionallinie O, zu den beyden EF, GH aber die dritte Proportimnallinie P.

Da nun die A B zu der C D ſich verhält wie die E F zu der G H, die C D aber zu der O wie die G H zu der P, ſo verhält ſich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die A B zu der O wie die E F zu der P. Aber (6, 20. *Zuſ.* 2.) verhält ſich die A B zu der O wie die geradlinigte Figur K A B zu der L C D, und die E F zu der P wie die geradlinigte Figur M F zu der N H; Folglich (5, 11. S.) die K A B zu der L C D wie die M F zu der N H.

Es verhalte ſich aber nun die geradlinigte Figur K *A B* zu der L C D wie die M F zu der N H, ſo behaupte ich, daſs auch die A B zu der C D ſich verhalte wie die E F zu der G H. Man mache (6, 12. S.) die A B zu der C D wie die E F zu der Q R und beſchreibe (6, 18. S.) über der Q R eine der M F oder N H ähnliche und ähnlich liegende geradlinigte Figur S R.

Da nun die A B zu der C D ſich verhält wie die E F zu der Q R, und über den beyden A B, C D die ähnlichliegen-

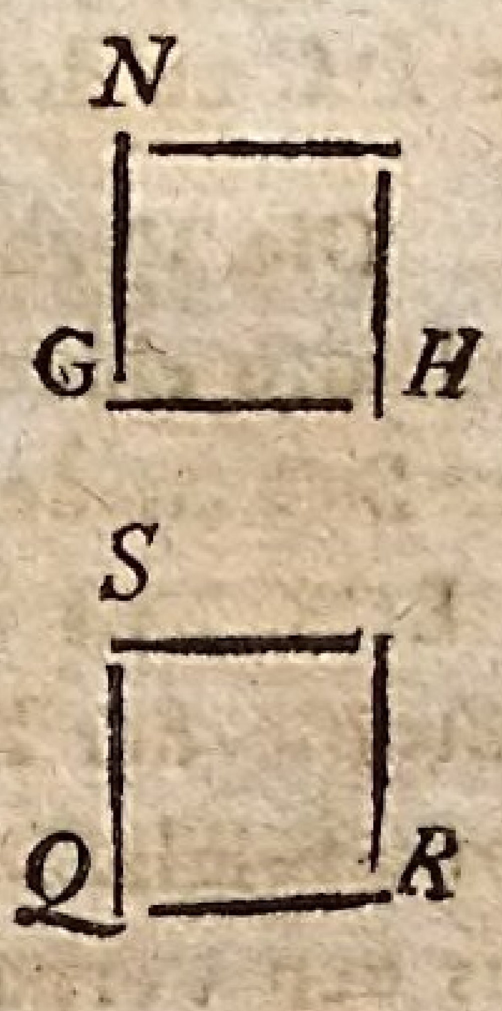
den

den geradlinigten Figuren K*A*B, LCD, über den beyden EF, QR aber die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren MF, SR beschrieben sind, so verhält sich, nach dem ersten Theile des Beweises, die KA*B* zu der LCD wie die MF zu der SR. Es ist aber angenommen, daſs die geradlinigte Figur KAB zu der LCD sich verhalte wie die MF zu der NH. Die geradlinigte Figur MF also hat (5, 11. S.) zu den beyden NH, SR einerley Verhältniſs; folglich ist (5, 9. S.) die geradlinigte Figur NH der SR gleich. Sie ist ihr aber auch ähnlich und ähnlich liegend; folglich ist, nach dem folgenden Lehnsaze, die GH der QR gleich. Da nun die AB zu der CD sich verhält, wie die EF zu der QR, die QR aber der GH gleich ist, so verhält sich (5, 7. S.) die AB zu der CD wie die EF zu der GH.

Wenn demnach vier gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

Lehnsaz. Daſs aber, wenn geradlinigte Figuren gleich und ähnlich sind, ihre homologen Seiten einander gleich seyen, kann auf folgende Art gezeigt werden.

Es seyen die geradlinigten Figuren NH, SR gleich und ähnlich, und es verhalte sich die HG zu der GN wie die RQ zu der QS, so behaupte ich, daſs die RQ der HG gleich sey.



Beweis. Denn wären sie ungleich, so müſste die eine von ihnen gröſser, als die andere seyn. Es sey die RQ gröſser, als die HG. Da nun die RQ zu der QS sich verhält wie die HG zu der GN, so verhält sich (5, 16. S.) auch *verwechselt* die RQ zu der HG wie die QS zu der GN. Es ist aber die QR gröſser, als die GN, mithin ist (6, 20. S.) auch die geradlinigte Figur RS gröſser, als die HN. ie

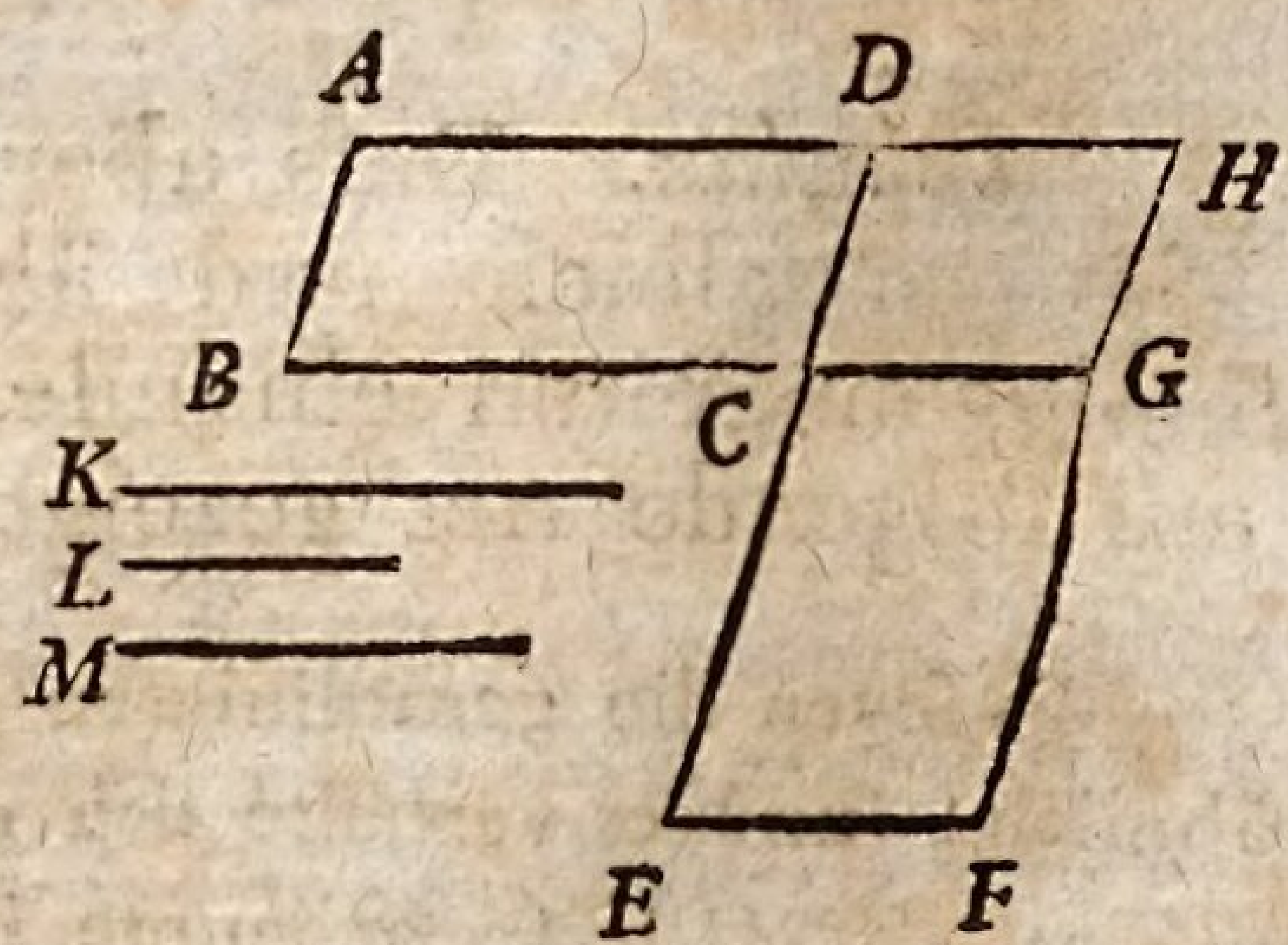
ist

ist ihr aber auch gleich, welches unmöglich ist. Demnach ist die QR der GH nicht ungleich, also gleich, w. z. e. w.

23. *Saz.*

Lehrsaz. Gleichwinklichte Parallelogramme haben zu einander ein Verhältniss, das aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammengesezt ist.

Es seyen die gleichwinklichten Parallelogramme AC, CF, in welchen der Winkel BCD dem Winkel ECG gleich sey, so behaupte ich, dass das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CF ein Verhältniss habe, das aus den Verhältnissen der Seiten zusammengesezt sey, das heisst, aus dem Verhältnisse der BC zu der CG, und aus dem Verhältnisse der DC zu der CE.



Beweis. Man bringe die BC mit der CG in *eine* gerade Linie, so ist (1, 14. S.) auch die DC mit der CE in *einer* geraden Linie. Man ergänze hierauf das Parallelogramm DG, nehme eine gerade Linie K an, und mache (6, 12. S.) die BC zu der CG wie die K zu der L, und die DC zu der CE wie die L zu der M.

Die Verhältnisse der K zu der L und der L zu der M sind also einerley mit den Verhältnissen der Seiten, nämlich der BC zu der CG, und der DC zu der CE. Aber (6, 5. Erkl.) ist das Verhältniss der K zu der M aus dem Verhältnisse der K zu der L und der L zu der M zusammengesezt; folglich hat auch die K zu der M ein Verhältniss, das aus den Verhältnissen der Seiten zusammengesezt ist. Und da (6, 1. S.) die BC zu der CG sich verhält wie das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CH, aber auch

die

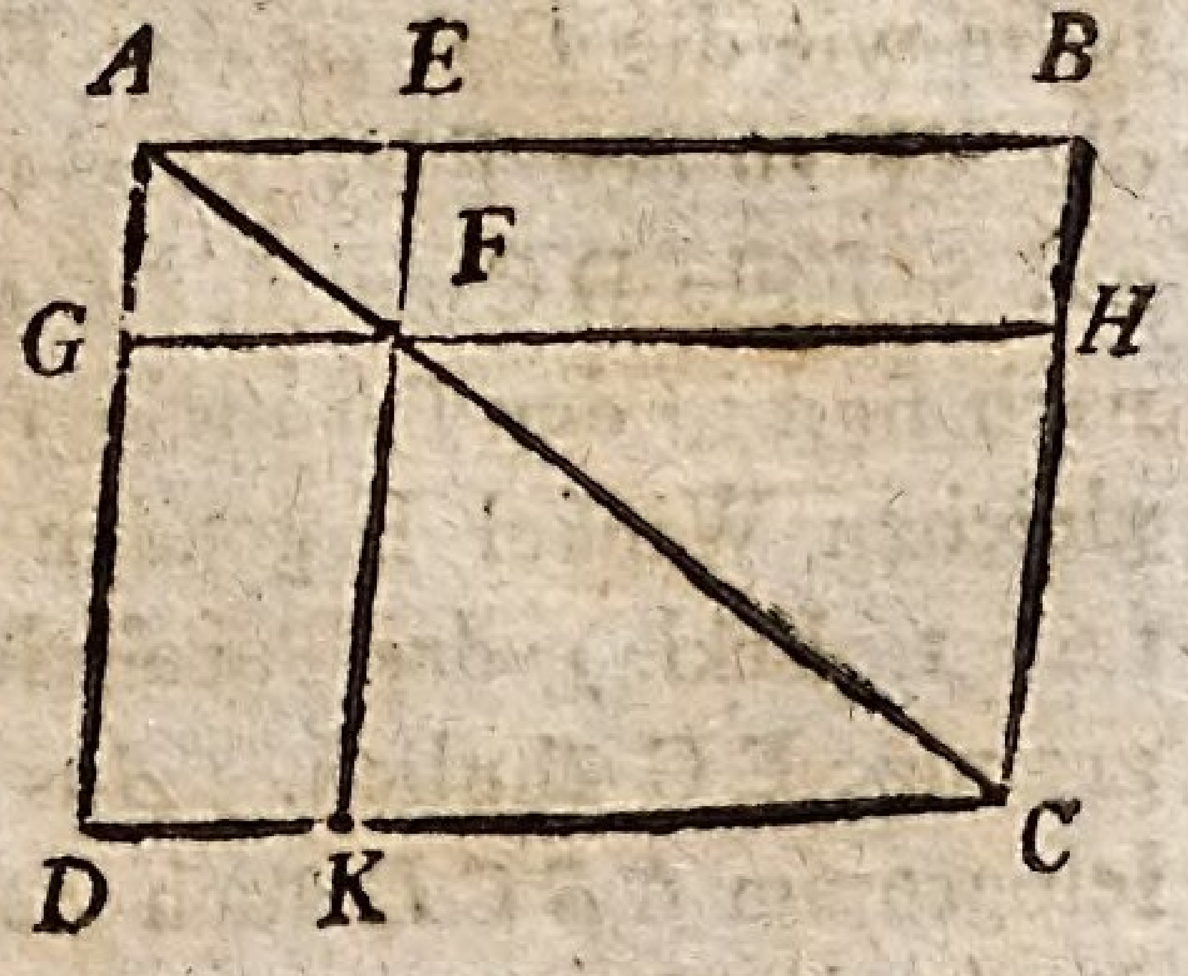
die B C zu der C G wie die K zu der L, so verhält sich (5, 11. S.) auch die K zu der L wie das Parallelogramm *A C* zu dem Parallelogramme *C* H. Da ferner (6, 1. S.) die D C zu der C E sich verhält wie das Parallelogramm C H zu dem Parallelogramme *C* F, aber auch die D C zu der *C* E wie die L zu der M, so verhält sich (5, 11. S.) auch die L zu der M wie das Parallelogramm C H zu dem Parallelogramme C F. Da nun gezeigt worden ist, daſs die K zu der L sich verhalte wie das Parallelogramm A C zu dem Parallelogramme *C* H und die L zu der M wie das Parallelogramm *C* H zu dem Parallelogramme *C* F, so verhält sich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die K zu der M wie das Parallelogramm A C zu zu dem Parallelogramme *C* F. Die K aber hat zu der M ein Verhältniſs, das aus den Verhältnissen der Seiten zusammengesezt ist; folglich hat auch das Parallelogramm A C zu dem Parallelogramme C F ein Verhältniſs, das aus den Verhältnissen der Seiten zusammengesezt ist.

Demnach haben gleichwinklichte Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

24. *Saz.*

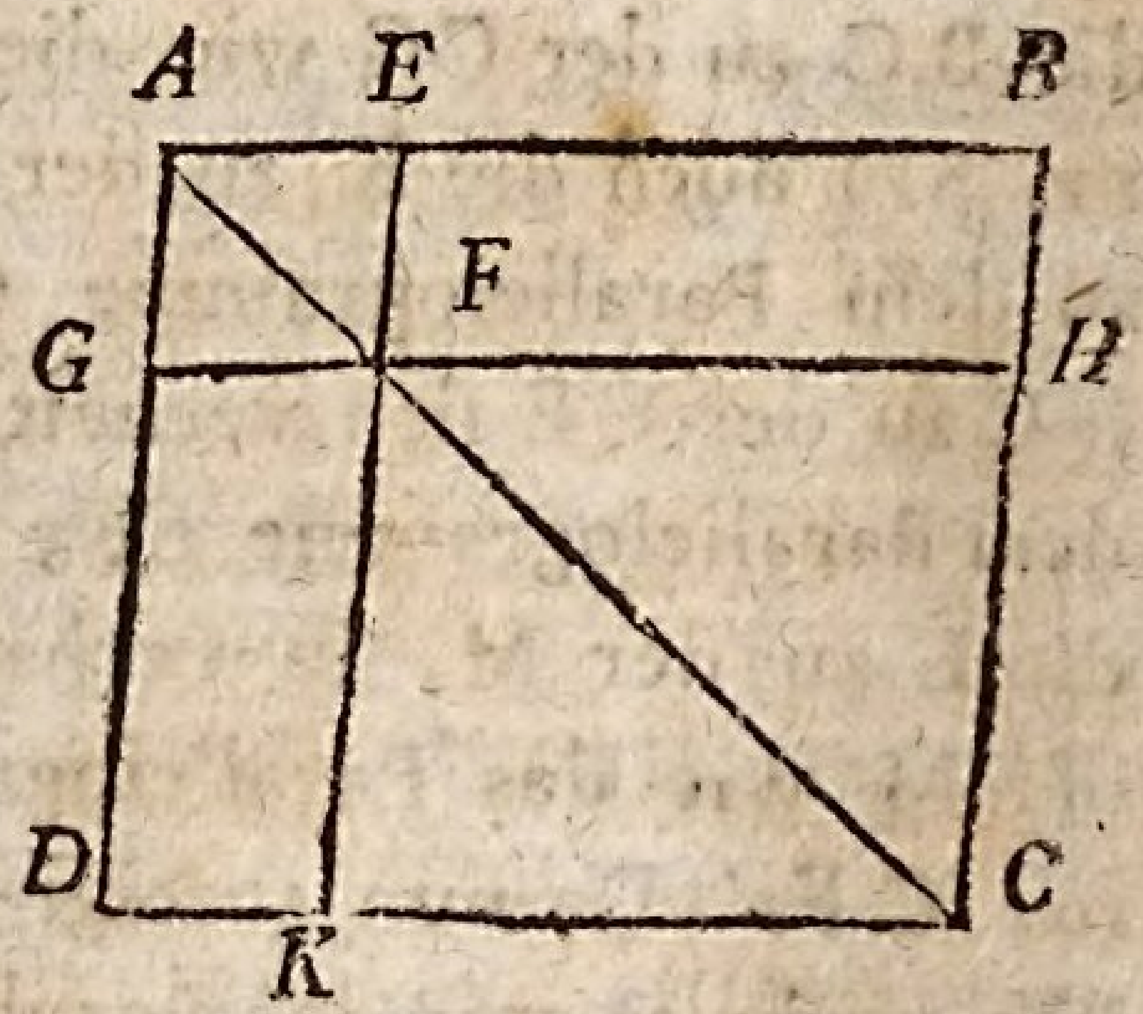
Lehrsaz. In jedem Parallelogramme sind die um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme so wohl dem ganzen als auch einander selbst ähnlich.

Es sey das Parallelogramm AB*CD*, dessen Diagonale *A C*, um die Diagonale *A C* aber liegen die Parallelogramme E G, H K, so behaupte ich, daſs die Parallelogramme E G, H K so wohl dem ganzen A B C D, als auch einander selbst, ähnlich seyen.



Beweis. Da mit der Seite B C des Dreyecks A B C die E F

par-



parallel gezogen ist, so verhält sich (6, 2. S.) die BE zu der EA wie die CF zu der FA. Da ferner mit der Seite CD des Dreyecks ACD die FG parallel gezogen ist, so verhält sich die CF zu der FA wie die DG zu der GA. Es ist aber gezeigt worden, dass die CF zu der FA sich verhalte wie die BE zu der EA; folglich verhält sich (5, 11. S.) auch die BE zu der EA wie die DG zu der GA, und (5, 18. S.) *verbunden* die BA zu der AE wie die DA zu der AG, und (5, 16. S.) *verwechselt*, die BA zu der AD wie die AE zu der AG. Demnach sind in den Parallelogrammen ABCD, EG die um den gemeinschaftlichen Winkel BAD liegenden Seiten proportionirt. Und weil die GF der DC parallel ist, so ist (1, 29. S.) der Winkel AGF dem Winkel ADC, der Winkel GFA aber dem Winkel DCA gleich, und der Winkel DAC ist beyden Dreyecken ADC, AGF gemeinschaftlich; folglich ist das Dreyeck ADC dem Dreyecke AGF gleichwinklicht. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck ABC dem Dreyecke AFE gleichwinklicht; folglich ist das ganze Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EG gleichwinklicht, demnach verhält sich (6, 4. S.) die AD zu der DC wie die AG zu der GF, die DC zu der CA wie die GF zu der FA, die AC zu der CB wie die AF zu der FE, und die CB zu der BA wie die FE zu der EA. Da nun gezeigt worden ist, dass die DC zu der CA sich verhalte wie die GF zu der FA, und die AC zu der CB wie die AF zu der FE, so verhält sich auch *gleichförmig*, (5, 22. S.) die DC zu der CB wie die GF zu der FE; demnach sind in den Parallelogrammen ABCD, EG die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt, und daher (6, 1. Erkl.) das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EG ähnlich. Aus eben den Gründen ist das Parallelogramm ABCD auch dem Parallelogramme KH ähnlich; die beyden Parallelogramme EG, HK also sind dem Parallelo-

lo-

gramme *ABCD* ähnlich. Geradlinigte Figuren aber, die einer und derselben ähnlich sind, sind (6, 21. S.) auch einander selbst ähnlich; folglich ist das Parallelogramm EG dem Parallelogramme HK ähnlich.

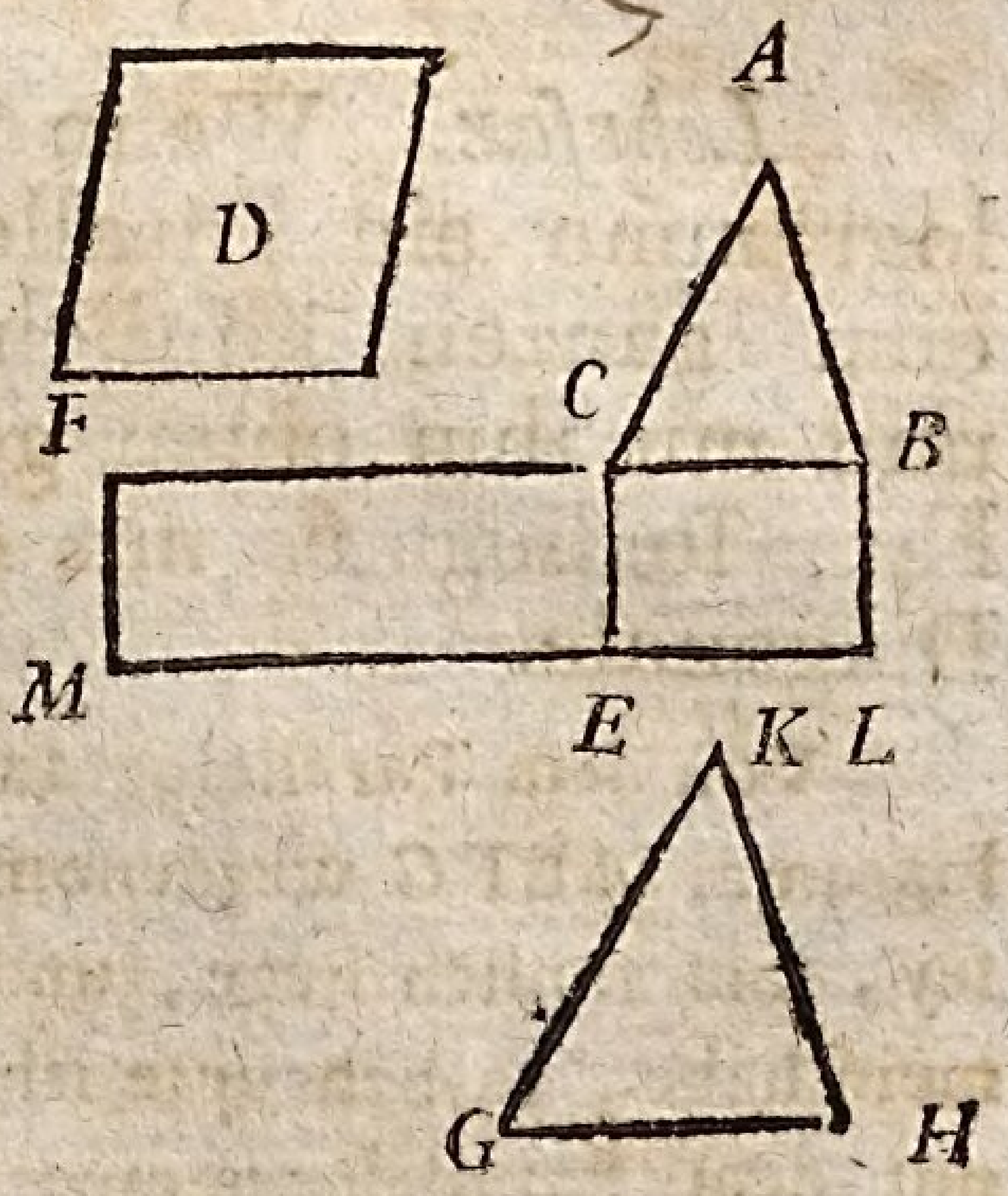
Demnach sind in jedem Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

25. *Saz.*

Aufgabe. Eine geradlinigte Figur zu machen, die einer gegebenen ähnlich, und einer andern gegebenen gleich sey.

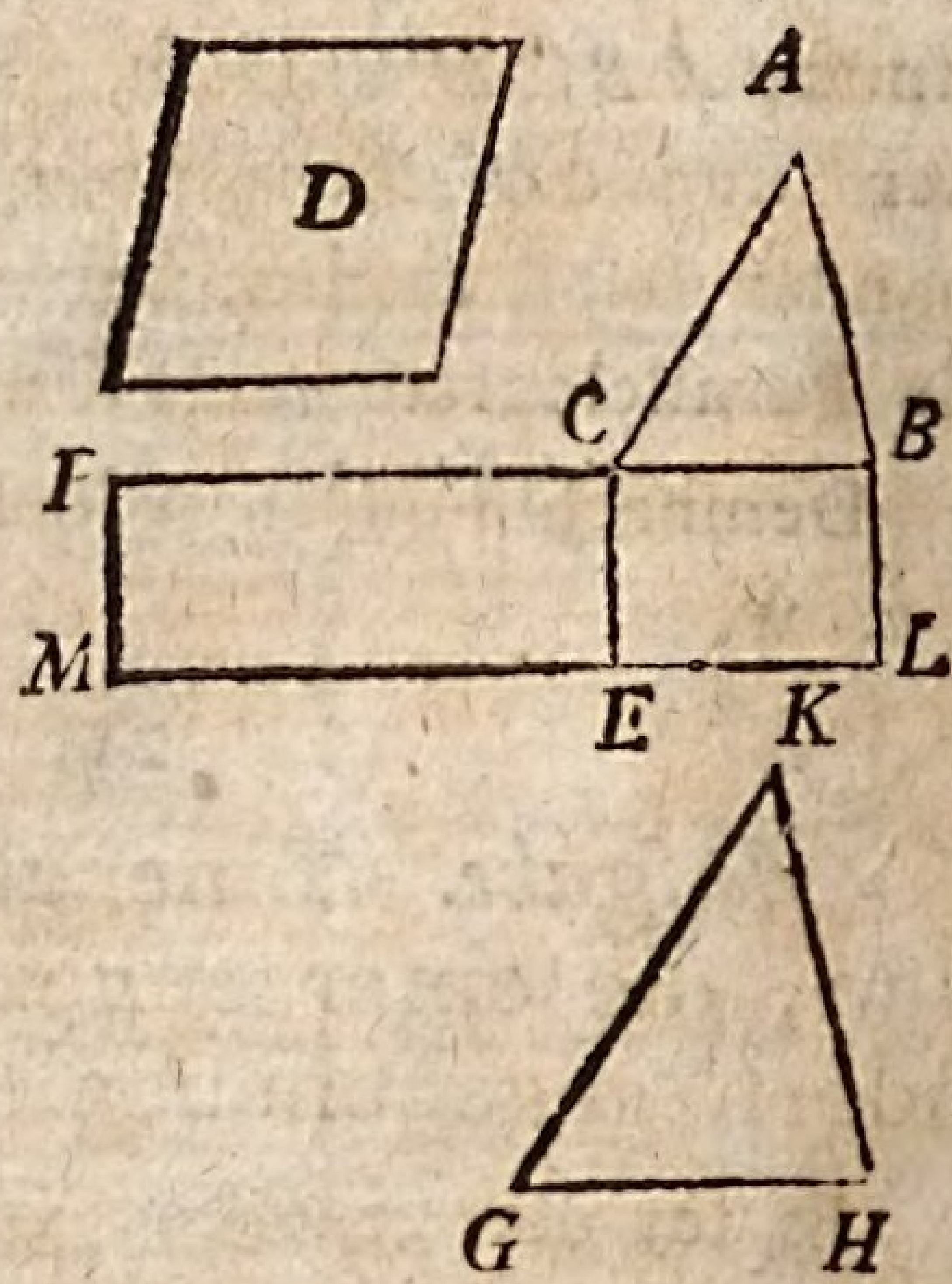
Es sey die gegebene geradlinigte Figur, welcher man eine andere ähnlich machen soll, die *AB*C, und die, welch man eine andere gleich machen soll, die D, und man soll eine geradlinigte Figur der *AB*C ähnlich und der D gleich machen.

Auflösung. Man seze (1, 44. u. 45. S.) auf die Linie BC das Parallelogramm *B*E das dem Dreyecke *A*BC gleich sey, auf die Linie CE aber das Parallelogramm CM, das der Figur D gleich sey, unter dem Winkel FCE, der dem Winkel C*B*L gleich sey, so ist (1, 14. S.) die *B*C mit der CF und die LE mit der EM in *einer* geraden Linie. Nan nehme nun (6, 13. S.) zu den beyden BC, CF die mittlere Proportionallinie GH und beschreibe (6, 18. S.) über der GH die geradlinigte Figur KGH, die der *A*BC ähnlich sey, und ähnlichliege.



Beweis. Da die *B*C zu der GH sich verhält wie die GH zu der CF, aber wenn drey gerade Linien proportionirt sind (6, 20. Zus. 2.) die erste zur dritten sich verhält wie die geradlinigte Figur über der ersten zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figur über der zweyten, so verhält sich die BC zu der CF wie das *Dreyeck* ABC zum

zum



Dreyecke KGH. Aber (6, 1. S.) verhält sich die BC zu der CF wie das Parallelogramm BE zu dem Parallelogramme EF; folglich verhält sich das Dreyeck *ABC* zum Dreyecke KGH wie das Parallelogramm BE zum Parallelogramme EF und mithin (5, 16. S.) *verwechselt*, das Dreyeck *AB*C zum Parallelogramme *B*E wie das Dreyeck KGH zum Parallelogramme EF. Es ist aber das Dreyeck *A*BC dem Parallelogramme BE gleich; folglich ist auch das Dreyeck KGH dem Parallelogramme EF gleich. Das Parallelogramm EF aber ist der geradlinigten Figur D gleich; folglich ist auch das Dreyeck KGH der geradlinigten Figur D gleich. Es ist aber das Dreyeck KGH dem Dreyecke A*B*C ähnlich.

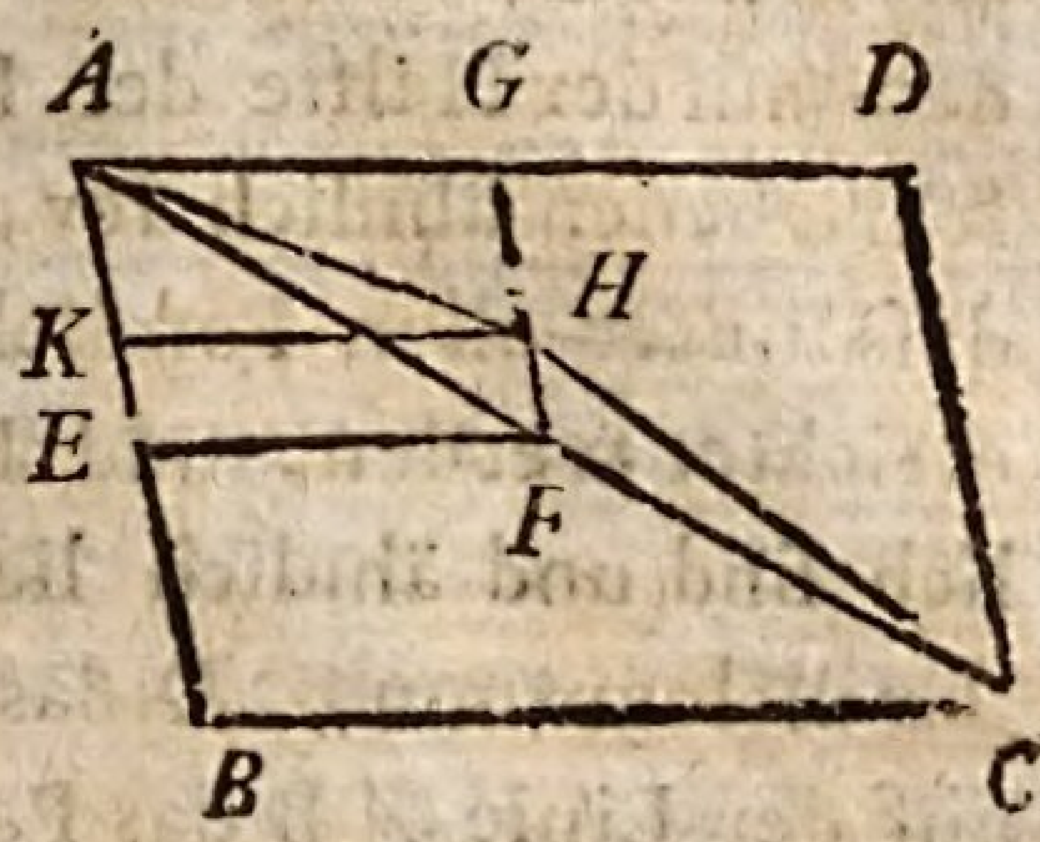
Demnach ist die geradlinigte Figur KGH der gegebenen A*B*C ähnlich und einer andern gegebenen gleich gemacht worden, w. z. v. w.

26. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man von einem Parallelogramme ein Parallelogramm wegnimmt das dem ganzen ähnlich ist, und ährlich liegt, und mit ihm einen gemeinschaftlichen Winkel hat, so liegt es mit dem ganzen um einerley Diagonale.

Von dem Parallelogramme ABC*D* werde das Parallelogramm *A*EFG weggenommen, das dem ABCD ähnlich sey, und ähnlich liege, und mit ihm den Winkel *DA*B gemein habe, so behaupte ich, dass das Parallelogramm *A*BCD mit dem Parallelogramme *A*EFG um einerley Diagonale liege.

Be-



Beweis. Gesezt dies wäre nicht, sondern es wäre, die Möglichkeit angenommen, die Diagonale beyder die *A* H C, so ziehe man durch den Punkt H mit der *A*D oder B C die HK parallel. Da nun das Parallelogramm *A* B C D mit dem Parallelogramme K G um einerley Diagonale liegt, so ist (6, 24. S.) das Parallelogramm A B C *D* dem Parallelogramme K G ähnlich; folglich verhält sich (6, 1. Erkl.) die D *A* zu der A B wie die G A zu der *A* K. *A*ber wegen der *A*ehnlichkeit der Parallelogramme *A B* C D, E G verhält sich die D *A* zu der A B wie die G *A* zu der *A* E; folglich auch (5, 11. S.) die G *A* zu der *A* E wie die G *A* zu der *A* K. *D*ie G *A* hat also zu den beyden *A* K, *A* E einerley Verhältniss; folglich ist (5, 9. S.) die *A* E der *A* K, das heisst, die kleinere der grössern, gleich, welches unmöglich ist; Folglich liegt nicht das Parallelogramm *A* B C D mit dem Parallelogramme K G, sondern das Parallelogramm A B *C* D mit dem *A* G F E um einerley Diagonale.

Wenn demnach von einem Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

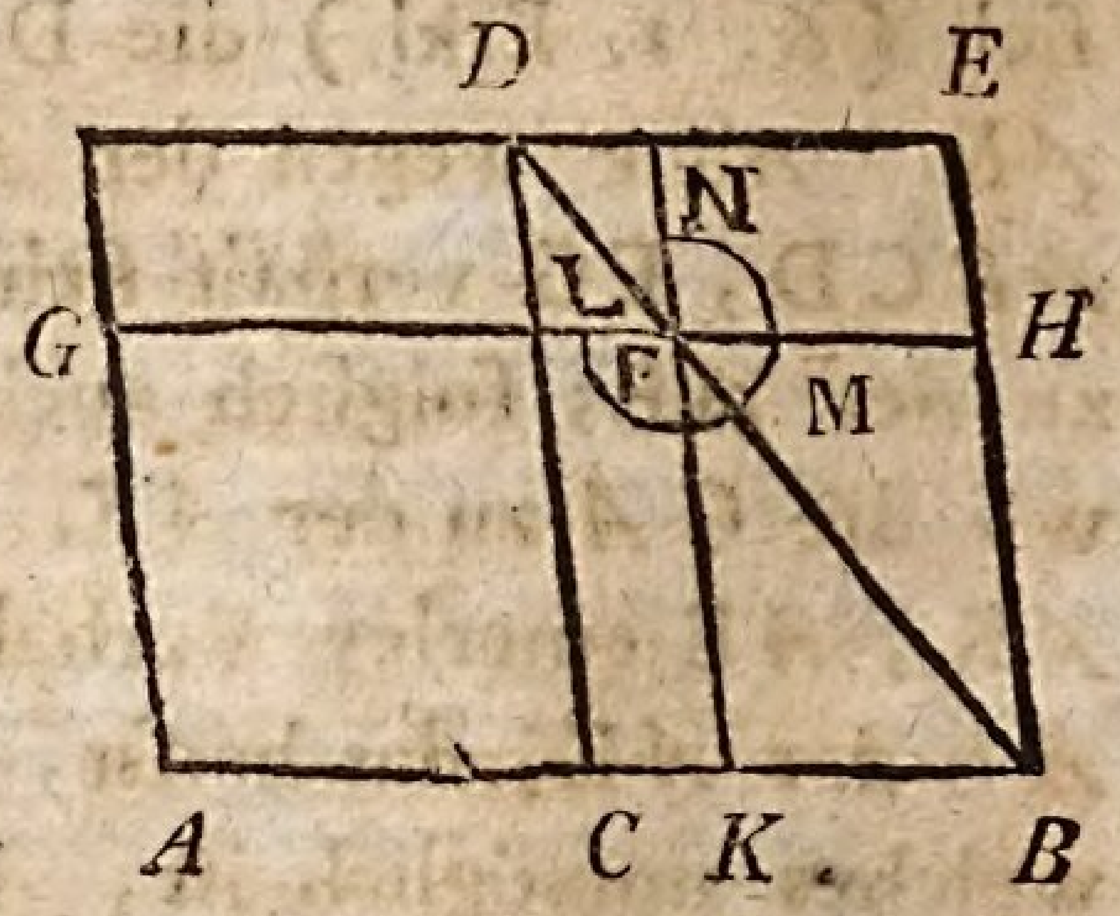
27. *Saz.*

Lehrsaz. Unter allen Parallelogrammen die auf einerley geraden Linie errichtet werden, und Parallelogramme zu Ergänzungen haben, die dem Parallelogramme auf der Hälfte der Linie ähnlich sind, und ähnlich liegen, ist das auf der Hälfte der Linie errichtete, was seiner Ergänzung ähnlich ist, das grösste.

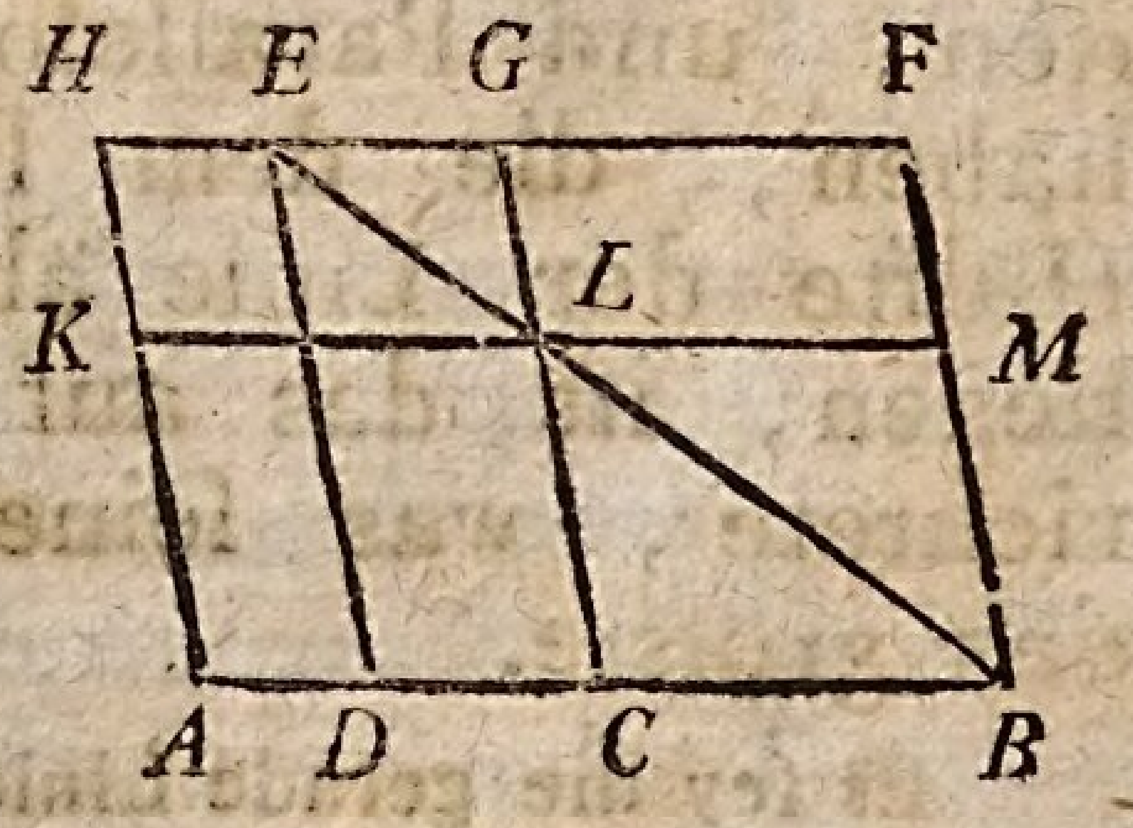
Es sey die gerade Linie *A* B, man halbire sie in dem Punkte *C*, und errichte über der *A B* das Parallelogramm

*A*D,

AD, welches das Parallelogramm CE zur Ergänzung habe, das dem auf der Hälfte der Linie AB, das heifst, auf der BC beschriebenen ähnlich sey, und ähnlich liege, so behaupte ich, dafs unter allen Parallelogrammen, die auf der Linie AB errichtet werden, und Parallelogramme, die dem CE ähnlich sind und ähnlich liegen, zu Ergänzungen haben, das Parallelogramm AD das gröfste sey. Denn man errichte auf der Linie AB das Parallelogramm AF, welches das Parallelogramm KH, das dem CE ähnlich ist, und ähnlich liegt, zur Ergänzung habe, so behaupte ich, dafs das Parallelogramm AD gröffer sey, als das Parallelogramm AF.



Beweis. Da das Parallelogramm CE dem Parallelogramme KH ähnlich ist, so liegen sie (6, 26. S.) um einerley Diagonale, man ziehe ihre Diagonale DB, und vollende die Figur. Da nun (1, 43. S.) das Parallelogramm CF dem Parallelogramme FE gleich ist, so seze man zu beyden das Parallelogramm KH, so ist das ganze CH dem ganzen KE gleich. Aber (1, 36. S.) ist das Parallelogramm CH dem Parallelogramme CG gleich, weil die Linie AC der CB gleich ist; folglich ist auch das Parallelogramm CG dem Parallelogramme EK gleich. Man seze zu beyden das gemeinschaftliche CF, so ist das ganze AF dem Gnomon LMN gleich; folglich ist das Parallelogramm CE, das ist (1, 36. S.) das Parallelogramm AD, gröffer, als das Parallelogramm AF.



Es sey nun wiederum die AB in dem Punkte C halbirt, und auf derselben das Parallelogramm AL, errichtet, welches das CM zur Ergänzung habe, und man errichte ferner auf der Linie AB das Parallelogramm AE, welches das DF zur Er-

gän-

gänzung habe, was dem auf der Hälfte von AB errichteten, nämlich dem CM, ähnlich ist, und ähnlich liegt, so behaupte ich, dass das Parallelogramm AL, das auf der Hälfte errichtet ist, grösser sey, als das Parallelogramm AE.

Denn da das Parallelogramm DF dem CM ähnlich ist, so liegen sie (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Es sey ihre Diagonale EB, und man vollende die Figur. Da nun (1, 36. S.) das Parallelogramm LF dem LH gleich ist, denn die FG ist der GH gleich, so ist das Parallelogramm LF grösser, als das EK. Es ist aber (1, 43 S.) das Parallelogramm LF dem DL gleich; folglich ist auch das Parallelogramm DL grösser, als das EK. Man seze zu beyden das Parallelogramm KD, so ist das ganze AL grösser, als das ganze AE.

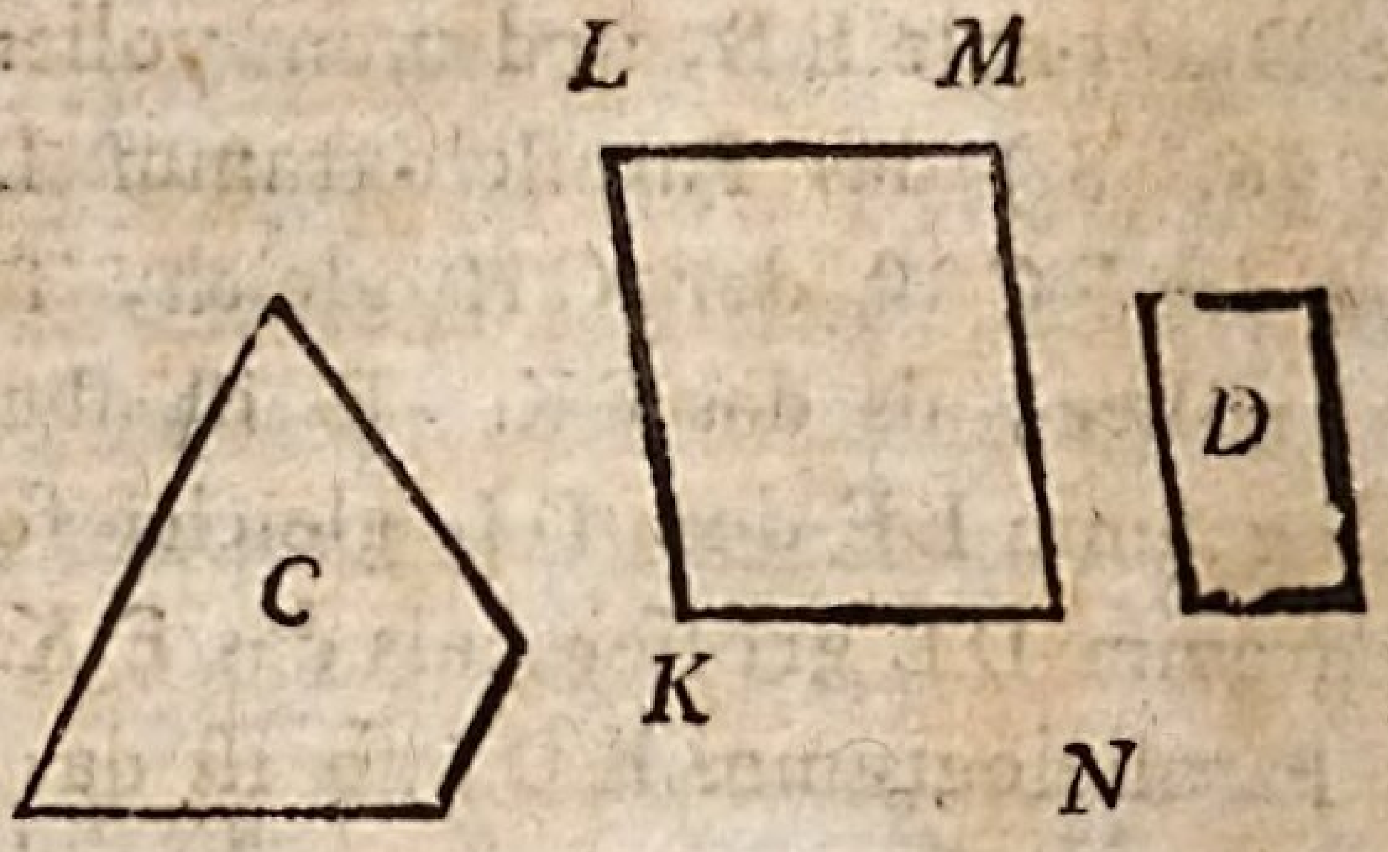
Demnach ist unter allen Parallelogrammen u. s. w. w. z. e. w.

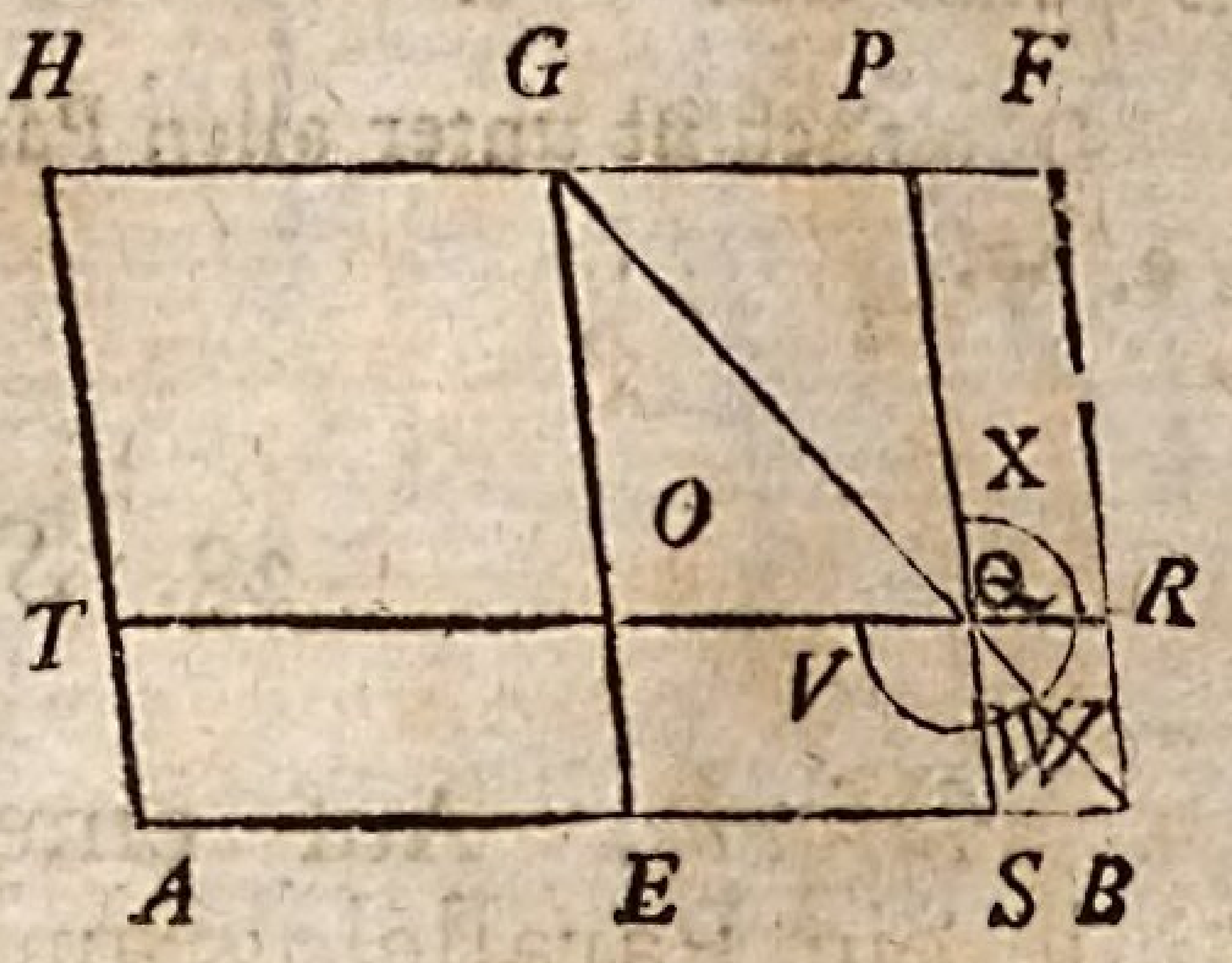
28. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu beschreiben, das einer gegebenen geradlinigten Figur gleich sey, und zur Ergänzung ein Parallelogramm habe, das einer andern gegebenen Figur ähnlich sey, unter der Bedingung, dass die gegebene geradlinigte Figur, welcher die andere gleich gemacht werden soll, nicht grösser sey, als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie, und dass die Ergänzung des Parallelogramms auf der Hälfte der Linie und das Parallelogramm, dem die Ergänzung des ersten ähnlich seyn soll, einander ähnlich seyen.

Es sey die gegebene gerade Linie *AB*, die gegebene geradlinigte Figur, welcher man eine andere auf der Linie AB gleich machen soll, sey C, und diese sey nicht grösser, als

als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie, auch seyen die Ergänzungen einander ähnlich, die Figur aber, welcher die Ergänzung ähnlich seyn soll, sey D, und man soll auf der gegebenen geraden Linie AB ein der gegebenen geradlinigten Figur *C* gleiches Parallelogramm beschreiben, welches ein der Figur D ähnliches Parallelogramm zur Ergänzung habe.





Auflösung u. *Beweis.* Man halbire (1, 10. S.) die AB in dem Punkte E, beschreibe (6, 18. S.) eine der D ähnliche und ähnlich liegende Figur EBFG, und ergänze das Parallelogramm AG, so ist das Parallelogramm AG, vermöge der *Be*dingung, der Figur C entweder gleich, oder grösser, als sie. Wenn nun das Parallelogramm AG der Figur C gleich ist, so ist das verlangte geschehen, denn es ist auf der geraden Linie A*B* ein Parallelogramm AG errichtet worden, das der gegebenen geradlinigten Figur C gleich ist, und ein Parallelogramm EF, das der Figur D ähnlich ist, zur Ergänzung hat. Ist aber das Parallelogramm AG der Figur C nicht gleich, so ist es grösser, als die Figur C. Es ist aber das Parallelogramm AG dem Parallelngramme EF gleich; folglich ist auch das Parallelogramm EF grösser, als die Figur C. Dem Ueberschusse aber um welchen das Parallelogramm EF die Figur *C* übertrift, mache man das Parallelogramm KLMN gleich, und zugleich der Figur D ähnlich und ähnlich liegend (6, 25. S.). Aber die Figur D ist dem Parallelogramme EF ähnlich; folglich ist auch das Parallelogramme KM dem Parallelogramme EF ähnlich. Es sey die gerade Linie LK der GE, und die Linie LM der

GF

GF homolog. Da nun das Parallelogramm EF den Figuren C, KM gleich ist, so ist EF grösser, als KM; folglich ist (6, 20. *Zus.*) die Linie GE grösser, als die KL, und die GF grösser, als die LM. Man mache (1, 3. S.) die GO der LK und die GP der LM gleich, und ergänze (1, 31. S.) das Parallelogramm OGPQ, so ist (6, 24. S.) das Parallelogramm OP dem Parallelogramme KM gleich und ähnlich. Das Parallelogramm KM aber ist dem EF ähnlich; folglich ist auch (6, 21. S.) das Parallelogramm OP dem EF ähnlich, und mithin liegt (6, 26. S.) das Parallelogramm OP mit dem EF um einerley Diagonale. Es sey ihre Diagonale GQB, und man vollende die Figur. Da nun das Parallelogramm EF den Figuren C, KM, das Parallelogramm KM aber dem PO, gleich ist, so ist auch der Rest, der Gnomon VWX dem Reste, der Figur *C*, gleich. Da nun (1, 43. S.) das Parallelogramm PR dem OS gleich ist, so seze man zu beyden das gemeinschaftliche RS hinzu, und es ist das ganze PB dem ganzen OB gleich. Das Parallelogramm OB aber ist (1, 36. S) dem Parallelogramme TE gleich, weil auch die Seite AE der Seite EB gleich ist; folglich ist auch das Parallelogramm TE dem Parallelogramme PB gleich. Man seze zu beyden das gemeinschaftliche OS, so ist das ganze TS dem ganzen Gnomon VWX gleich. Von dem Gnomon VWX aber ist gezeigt worden, dass er der Figur C gleich sey; folglich ist auch das Parallelogramm TS der Figur C gleich.

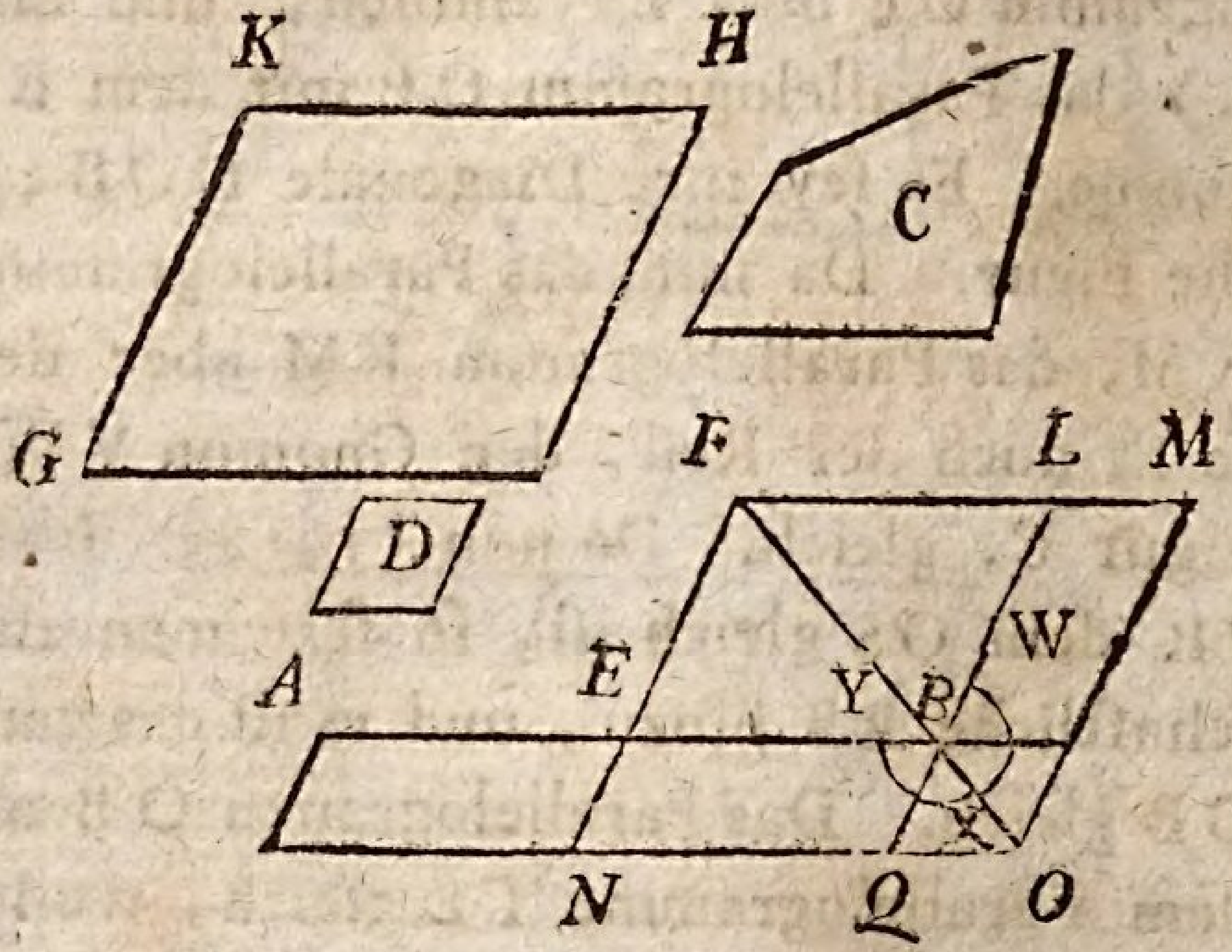
Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie AB ein der gegebenen geradlinigten Figur C gleiches Parallelogramm TS errichtet worden, welches das der Figur D ähnliche Parallelogramm RS zur Ergänzung hat, w. z. v. w.

29. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu beschreiben, das einer gegebenen geradlinigten Figur gleich sey, und ein Parallelogramm zum Ueberschusse

se habe, das einer andern gegebenen geradlinigten Figur ähnlich sey.

Es sey die gegebene gerade Linie A B, die gegebene geradlinigte Figur, welcher eine andere auf der Linie *A* B gleich werden soll, sey C, diejenige aber, welcher der Ueberschuss ähnlich seyn soll, sey D, und man soll auf der Linie A B ein der geradlinigten Figur *C* gleiches Parallelogramm errichten, das ein der Figur *D* ähnliches Parallelogramm zum Ueberschusse habe.



Auflösung. Man halbire (1, 9. S.) die Linie A B in dem Punkte E, und beschreibe (6, 18. S.) auf der Linie E B ein der Figur D ähnliches und ähnlichliegendes Parallelogramm E L, und (6, 25. S.) das Parallelogramm G H, das den beyden E L, C gleich, und der Figur *D* ähnlich sey und ähnlich liege, so ist das Parallelogramm G H dem E L ähnlich. Nun sey K H die der Seite F L, K G aber die der Seite F E homologe Seite. *Da* nun das Parallelogramm G H grösser ist, als das Parallelogramm D L, so ist auch die gerade Linie K H grösser, als die F L, und die K G grösser, als die F E. Man verlängere die F L, F E, mache (1, 3. S.) der K H die F L M, der K G die F E N gleich, und vollende das Parallelogramm MN, so ist M N dem G H gleich und ähnlich. Aber das Parallelogramm G A ist dem E L ähnlich, folglich ist auch das Parallelogramm M N (6, 21. S.) dem E L ähnlich, und mithin liegen sie (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Man ziehe ihre *Diagonale* F O, und vollende die Figur.

Beweis. Da das Parallelogramm G H den Figuren E L, C, aber auch dem Parallelogramme M N gleich ist, so ist auch

MN

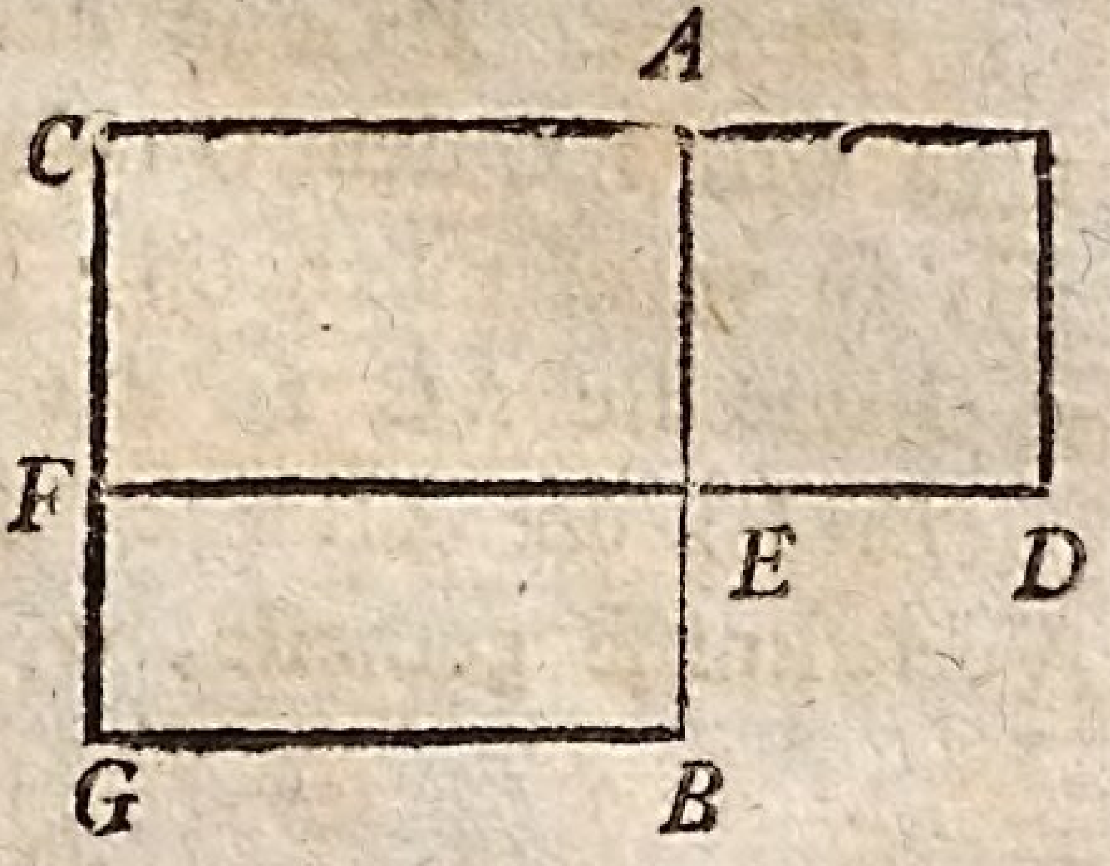
MN den Figuren FL, C gleich. Man nehme das gemeinschaftliche EL weg, so ist der Rest, der Gnomon WXY, der Figur C gleich. Und da die Linie EA der EB gleich ist, so ist (1, 36. S.) auch das Parallelogramm AN dem Parallelogramme NB, das heisst (1, 43. S.) dem LP, gleich. Man seze das gemeinschaftliche EO hinzu, so ist das ganze AO dem Gnomon WXY gleich. Aber der Gnomon WXY ist der Figur C gleich; folglich ist auch das Parallelogramm AO der Figur C gleich.

Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie A*B* ein der gegebenen geradlinigten Figur C gleiches Parallelogramm AO errichtet worden, welches zum Ueberschusse das der Figur *D* ähnliche Parallelogramm PQ hat, w. z. v. w.

30. *Saz.*

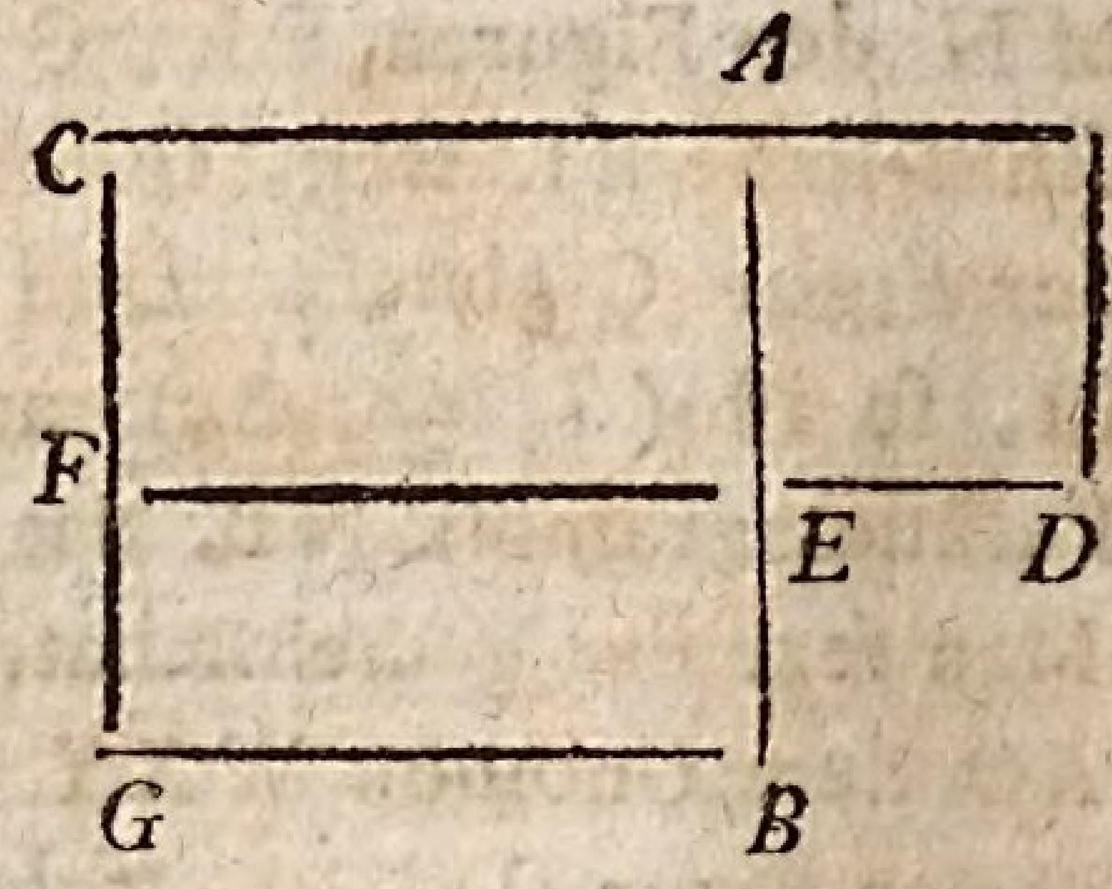
Aufgabe. Eine gegebene begränzte gerade Linie nach äusserem und mittlerem Verhältnisse zu theilen.

Es sey die gegebene begränzte gerade Linie A*B*, und man soll diese nach äusserem und mittlerem Verhältnisse theilen.



Auflösung. Man mache (1, 46. S.) von der AB das Quadrat BC, und beschreibe (6, 26. S.) auf der AC das dem Quadrate BC gleiche Parallelogramm CD, das die der BC ähnliche Figur *A*D zum Ueberschusse habe.

Beweis. Da BC ein Quadrat ist, so ist auch A*D* ein Quadrat. Da BC dem Parallelogramme CD gleich ist, so nehme man das gemeinschaftliche CE weg, und es ist auch der Rest BF dem Reste AD gleich. Er ist ihm aber auch gleichwinklicht, folglich sind (6, 14. S.) die um die gleichen Winkel liegenden Seiten der Figuren AF, AD, umgekert



kehrt proportionirt, und es verhält sich mithin die FE zu der ED wie die AE zu der EB. Es ist aber auch (1, 34. S.) die FE der AC, das ist, der AB, und die ED der AE gleich; folglich verhält sich die AB zu der AE wie die AE zu der EB. Aber die AB ist grösser, als die AE; Folglich ist auch die AE grösser als die EB.

Demnach ist die gerade Linie AB in dem Punkte E nach äusserem und mittlerem Verhältnisse getheilt, und ihr grösserer Abschnitt ist AE, w. z. v. w.

Anderes Verfahren.

Es sey die gerade Linie AB gegeben, und man soll sie nach äusserem und mittlerem Verhältnisse theilen.



Auflösung. Man schneide (2, 11. S.) die AB in dem Punkte C so, dass das Rechteck aus den Linien AB, BC dem Quadrate der Linie AC gleich sey.

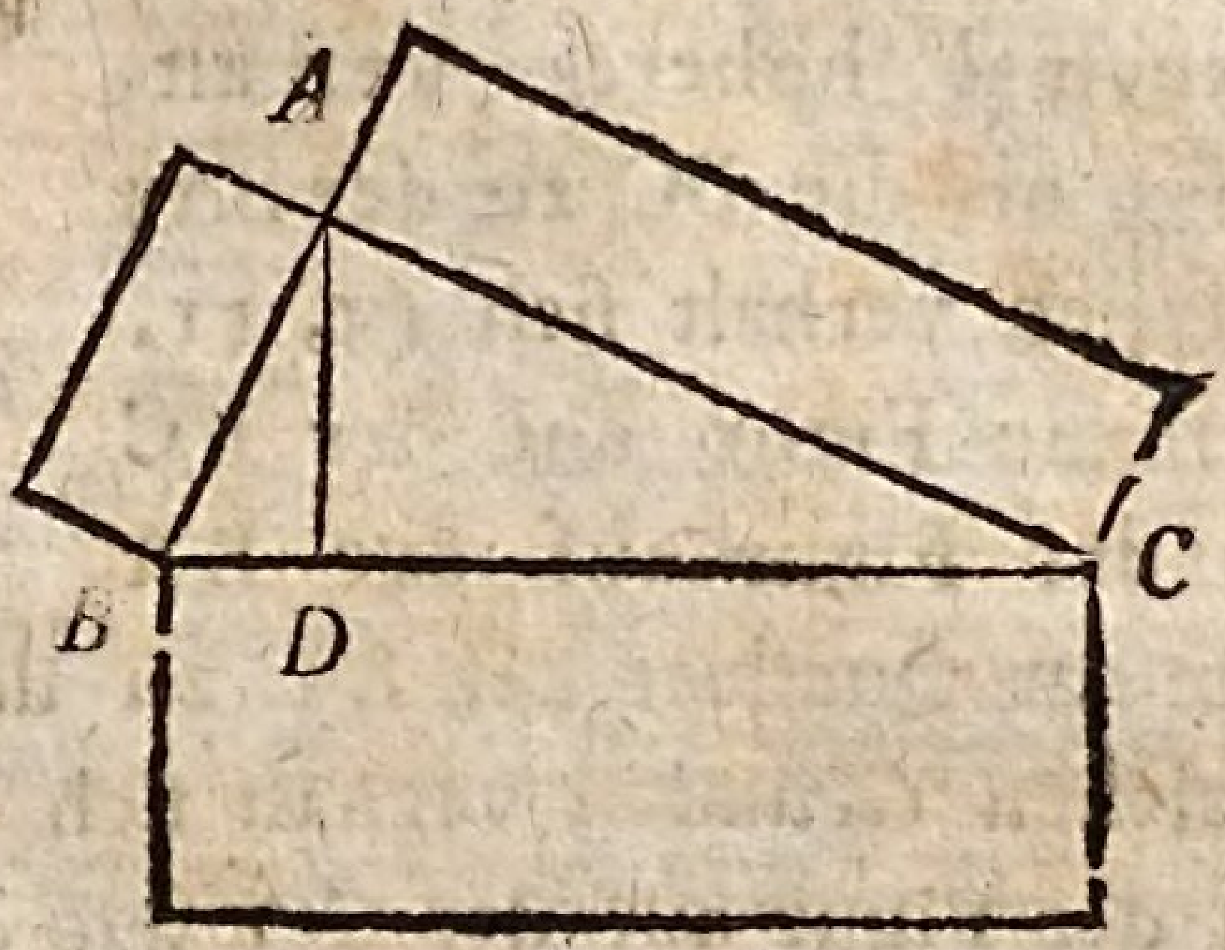
Beweis. Da nun das Rechteck aus den Linien AB, BC dem Quadrate der Linie AC gleich ist, so verhält sich (6, 17. S.) die AB zu der AC wie die AC zu der CB; folglich ist (6, 3. Erkl.) die AB nach äusserem und mittlerem Verhältnisse getheilt, w. z. v. w.

31. *Saz.*

Lehrsaz. In rechtwinklichten Dreyecken ist die Figur auf der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ihr ähnlichen, und ähnlich liegenden Figuren auf den einschliessenden Seiten gleich.

Es

Es sey das rechtwinklichte Dreyeck A B C, dessen rechter Winkel B A C, so behaupte ich, dass die Figur auf der B C den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den Seiten B A, A C gleich sey.



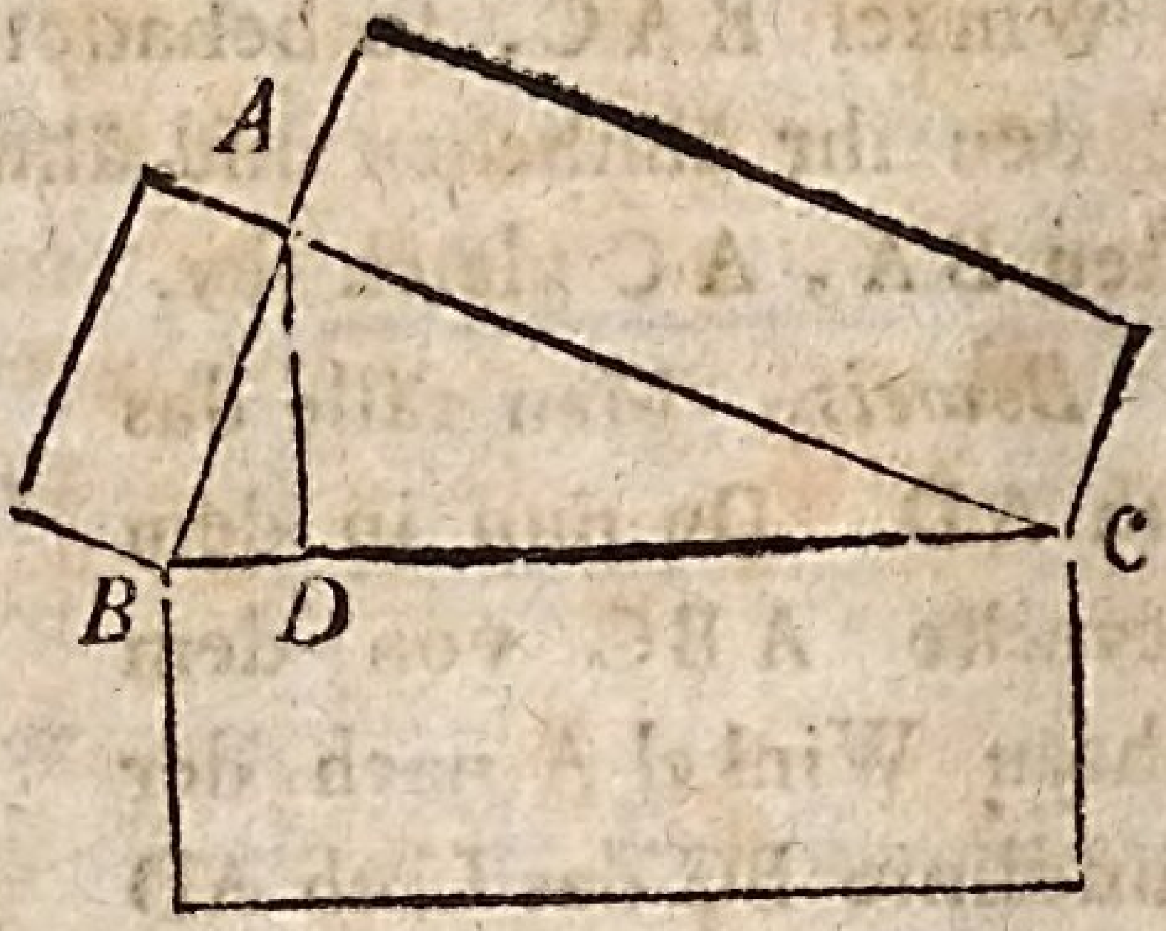
Beweis. Man fälle das Loth A D. Da nun in dem Dreyecke A B C von dem rechten Winkel A nach der Grundlinie BC das Loth AD gefällt worden ist, so sind (6, 8. S.) die an dem Lothe liegenden Dreyecke A B D, A D C sowohl dem ganzen A B C, als auch einander selcst ähnlich. Und da das Dreyeck A *B* C dem Dreyecke A B D ähnlich ist, so verhält sich die C B zu der *B* A wie die A B zu der B D. Da nun hier drey gerade Linien proportionirt sind, so verhält sich (6, 20. *Zus.* 2.) die erste zur dritten wie die Figur auf der ersten zu der ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figur auf der zweyten. Demnach verhält sich die C B zu der B D wie die Figur auf der C B zu der ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figur auf der *B* A. Aus eben den Gründen verhält sich auch die C B zu der C D wie die Figur auf der B C zu der Figur auf der C A; folglich verhält sich auch die B C zu den B D, D C wie die Figur auf der B C zu den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den B A, A C. Es ist aber die B C den beyden B D, D C gleich, folglich ist die Figur auf der B C den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den beyden B A, A C gleich.

Demnach ist in rechtwinklichten Dreyecken die Figur u. s. w. w. z. e. w.

Anderer Beweis.

Da (6, 23. S.) ähnliche Figuren in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten stehen, so hat die Figur auf der B C zu der Figur auf der B A ein zweymal hö-

 he



heres Verhältniſs, als die B C zu der B A. Aber (6, 20. *Zuſ.* 1.) hat auch das Quadrat von der B C zu dem Quadrate von der B A ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der BA; folglich verhält ſich (5, 11. S.) die Figur auf der B C zu der Figur auf der B A wie das Quadrat der B C zu dem Quadrate der B A. Aus gleichen Gründen verhält ſich auch die Figur auf der B C zu der Figur auf der C A wie das Quadrat von der B C zu dem Quadrate von der C A, und mithin die Figur auf der BC zu den Figuren auf den B A, A C wie das Quadrat von der B C zu den Quadraten von den B A, A C. Aber (1, 47. S.) iſt das Quadrat von der B C den Quadraten von den B A, A C gleich; folglich iſt auch die Figur auf der B C den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den beyden B A, A C gleich w. z. e. w.

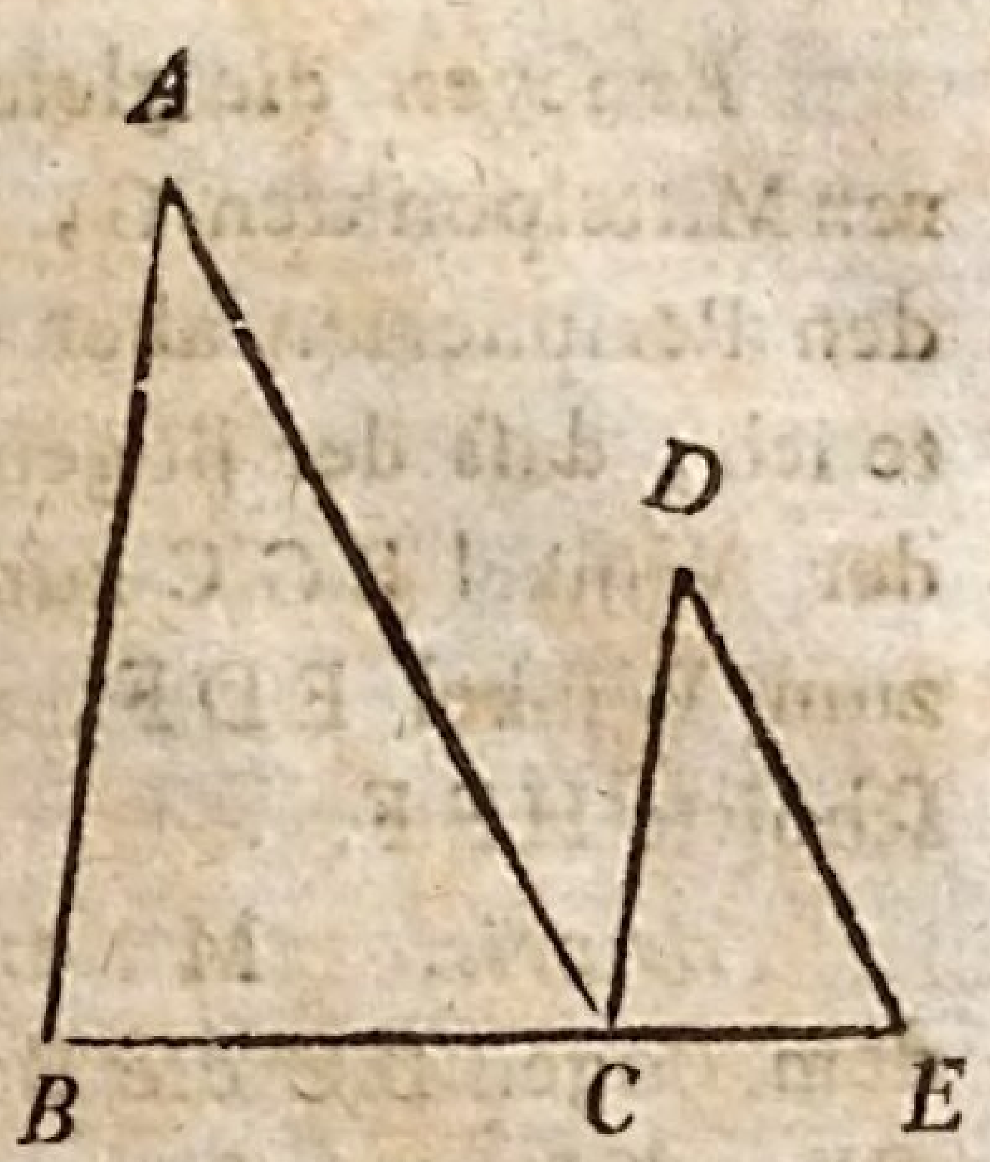
32. *Saz.*

Lehrſaz Wenn man zwey Dreyecke, in welchen zwey und zwey Seiten einander proportionirt ſind, mit einem Winkel ſo an einander bringt, daſs ihre homologen Seiten parallel ſind, ſo liegen die übrigen Seiten der Dreyecke in *einer* geraden Linie.

Es ſeyen zwey Dreyecke A*B*C, D C E, in welchen die zwey Seiten *B* A, A C den zwey Seiten C D, D E proportionirt ſeyen, ſo daſs die B A zu der A C ſich verhalte wie die C *D* zu der D E, es ſey aber die A B der *D* C, und die A C der D E parallel, ſo behaupte ich, daſs die B C mit der C E in *einer* geraden Linie liege.

Be-

Beweis. Da die AB der DC parallel ist, und beyde von der Linie AC geschnitten werden, so sind (1, 29. S.) die Wechselwinkel BAC, ACD einander gleich. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel CDE dem AC*D* gleich; folglich ist auch der Winkel BAC dem CDE gleich. Da nun ABC, DCE zwey Dreyecke sind, in welchen der



Winkel bey A dem Winkel bey D gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, die BA nämlich zu der AC wie die CD zu der DE, so ist (6, 6. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke DCE gleichwinklicht; folglich der Winkel AB*C* dem Winkel DCE gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass auch der Winkel AC*D* dem Winkel BAC gleich sey; folglich ist der ganze Winkel *A*CE den beyden A*B*C, *B*AC gleich. Man seze den gemeinschaftlichen ACB hinzu, so sind die Winkel ACE, AC*B* den Winkeln *BA*C, ACB gleich. Aber (1, 32. S.) sind die Winkel BA*C*, *A*CB, *AB*C, zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel ACE, ACB zwey rechten gleich. Es machen also an dem Punkte *C* der Linie AC zwey gerade Linien BC, CE, die nicht nach einerley Seite zu liegen, die Nebenwinkel ACE, *ACB* zwey rechten gleich; folglich liegt (1, 14. S.) die BC mit der CE in *einer* geraden Linie.

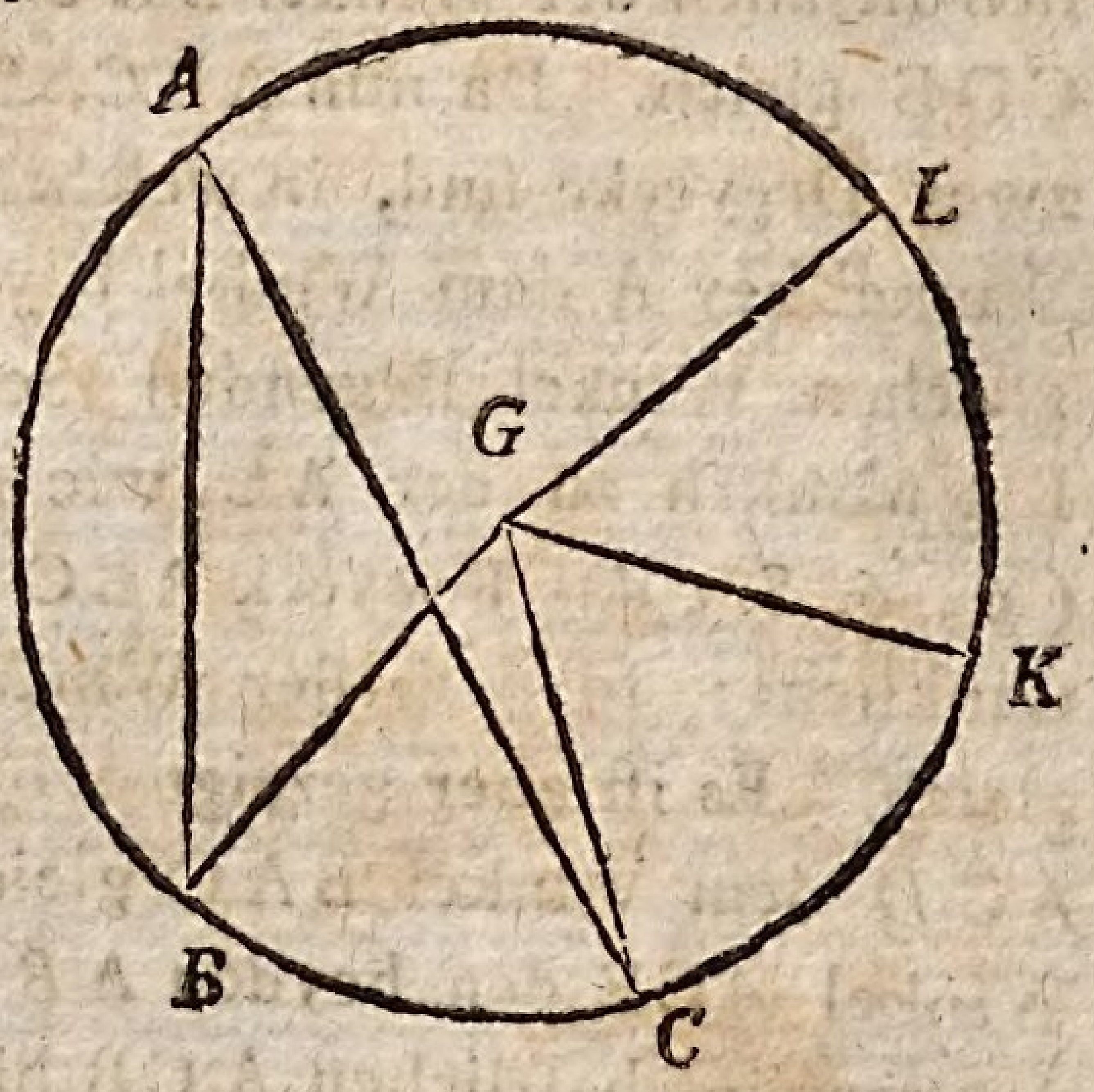
Wenn demnach zwey *D*reyecke in welchen zwey und zwey Seiten u. s. w. w. z. e. w.

32. *Saz.*

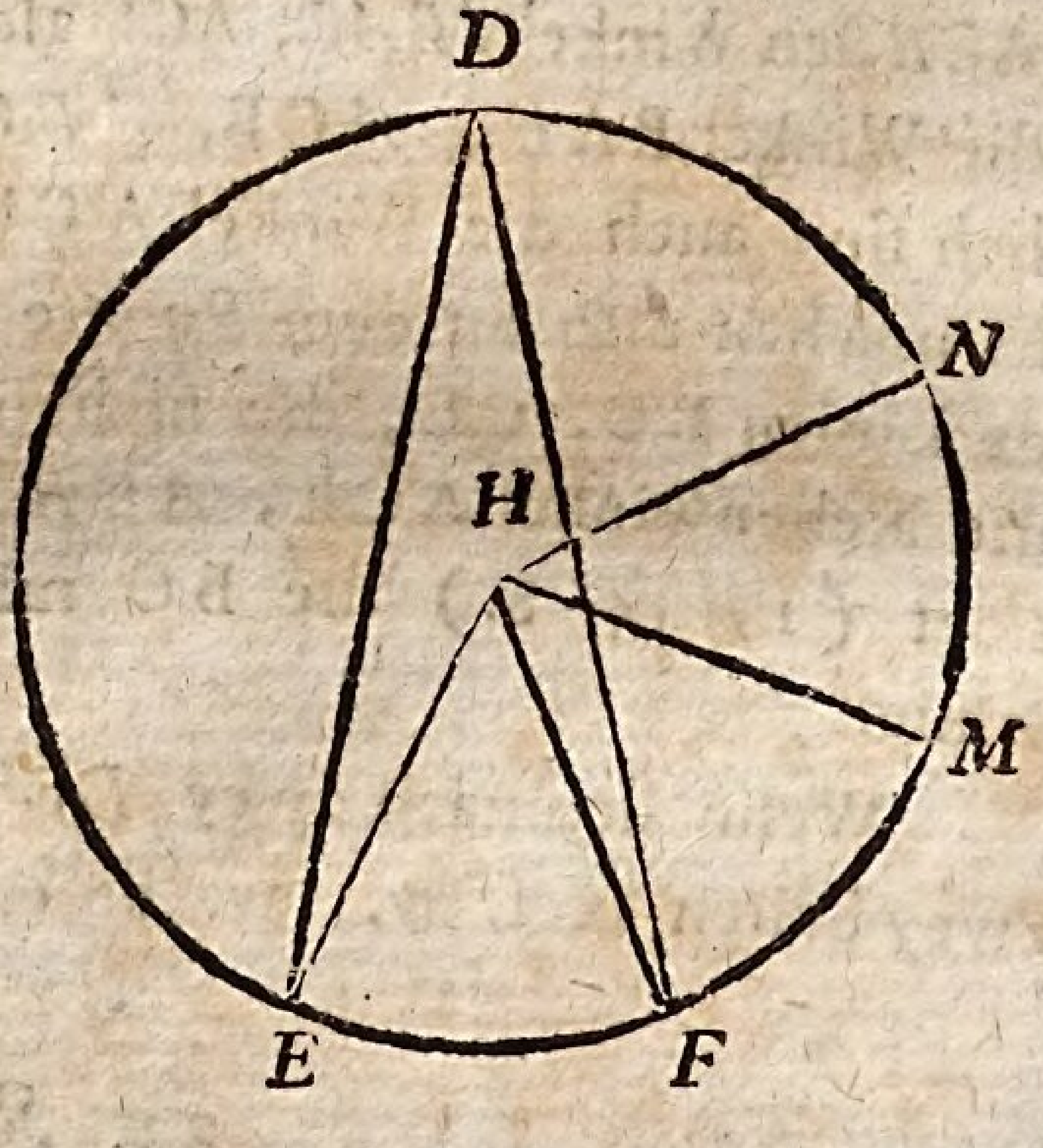
Lehrsaz. In gleichen Kreisen haben sowohl die Centriwinkel als die Peripheriewinkel einerley Verhältniss mit den Bogen, auf welchen sie stehen; auch die Ausschnitte verhalten sich wie ihre Bogen.

Es seyen die gleichen Kreise *ABC*, DEF, und an deren Mittelpunkten G, H seyen die Winkel BGC, EHF, an den Peripherien aber die Winkel BAC, EDF, so behaupte ich, dass der Bogen BC zum Bogen EF sich verhalte wie der Winkel BGC zum Winkel EHF, der Winkel *B*AC zum Winkel EDF, und der Ausschnitt *G*BC zum Ausschnitte HEF.

Beweis. Man mache dem *B*ogen BC die Bogen CK, KL und so weiter, so viel man will, dem Bogen EF aber die Bogeu FM, MN, und so weiter, so viel man will, gleich, und ziehe die GK, GL, HM, HN.



Da nun die *B*ogen *B*C, CK, KL einander gleich sind, so sind auch die Winkel BGC, *C*GK, KGL (3, 27. S.) einander gleich; wievielfach also der Bogen BL von dem Bogen BC ist, ebensovielfach ist der Winkel BGL von dem Winkel BGC. Aus eben dem Grunde ist auch der Bogen EN von dem Bogen EF ebensovielfach, als der Winkel EHN von dem Winkel EHF. *A*uch ist (3, 27. S.) der Winkel BGL ebensogross, oder grösser, oder kleiner, als der Winkel EHN, jenachdem der Bogen BL ebensogross, oder grösser, oder kleiner ist, als der Bogen EN. Da also hier vier Grössen sind, nämlich die zwey Bogen BC, EF, und die zwey Winkel BGC, EHF, und man von dem Bogen BC und dem Winkel BGC als Gleichvielfache den *B*ogen

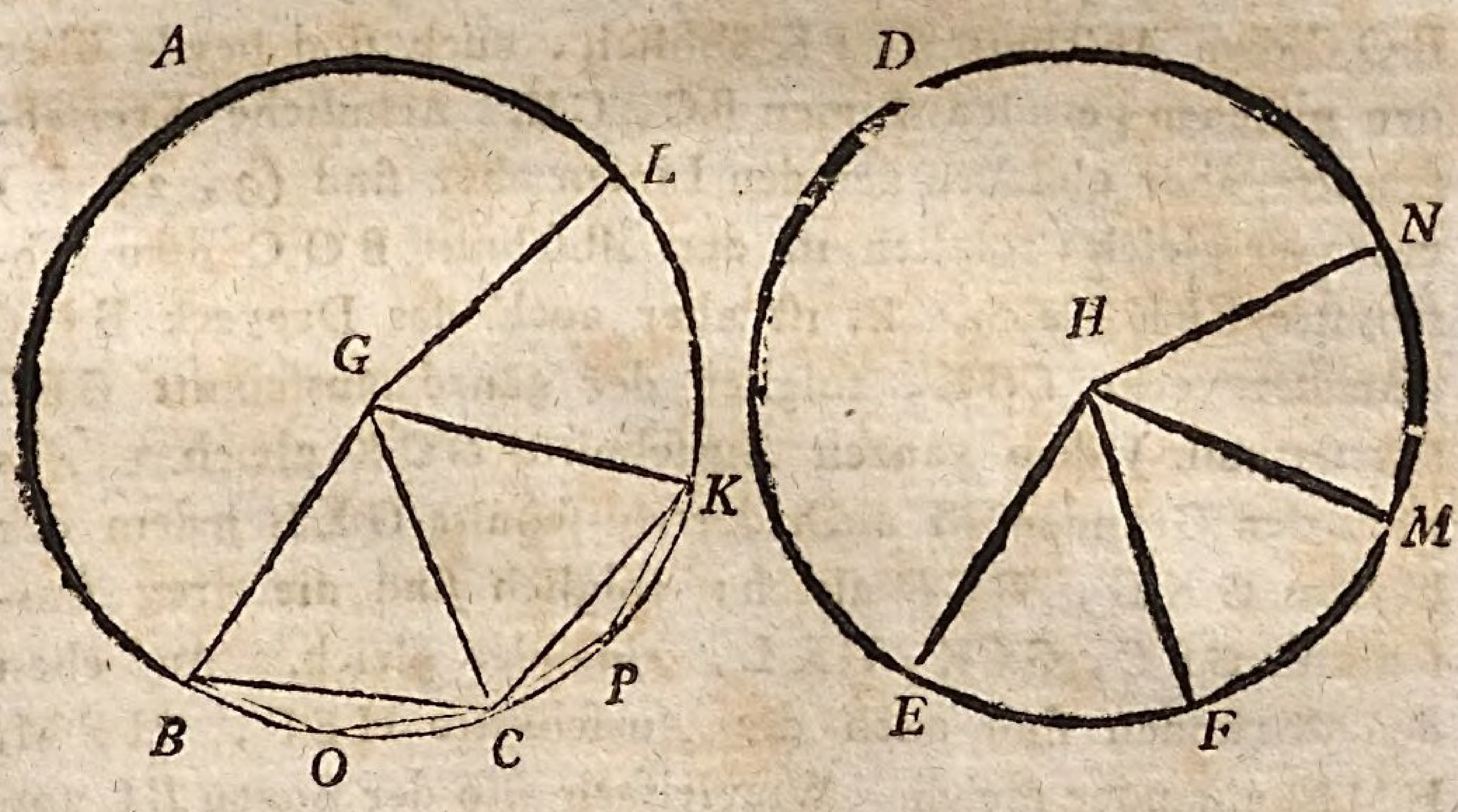


BL

BL und den Winkel *B*GL, von dem Bogen EF, und dem Winkel EHF aber als Gleichvielfache den Bogen EN und den Winkel EHN genommen hat, und gezeigt worden ist, daſs, je nachdem der Bogen BL gröſser, ebensogroſs, oder kleiner ist, als der Bogen EN, auch der Winkel BGL gröſser, ebensogroſs, oder kleiner sey, als der Winkel EHN, so verhält sich (5, 5. Erkl.) der Bogen BC zum Bogen EF wie der Winkel *B*GC zum Winkel EHF. Aber (5, 15. S.) verhält sich der Winkel BGC zum Winkel EHF wie der Winkel BAC zum Winkel E*D*F, denn jeder von beyden ist (3, 30. S.) das Doppelte des andern; folglich verhält sich auch der Bogen BC zum *B*ogen EF wie der Winkel BGC zum Winkel EHF, und der Winkel BAC zu dem Winkel EDF.

In gleichen Kreisen haben also sowohl die Centriwinkel als die Peripheriewinkel einerley Verhältniſs mit den Bogen, auf welchen sie stehen, w. z. e. w.

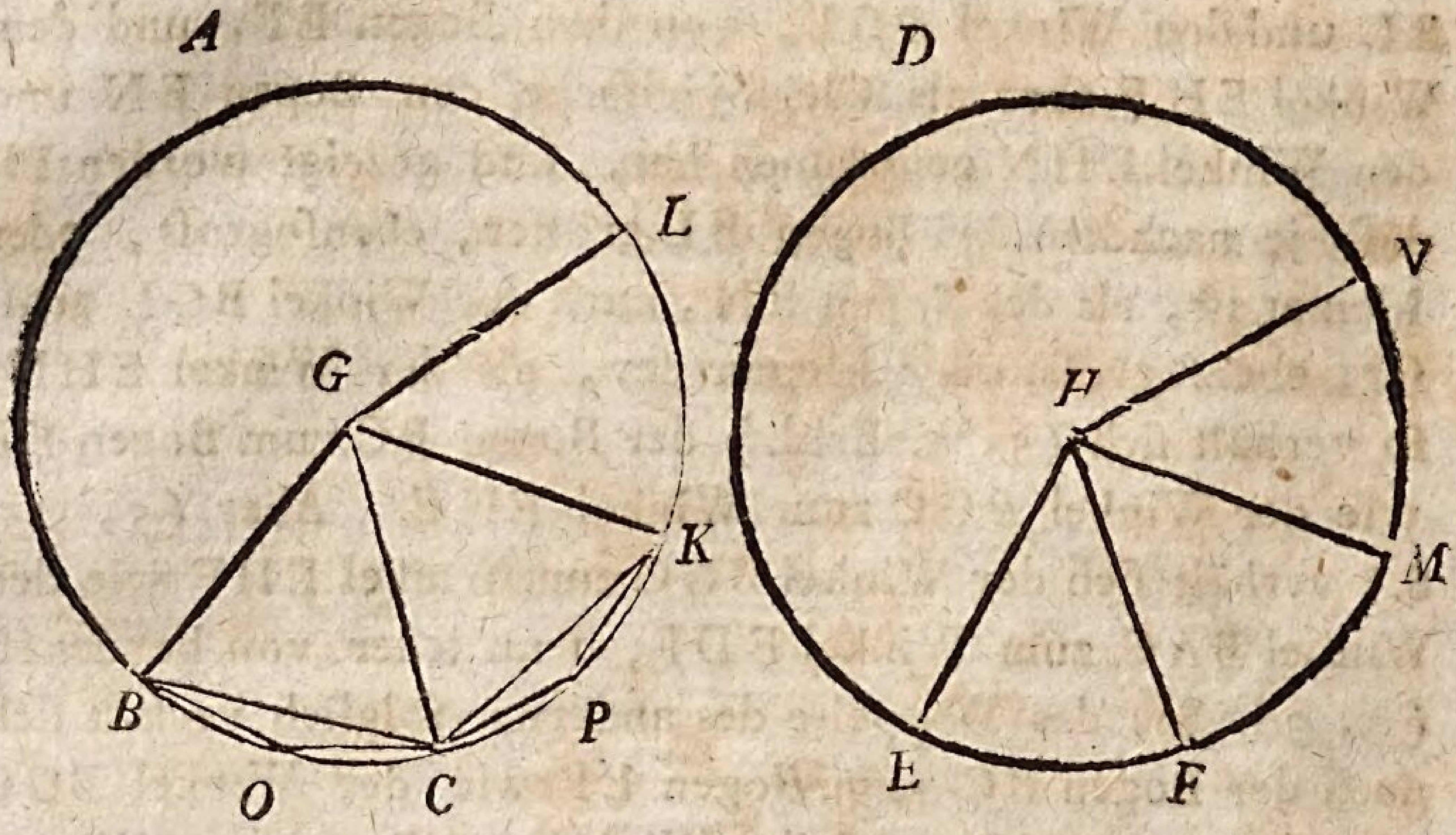
Ich behaupte aber ferner, daſs auch der Bogen B*C* zum Bogen EF sich verhalte wie der Ausschnitt GBC zum *A*usschnitte HEF.



Man ziehe die BC, *C*K, nehme in den Bogen BC, CK die Punkte O, P an, und ziehe die BO, OC, CP, PK.

Da nun die *B*G, GC den beyden CG, GK gleich sind, und gleiche Winkel einschlieſsen, so ist auch die Grundlinie

BC



BC der Grundlinie CK gleich folglich ist (1, 4. S.) auch das Dreyeck GBC dem Dreyecke GCK gleich. Und da der Bogen BC dem Bogen CK gleich ist, so ist auch der übrige Bogen, der diesen zum Kreise ABC ergänzt, (3. Grundf.) dem übrigen Bogen, der den nämlichen Bogen, zu einerley Kreise ergänzt, gleich; folglich ist (3, 27. S.) der Winkel BOC dem Winkel CPK gleich, und daher (3, 11. Erkl.) der Abschnitt BOC dem Abschnitte CPK ähnlich, auch sind beyde über den gleichen geraden Linien BC, CK. Aehnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien aber sind (3, 24. S.) einander gleich; folglich ist der Abschnitt BOC dem Abschnitte CPK gleich. Es ist aber auch das Dreyeck BGC dem Dreyecke CGK, folglich der ganze Ausschnitt GBC (2. Grundf.) dem ganzen Ausschnitte GCK gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Ausschnitt GKL jedem der beyden GKC, GCB gleich; folglich sind die drey Ausschnitte GBC, GCK, GKL, einander gleich. Aus eben den Gründen sind auch die Ausschnitte HEF, HFM, HMN einander gleich. Wievielfach also der Bogen BL von dem Bogen BC ist, ebensovielfach ist der Ausschnitt GBL von dem Ausschnitte GBC. Aus gleichen Gründen ist auch der Bogen EN von dem Bogen EF ebensovielfach, als der Ausschnitt HEN von dem Ausschnitte HEF, auch ist, nach dem Erwiesenen, jenachdem der Bogen BL ebensogroß, oder größer, oder kleiner ist, als der Bogen EN, auch der

Aus-

Ausschnitt GBL ebensogross, oder grösser, oder kleiner, als der Ausschnitt HEN. Da nun hier vier Grössen, nämlich die zwey Bogen BC, EF, und die zwey Ausschnitte BCG, HEF sind, und man von dem Bogen BC und dem Ausschnitte GBC als Gleichvielfache den Bogen BL und den Ausschnitt GBL, von dem Bogen EF und dem Ausschnitte HEF aber als Gleichvielfache den Bogen EN, und den Ausschnitt HEN genommen hat, und gezeigt worden ist, dass, jenachdem der Bogen BL grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als der Bogen EN, auch der Ausschnitt GBL grösser, ebensogross, oder kleiner sey, als der Ausschnitt HEN, so verhält sich (5, 5. Erkl.) der Bogen BC zum Bogen EF wie der Ausschnitt GBC zum Ausschnitte HEF.

Zusaz. Hieraus erhellet (5, 11. S.) dass auch der Ausschnitt zum Ausschnitte sich verhalte wie der Winkel zum Winkel.

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

EILFTES BUCH.

Erklärungen.

1. Ein *Körper* ist, was Länge, Breite und Dicke hat.

2. Die *Gränze* des Körpers ist eine *Fläche.*

3. Eine gerade Linie ist *auf einer Ebene lothrecht*, wenn sie mit allen in derselben Ebene liegenden und sie berührenden geraden Linien rechte Winkel macht.

4. Eine Ebene ist *auf einer andern lothrecht*, wenn alle gerade Linien, die in der einen Ebene auf den gemeinschaflichen Durchschnitt beyder Ebenen lothrecht errichtet werden, auch auf der andern Ebene lothrecht stehen.

5. Wenn von dem oberen Endpunkte einer geraden Linie, die auf einer Ebene aufgestellt ist, ein Loth auf die Ebene gefällt und von dem Punkte, da solches die Ebene trifft, nach dem andern in der Ebene lie-

liegenden Endpunkte der aufgeſtellten Linie eine Linie gezogen wird, ſo heiſst der ſpize Winkel, welcher von der gezogenen und der aufgeſtellten geraden Linie eingeſchloſſen wird, die *Neigung der Linie gegen die Ebene*.

6. Die *Neigung einer Ebene gegen eine andere* iſt der ſpize Winkel, der von den geraden Linien eingeſchloſſen wird, die in beyden Ebenen auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt im nämlichen Punkte deſſelben lothrecht errichtet werden.

7. Zwey Ebenen haben *gegen einander ähnliche Neigungen*, wenn die vorgenannten Neigungswinkel einander gleich ſind.

8. *Parallele Ebenen* ſind, die nicht zuſammentreffen.

9. *Aehnliche Körper* ſind, die von gleichvielen ähnlichen Ebenen eingeſchloſſen werden.

10. *Gleiche und ähnliche Körper* ſind, die von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen eingeſchloſſen werden.

11. Ein *körperlicher Winkel* iſt die Neigung von mehr, als zwey, geraden Linien die einander berühren, und nicht in *einer* Ebene liegen, gegen alle gerade Linien. Oder: ein *körperlicher Winkel* iſt, der von mehr, als zwey, ebenen Winkeln, die nicht in einerley Ebene liegen, und in *einem* Punkte aufgeſtellt ſind, eingeſchloſſen wird.

12. Eine *Pyramide* iſt ein von Ebenen eingeſchloſſener Körper, der zwiſchen einer Ebene und einem Punkte befindlich iſt.

13. Ein *Prisma* ist ein von Ebenen eingeschlossener Körper, von welchen zwey gegenüberliegende gleiche und ähnliche parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind.

14. Eine *Kugel* ist die Figur, welche eingeschlossen wird, wenn ein Halbkreis um seinen unbewegten Durchmesser umgedrehet wird, bis er wieder in die Stelle zurückkommt, von welcher er angefangen hatte sich zu bewegen.

15. Die *Axe* der Kugel ist eben die unbewegte gerade Linie, um welche der Halbkreis sich drehet.

16. Der *Mittelpunkt* der Kugel ist der nämliche mit dem Mittelpunkte des Halbkreises.

17. Der *Durchmesser* der Kugel ist eine gerade Linie die durch den Mittelpunkt gehet, und auf beyden Seiten von der Oberfläche der Kugel begränzt wird.

18. Ein *Kegel* ist die Figur welche eingeschlossen wird, wenn ein rechtwinklichtes Dreyeck um eine der den rechten Winkel einschliessenden Seiten, welche unbewegt bleibt, umgedrehet wird, bis es in eben die Stelle, von welcher es angefangen hatte sich zu bewegen, zurückkommt. Ist nun die unbewegt bleibende Linie der andern Seite, die sich um den rechten Winkel drehet, gleich, so ist der Kegel ein *rechtwinklichter*, ist sie aber kleiner, so ist er ein *stumpfwinklichter*, und ist sie grösser, so ist er ein *spizwinklichter*.

19. Die *Axe* des Kegels ist die unbewegt bleibende Linie, um welche das Dreyeck sich drehet.

20. Die *Grundfläche* desselben ist der von der umgedrehten Linie beschriebene Kreis.

21. Ein *Cylinder* ist die Figur, welche eingeschlossen wird, wenn ein rechtwinklichtes Parallelogramm, indem die eine seiner Seiten um den rechten Winkel unbewegt bleibt, umgedrehet wird, bis es in die Stelle zurückkommt, von welcher es angefangen hatte sich zu bewegen.

22. Die *Axe* des Cylinders ist jene unbewegt bleibende Linie, um welche das Parallelogramm sich drehet.

23. Die *Grundflächen* sind die Kreise, die von den beyden gegenüberliegenden umgedrehten Seiten beschrieben werden.

24. *Aehnliche Kegel* und *Cylinder* sind, deren Axen und die Durchmesser der Grundflächen proportionirt sind.

25. Ein *Würfel* ist ein von sechs gleichen Quadraten eingeschlossener Körper.

26. Ein *Tetraedron* ist ein von vier gleichen und gleichseitigen Dreyecken eingeschlossener Körper.

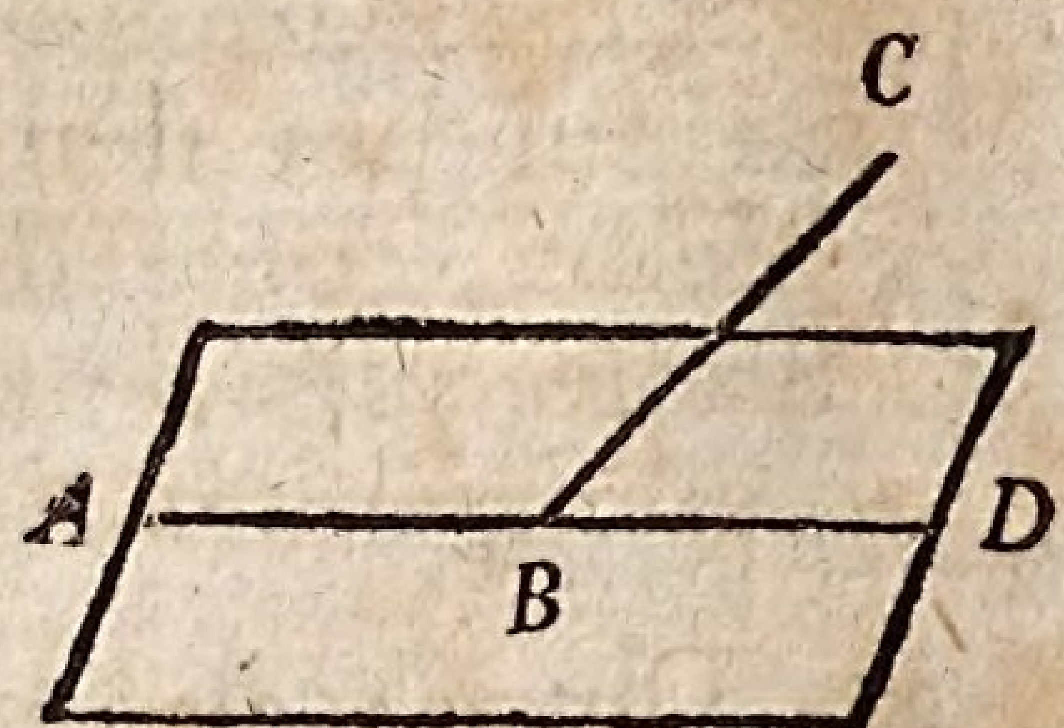
27. Ein *Oktaedron* ist ein von acht gleichen und gleichseitigen Dreyecken eingeschlossener Körper.

28. Ein *Dodekaedron* ist ein von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinklichten Fünfecken eingeschlossener Körper.

29. Ein *Ikosaedron* ist ein von zwanzig gleichen und gleichseitigen Dreyecken eingeschlossener Körper.

1. *Saz.*

Lehrſaz. Von einer geraden Linie liegt nicht ein Theil in einer Ebene, und der andere über der Ebene.



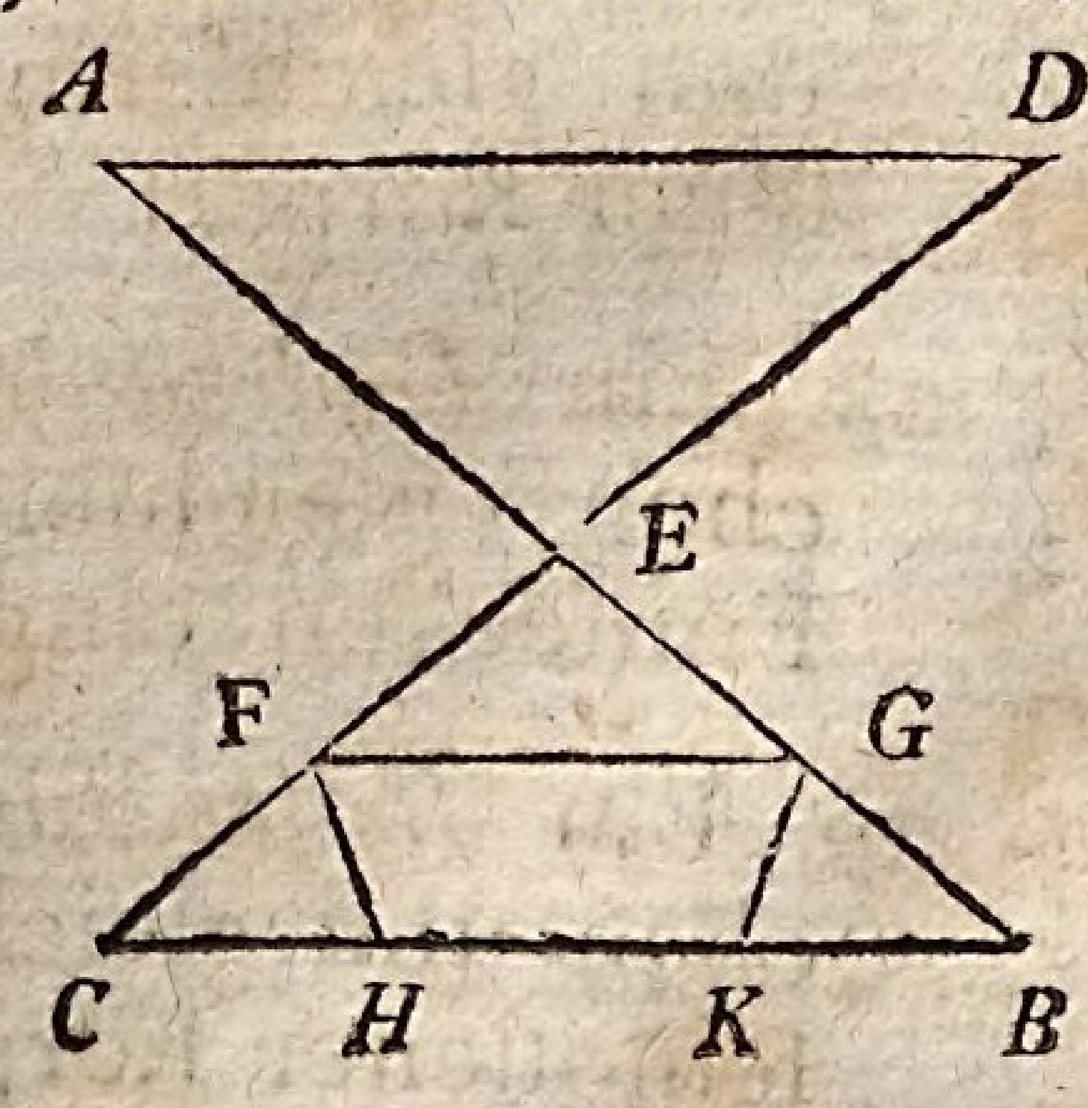
Beweis. Geſezt es ſey, die Möglichkeit angenommen, von der geraden Linie ABC der Theil AB in der Ebene, der Theil BC aber über der Ebene, ſo liegt die geradlinigte Verlängerung der Linie AB in der Ebene. Es ſey dieſe die BD, ſo hätten die zwey geraden Linien ABC, ABD einen gemeinſchaftlichen Abſchnitt AB welches unmöglich iſt. Denn eine gerade Linie hat mit einer andern nicht mehr, als *einen*, Punkt gemein, und ſonſt fallen die geraden Linien ganz zuſammen.

Folglich liegt von einer geraden Linie nicht ein Theil in einer Ebene und der andere über der Ebene w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey gerade Linien einander ſchneiden, ſo liegen ſie in *einer* Ebene, auch jedes Dreyeck liegt in *einer* Ebene.

Die zwey geraden Linien AB, CD ſchneiden einander in dem Punkte E, ſo behaupte ich, daſs die beyden Linien AB, CD in *einer* Ebene liegen, wie auch, daſs jedes Dreyeck in *einer* Ebene liege.



Beweis. Man nehme in den Linien EB, EC nach Belieben die Punkte F, G an, und ziehe die Linien CB, FG, FH, GK,

ſo

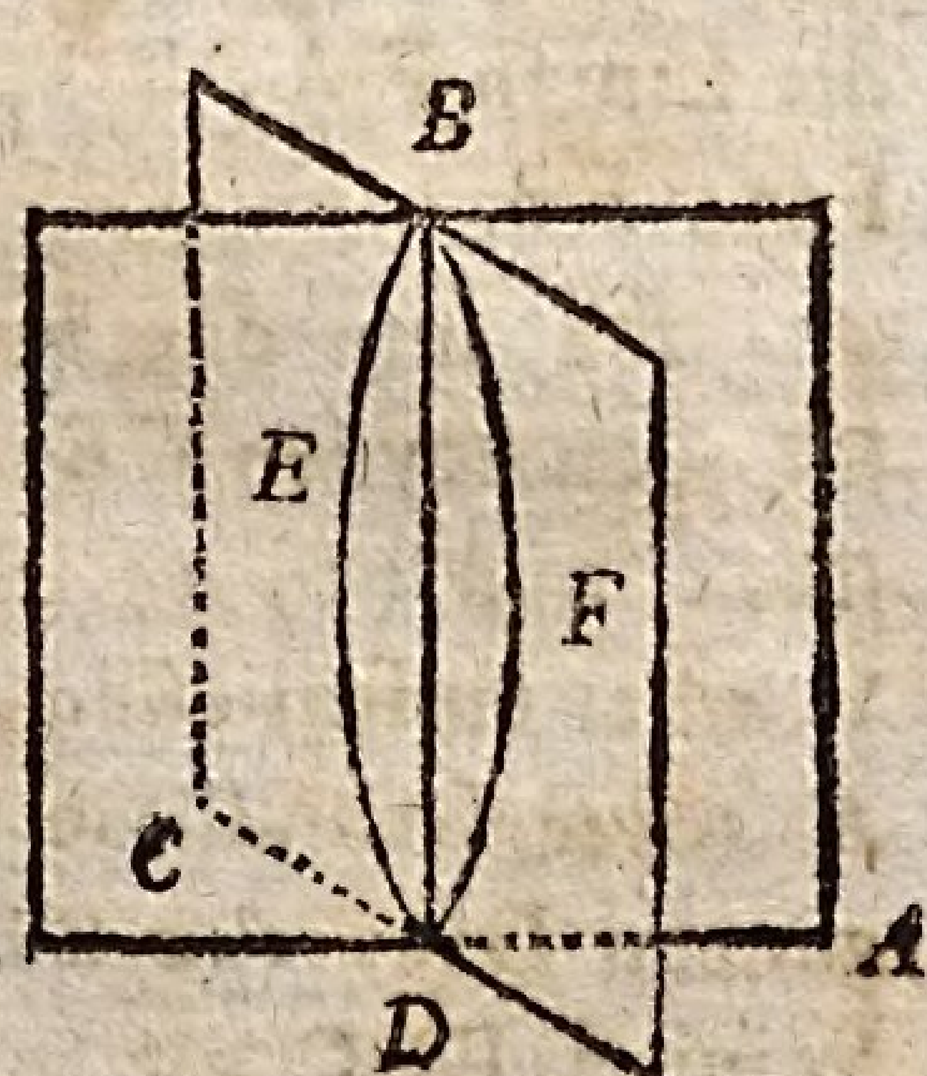
ſo behaupte ich *erſtens*, daſs das Dreyeck EBC in *einer* Ebene liege.

*D*enn wenn von dem *D*reyecke EBC ein Theil, wie FH*C* oder G*B*K in der Ebene, der andere aber in einer andern Ebene läge, ſo läge auch von der einen der beyden Linien EC, EB ein Theil in der Ebene, und der andere in einer andern Ebene. Wenn von dem *D*reyecke ECB ein Theil F*CB*G in der Ebene der andere aber in einer andern Ebene läge, ſo läge auch von den beyden Linien EC, EB ein Theil in der Ebene und der andere in einer andern Ebene. *D*avon iſt aber die Ungereimtheit gezeigt worden; Folglich liegt das Dreyeck EC*B* in *einer* Ebene. Aber in der Ebene, in welcher das *D*reyeck BCE liegt, liegen auch die beyden Linien EC, E*B*, und in der Ebene, in welcher die beyden Linien EC, E*B* liegen, liegen (11, 1. S.) auch die beyden *A*B, C*D*; folglich liegen die beyden AB, C*D* in *einer* Ebene und jedes *D*reyeck liegt in *einer* Ebene. w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey Ebenen einander ſchneiden, ſo iſt ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt eine gerade Linie.

Die beyden Ebenen *A*B, BC ſchneiden einander und ihr gemeinſchaftlicher *D*urchſchnitt ſey D*B*, ſo behaupte ich, daſs die DB eine gerade Linie ſey.



Beweis. Denn wäre dies nicht, ſo ziehe man von dem Punkte *D* nach dem Punkte *B* in der Ebene AB die gerade Linie *D E*B, in der Ebene BC aber die gerade Linie *D*FB, ſo haben die beyden geraden Linien DEB, *D*FB einerley Endpunkte, und ſchlieſſen alſo einen Raum ein, welches (12. Grundſ.) unmöglich iſt. Folglich ſind *D*EB, *D*FB kei-

ne

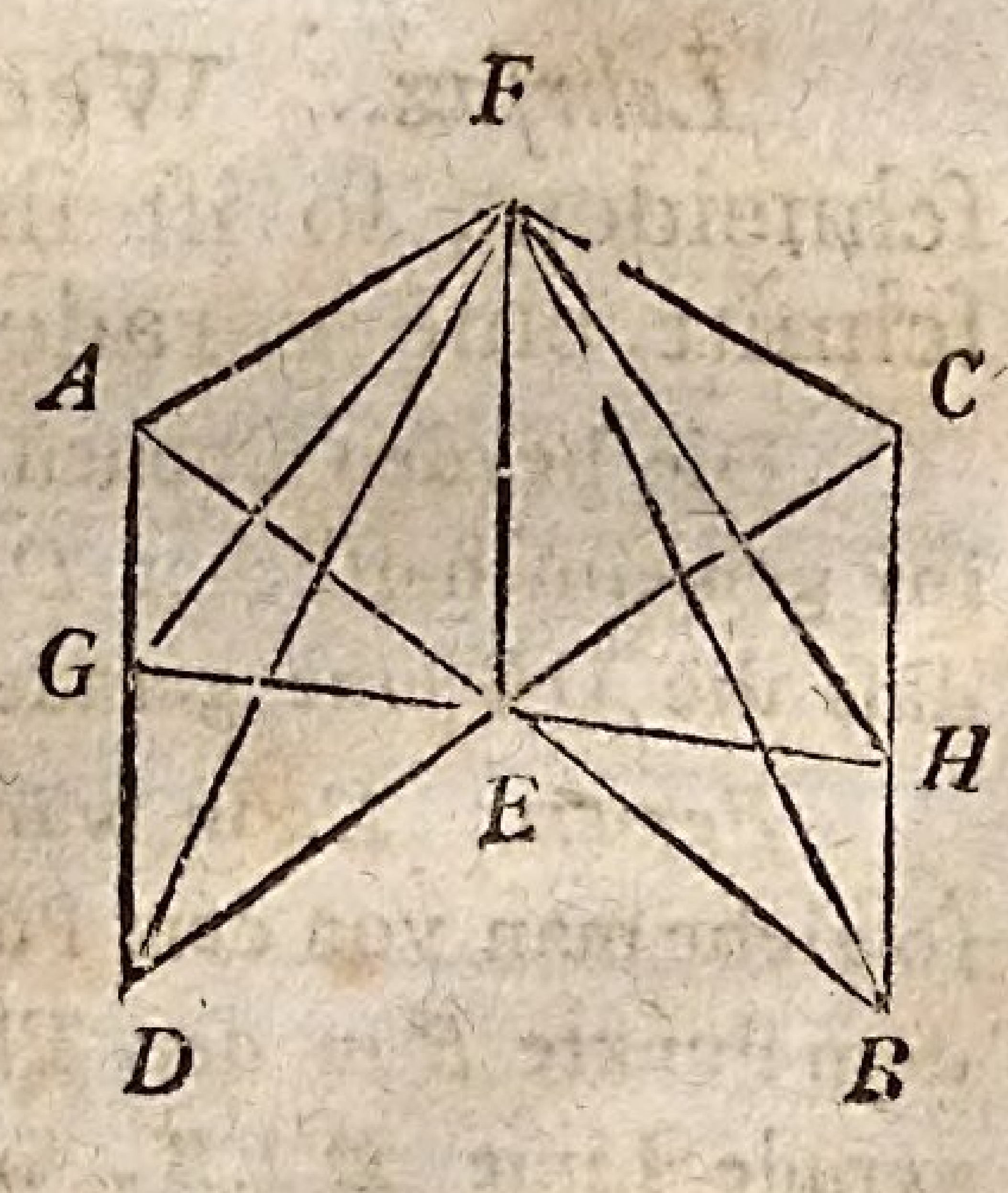
ne gerade Linien. Auf eben die Art aber kann gezeigt werden, daſs auch keine andere Linie, die von dem Punkte *D* nach dem Punkte *B* gezogen wird, eine gerade ſey, auſſer der D*B*, dem gemeinſchaftlichen *D*urchſchnitte der Ebenen *A*B, *B*C.

Wenn demnach zwey Ebenen einander ſchneiden u. ſ. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie auf zwey andern, die einander ſchneiden, in ihrem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte lothrecht iſt, ſo iſt ſie auf der Ebene durch jene beyde lothrecht.

*D*ie gerade Linie E F ſtehe auf den beyden A B, C D, die einander in dem Punkte E ſchneiden, in dieſem Punkte E lothrecht, ſo behaupte ich, daſs die Linie E F auch auf der Ebene durch die beyden A B, C *D* lothrecht ſey.



Beweis. Man nehme die Linien A E, E B, C E, E D einander gleich, und ziehe durch den Punkt E die Linie G E H nach Belieben, ferner ziehe man die *A*D, C E, und endlich noch von einem beliebigen Punkte F die Linien F A, F G, F D, F C, F H, F B.

*D*a nun die beyden A E, E D den beyden C E, E B gleich ſind, und (1, 15. S.) gleiche Winkel einſchlieſſen, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie A D der Grundlinie C B, und das ganze *D*reyeck A E D dem ganzen *D*reyecke C E B, mithin auch der Winkel D *A* E dem Winkel E B C gleich. Es iſt aber (1, 15. S.) auch der Winkel A E G dem Winkel B E H gleich; folglich ſind in den

Drey-

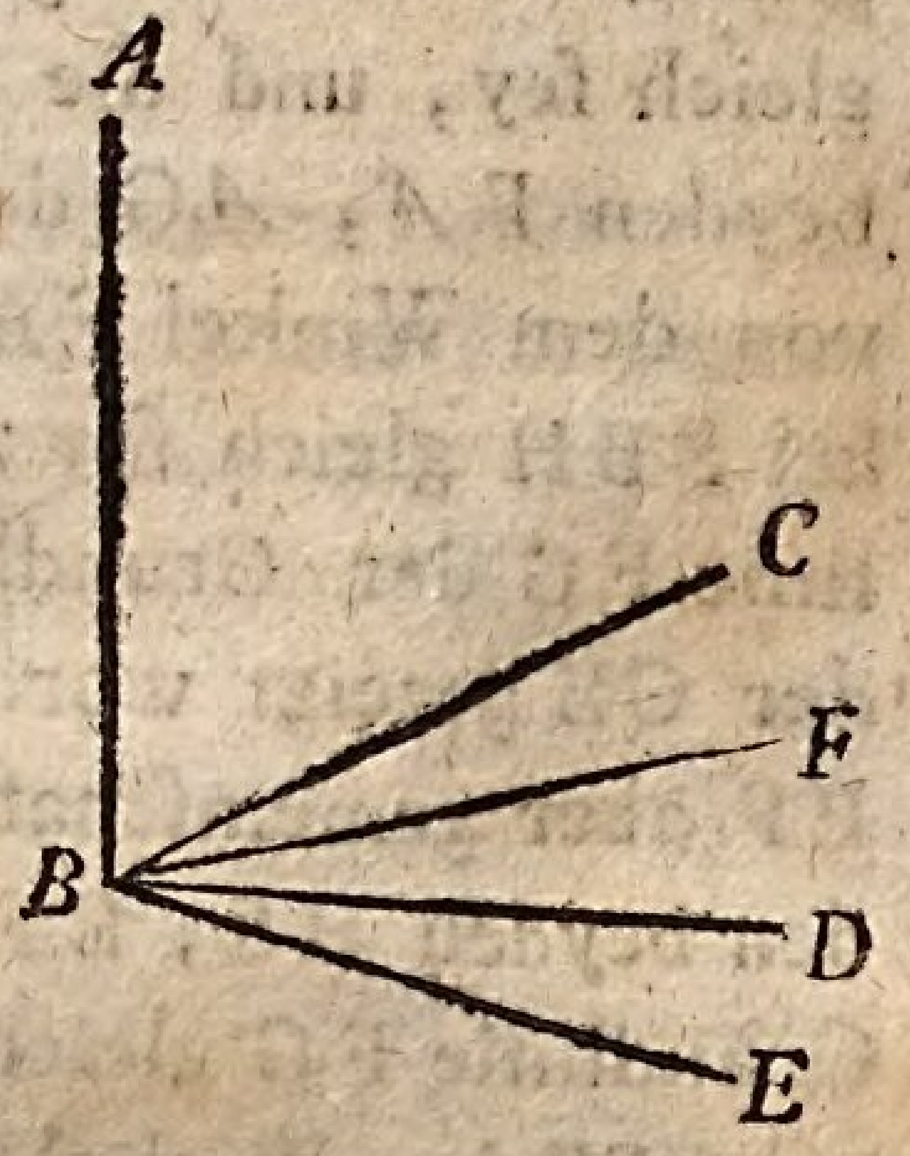
Dreyecken AGE, BEH zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich, auch ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, die AE nämlich der EB, welche an den gleichen Winkeln liegt; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten beyder einander stückweise gleich; die GE also ist der EH, und die AG der BH gleich. Weil nun auch die AE der EB gleich, die FE aber gemeinschaftlich und lothrecht ist, so ist (1, 4. S.) die Grundlinie FA der Grundlinie FB gleich. Aus eben dem Grunde ist auch die FC der FD gleich. Da ferner die AD der CB, und die FA der FB gleich ist, so sind die beyden FA, AD den beyden FB, BC stückweise gleich, auch ist gezeigt worden, dafs die Grundlinie FD der Grundlinie FC gleich sey; folglich ist der Winkel FAD dem Winkel FBC (1, 8. S.) gleich. Ferner ist gezeigt worden, dafs die AG der BH gleich sey, und die FA ist der FB gleich; folglich sind die beyden FA, AG den beyden FB, BH gleich. Auch ist von dem Winkel FAG gezeigt worden, dafs er dem Winkel FBH gleich sey; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie FG der Grundlinie FH gleich. Da nun ferner von der GE gezeigt worden ist, dafs sie der EH gleich sey, die EF aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden GE, EF den beyden HE, EF gleich, auch ist die Grundlinie FH der Grundlinie FG gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel GEF dem Winkel HEF gleich, und mithin jeder von beyden ein rechter. Die Linie FE macht also mit der durch den Punkt E nach Belieben gezogenen Linie GH rechte Winkel. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dafs die FE auch mit allen andern geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel mache. Eine gerade Linie aber ist (11, 3. Erkl.) auf einer Ebene lothrecht, wenn sie mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel macht; folglich ist die Linie EF auf der angenommenen Ebene lothrecht. Die angenommene Ebene aber ist die durch die Linien AB, CD; die EF also ist auf der Ebene durch die Linien AB, CD lothrecht.

Wenn demnach eine gerade Linie auf zwey andern u. s. w. w. z. e. w.

5. Saz.

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie auf drey andern, die sich berühren, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte lothrecht ist, so sind jene drey geraden Linien in *einer* Ebene.

Eine gerade Linie *A*B stehe auf den drey geraden Linien *B C*, B*D*, *B*E in ihrem Berührungspunkte lothrecht, so behaupte ich, dass die drey Linien *B*C, B*D*, *B*E in *einer* Ebene liegen.



Beweis. wäre dies nicht, sondern wären, die Möglichkeit angenommen, die Linien BD, BE in der Ebene, die *B C* aber über derselben, so lege man durch *A*B, BC eine Ebene, welche (11, 3. S.) die angenommene Ebene in einer geraden Linie schneiden wird. Es sey diese die *B*F, so sind also die drey geraden Linien AB, BC, *B*F in *einer* Ebene, nämlich in der Ebene durch die *A*B, BC. Und da die AB auf den beyden *B*D, BE lothrecht ist, so ist sie (11, 4. S.) auch auf der Ebene durch die D*B*, BE lothrecht. Aber die Ebene durch die DB, *B*E ist die angenommene; folglich ist die AB auf der angenommenen Ebene lothrecht, und macht daher (11, 1. Erkl.) auch mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel. Es berührt sie aber die BF, die in der angenommenen Ebene liegt; folglich ist der Winkel ABF ein rechter. Es ist aber, nach der Voraussezung, auch der Winkel ABC ein rechter, folglich ist der Winkel ABF dem Winkel A*B*C gleich, und beyde sind in *einer* Ebene, welches (9. Grunds.) unmöglich ist; folglich liegt

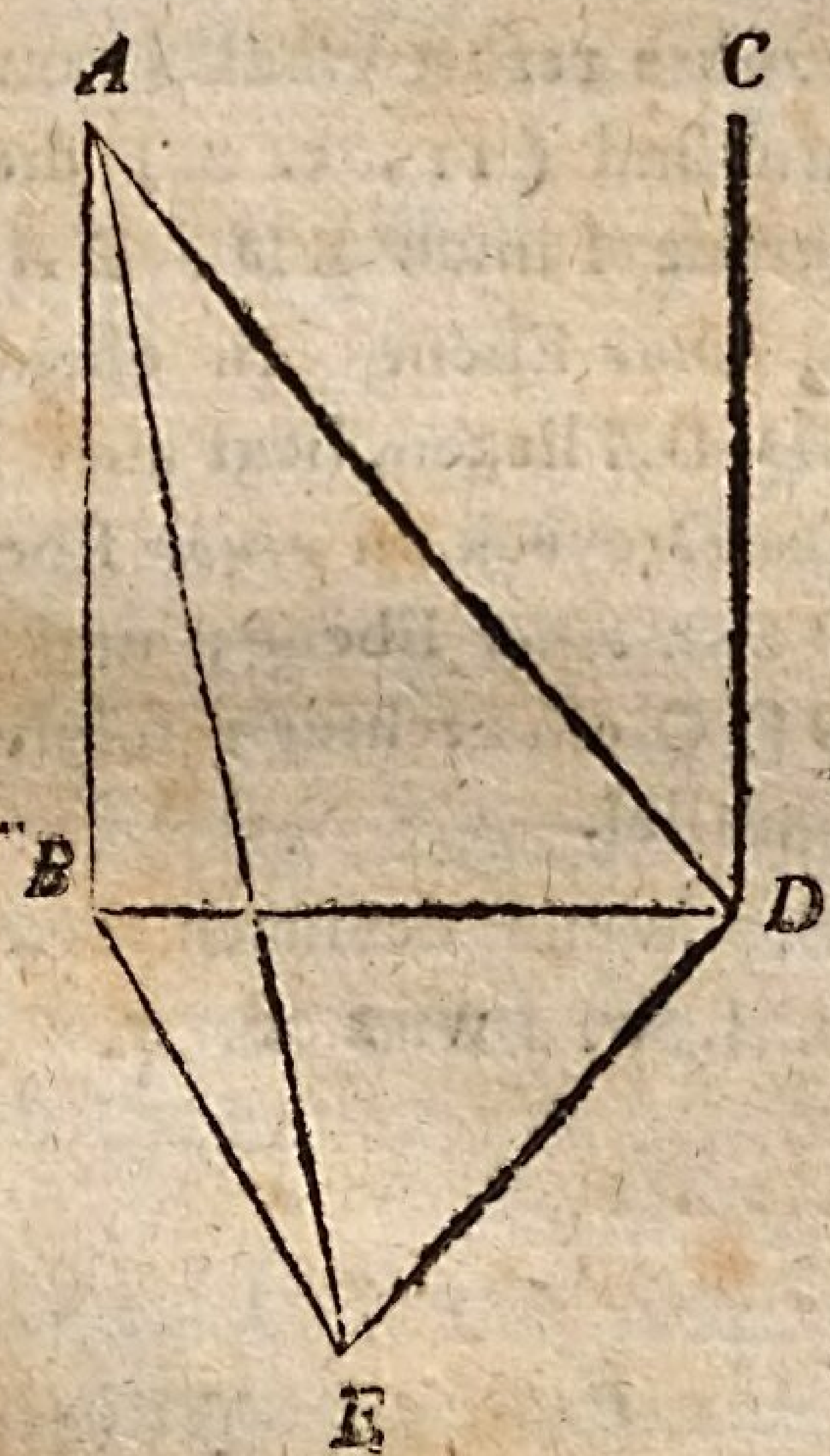
liegt die gerade Linie BC nicht über der Ebene, und mithin sind die drey geraden Linien BC, *BD*, *BE* in *einer* Ebene.

Wenn demnach eine gerade Linie auf drey andern e. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien auf einerley Ebene lothrecht sind, so sind sie parallel.

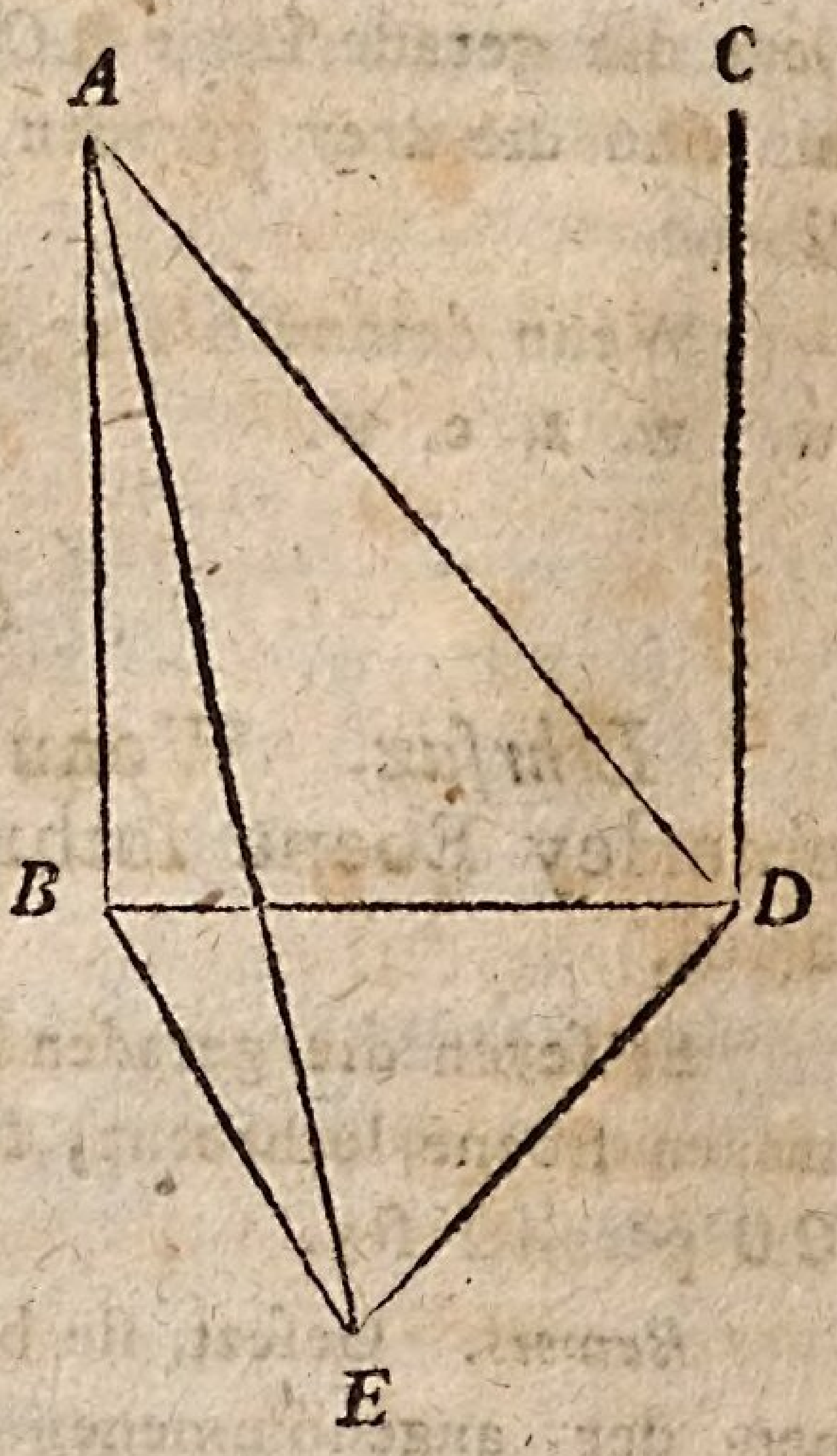
Es seyen die geraden Linien AB, C*D* auf der angenommenen Ebene lothrecht, so behaupte ich, daſs die A*B* der CD parallel sey.



Beweis. Gesezt, sie begegnen der angenommenen Ebene in den Punkten *B*, *D*, so ziehe man die Linie BD, und errichte auf dieser in der Ebene das Loth DE, hierauf mache man die DE der AB gleich, und ziehe die *B*E, AE, A*D*.

Da die A*B* auf der angenommenen Ebene lothrecht ist, so ist sie (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, lothrecht. Es berühren aber die beyden BD, *B*E die AB, die mit ihr in derselben Ebene sind; folglich ist jeder der Winkel AB*D*, ABE ein rechter. Aus eben dem Grunde ist auch jeder der Winkel C*D*B, CDE ein rechter. Da nun die AB der DE gleich, die BD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden A*B*, B*D* den beyden ED, DB gleich, und schliessen rechte Winkel ein; folglich ist (1, 4. S.) die Grundlinie AD der Grundlinie BE gleich. Da ferner die *AB* der DE, und die *A*D der BE gleich ist, so sind die bey-

 den



den A B, B E den beyden ED, D B gleich, und haben die A E zur gemeinſchaftlichen Grundlinie; folglich iſt (1, 8. S.) der Winkel *A* B E dem Winkel E D *A* gleich. Aber der Winkel A B E iſt ein rechter; folglich iſt auch der E *D A* ein rechter, und mithin die E *D* auf der *D* A lothrecht. Sie iſt aber auch auf jeder der beyden B D, D C lothrecht; folglich macht die E D mit den drey Linien B D D A, *D* C in dem *B*erührungspunkte rechte Winkel, und mithin ſind (11, 5. S.) die drey gerade Linien B D, D *A*, D C in *einer* Ebene. In eben der Ebene aber, in welcher die BD, D*A* liegen, liegt auch die AB, denn (11, 2. S.) liegt jedes Dreyeck in *einer* Ebene; folglich liegen die A B, *B* D, D *C* in *einer* Ebene, und es iſt jeder der Winkel A B D, *B* D C ein rechter; folglich (1, 28. S.) die *A*B der C D parallel.

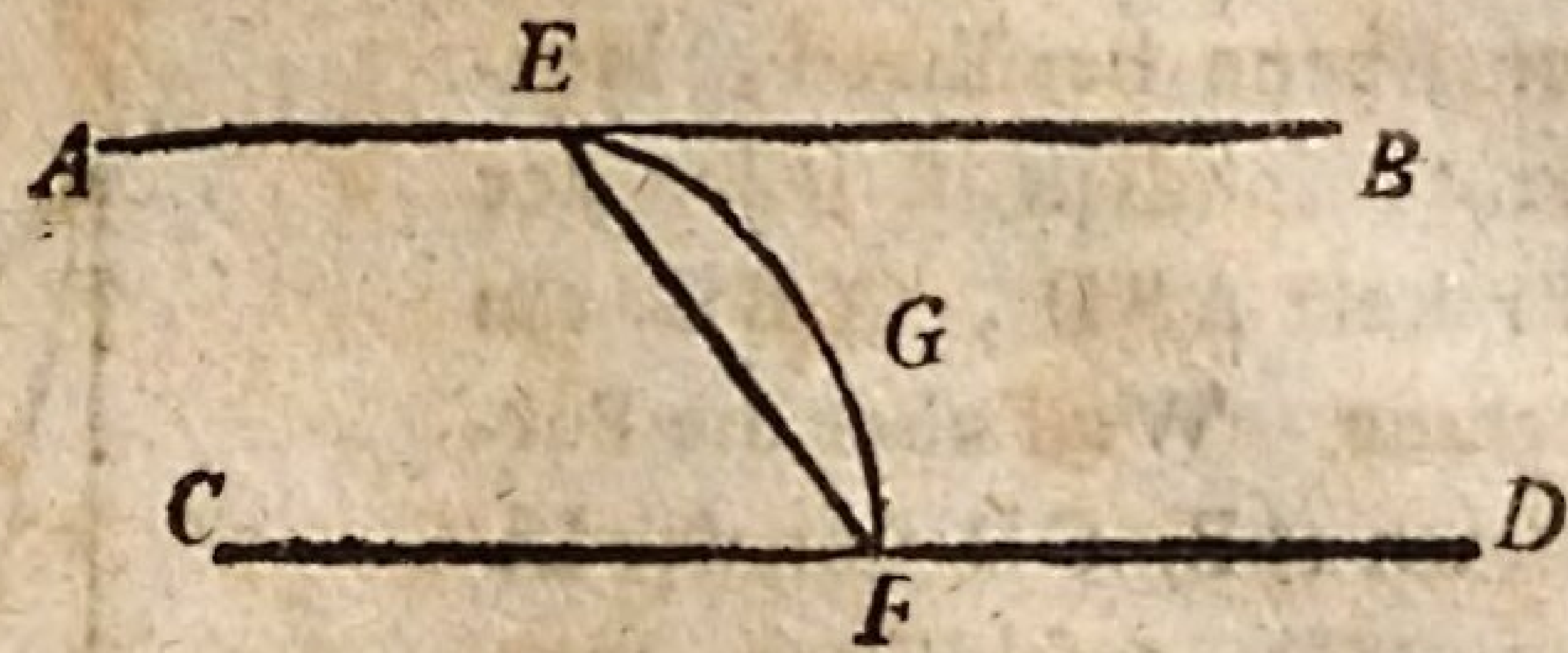
Wenn demnach zwey gerade Linien auf einer Ebene u. ſ. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey gerade Linien parallel ſind, und man nimmt auf beyden beliebige Punkte an, ſo liegt die Linie, welche dieſe Punkte verbindet, mit den Parallelen in *einer* Ebene.

Es ſeyen die zwey geraden Linien *A* B, C *D* parallel, und auf jeder von beyden nehme man einen beliebigen Punkt E, F an, ſo behaupte ich, daſs die gerade Linie, welche die Punkte E, F verbindet, mit den Parallelen in *einer* Ebene liege.

Be-



Beweis. Wäre dies nicht, sondern wäre sie, die Möglichkeit angenommen, über der Ebene, wie die EGF, so lege man durch die EGF eine Ebene, welche die angenommene Ebene (11, 3. S.) in einer geraden Linie schneiden wird. Es sey diese die EF, so schliessen also die zwey geraden Linien EGF, EF einen Raum ein, was (12. Grundſ.) unmöglich ist. Folglich liegt die von dem Punkte E nach dem Punkte F gehende gerade Linie nicht über der Ebene, und mithin in eben derselben, die durch die Parallelen AB, CD gehet.

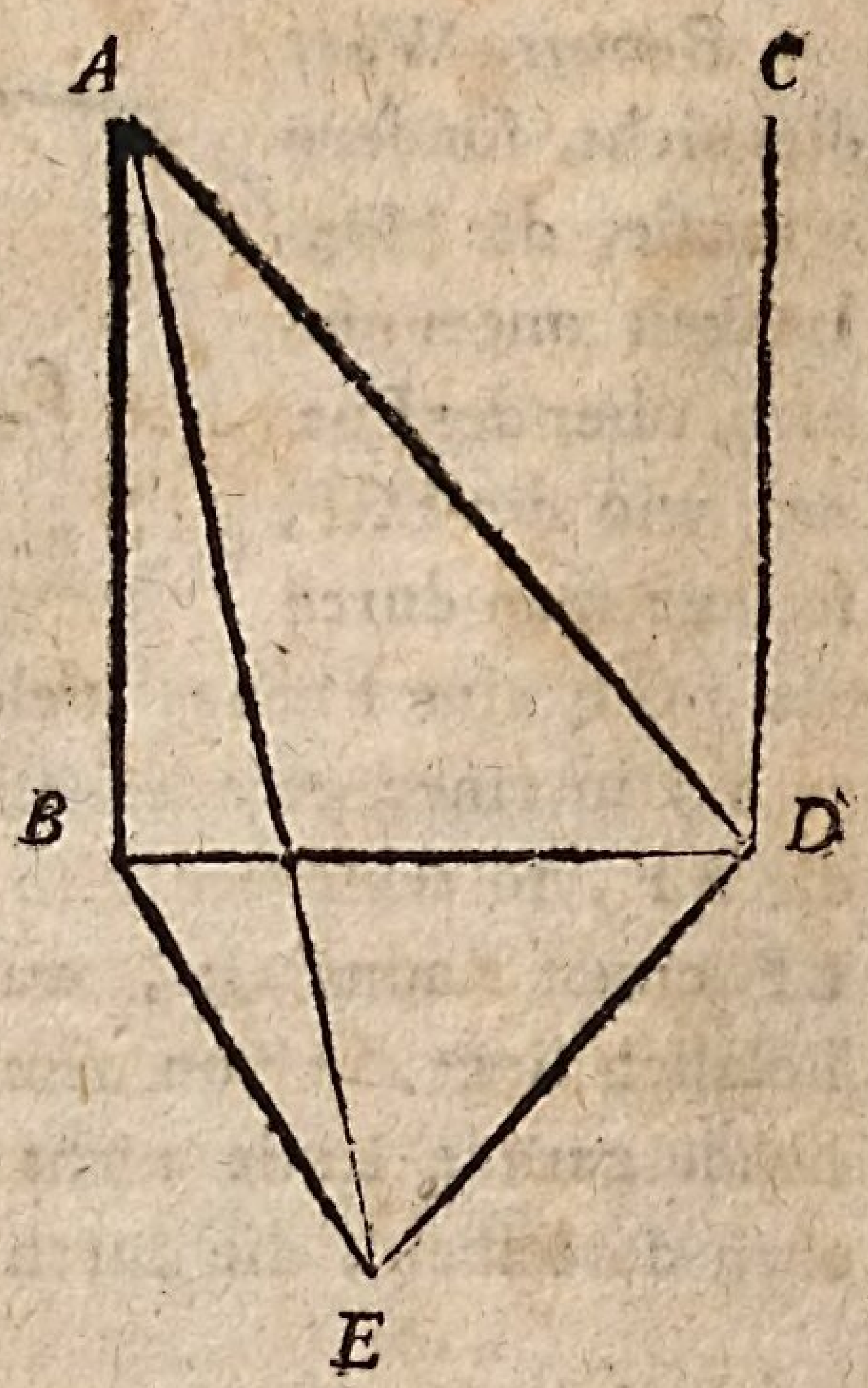
Wenn demnach zwey gerade Linien parallel sind u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien parallel sind, und die eine von ihnen auf einer Ebene lothrecht steht, so stehet auch die andere auf derselben Ebene lothrecht.

Es seyen die zwey geraden Linien AB, CD parallel, und die eine von ihnen, AB, sey auf der angenommenen Ebene lothrecht, so behaupte ich, dass auch die andere, CD, auf derselben Ebene lothrecht sey.

Beweis. Die Linien AB, CD treffen die Ebene in den Punkten B, D, und man ziehe die *B*D, so sind (11, 7. S.) die AB, DC, *B*D in *einer* Ebene. Man errichte in der angenommenen Ebene auf der BD die DE lothrecht, mache die DE der AB gleich, und ziehe die BE, AE, AD. Da nun die *A*B auf der Ebene lothrecht ist, so ist sie (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in derselben



ben Ebene berühren, lothrecht, folglich ist jeder der Winkel ABD, ABE ein rechter. Weil aber die Parallelen *A* B, CD von der Linie BD geschnitten werden, so sind (1, 29. S.) die Winkel *A*BD, C*DB* zwey rechten gleich. Der Winkel ABD aber ist ein rechter; folglich ist auch der CDB ein rechter, und mithin die CD auf der BD lothrecht. Da ferner die AB der DE gleich, die B*D* aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden *A*B, BD den beyden ED, DB gleich, auch ist der Winkel *A*DB dem Winkel EDB gleich, denn jeder von beyden ist ein rechter; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AD der Grundlinie *B*E gleich. Da ferner die *A*B der DE und die BE der AD gleich ist, so sind die beyden *AB*, BE den beyden ED, D*A* stückweise gleich, und die *A*E ist ihre gemeinschaftliche Grundlinie; folglich ist (1, 8. S.) der Winkel *A*BE dem Winkel ED*A* gleich. Der Winkel *A*BE aber ist ein rechter; folglich ist auch der ED*A* ein rechter, und mithin die ED auf der D*A* lothrecht. Sie ist aber auch auf der BD lothrecht; folglich ist (11, 4. S.) die ED auch auf der Ebene durch die BD, *DA* lothrecht, und macht mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel. Aber in der Ebene durch die B*A*, AD liegt die DC, weil (11, 2. S.) die AB, BD in der Ebene durch die *B*D, DA liegen. In eben der Ebene aber, in welcher die *A*B, BD liegen, liegt (11, 7. S.) auch die DC, folglich ist die EDauf der DC, und mithin auch die C*D* auf der DE lothrecht. Aber die CD ist auch lothrecht auf der BD; folglich ist die C*D* auf den zwey geraden Linien *D*E, DB die einander schneiden, in ihrem gemeinschaftlichen *D*urchschnitte D, und daher (11, 4. S.)

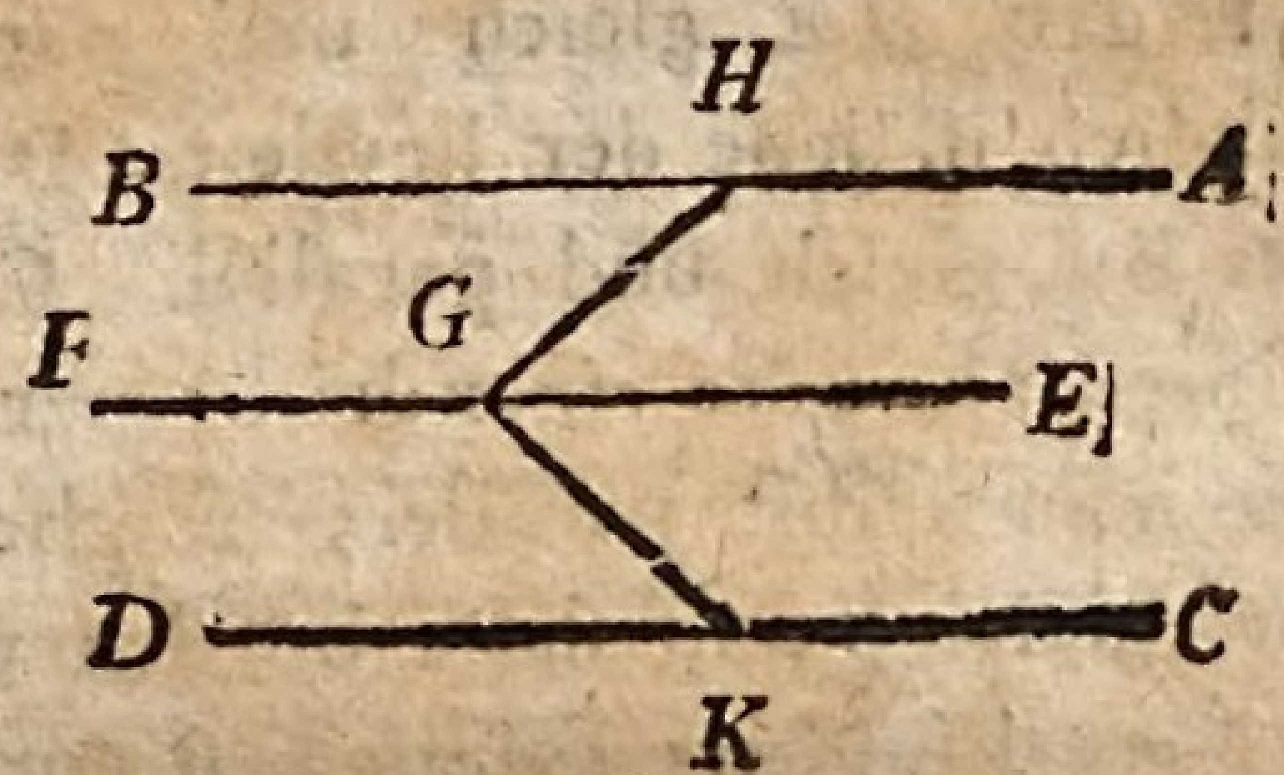
auch

auch auf der Ebene durch die beyden DE, D*B*, lothrecht. *A*ber die Ebene durch die DE, DB ist die angenommene; folglich ist die CD auf der angenommenen Ebene lothrecht w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrsaz. Gerade Linien die *einer* dritten parallel sind, und nicht mit ihr in *einer* Ebene liegen, sind auch einander selbst parallel.

Es seyen die beyden Linien *A*B, CD der dritten EF parallel, auch liegen sie nicht mit ihr in *einer* Ebene, so behaupte ich, dass die *A*B der CD parallel sey.



Beweis. Man nehme in der Linie EF nach Belieben einen Punkt G, errichte in demselben auf der EF, in der Ebene durch EF, AB, die GH, und in der Ebene durch FE, CD die GK lothrecht.

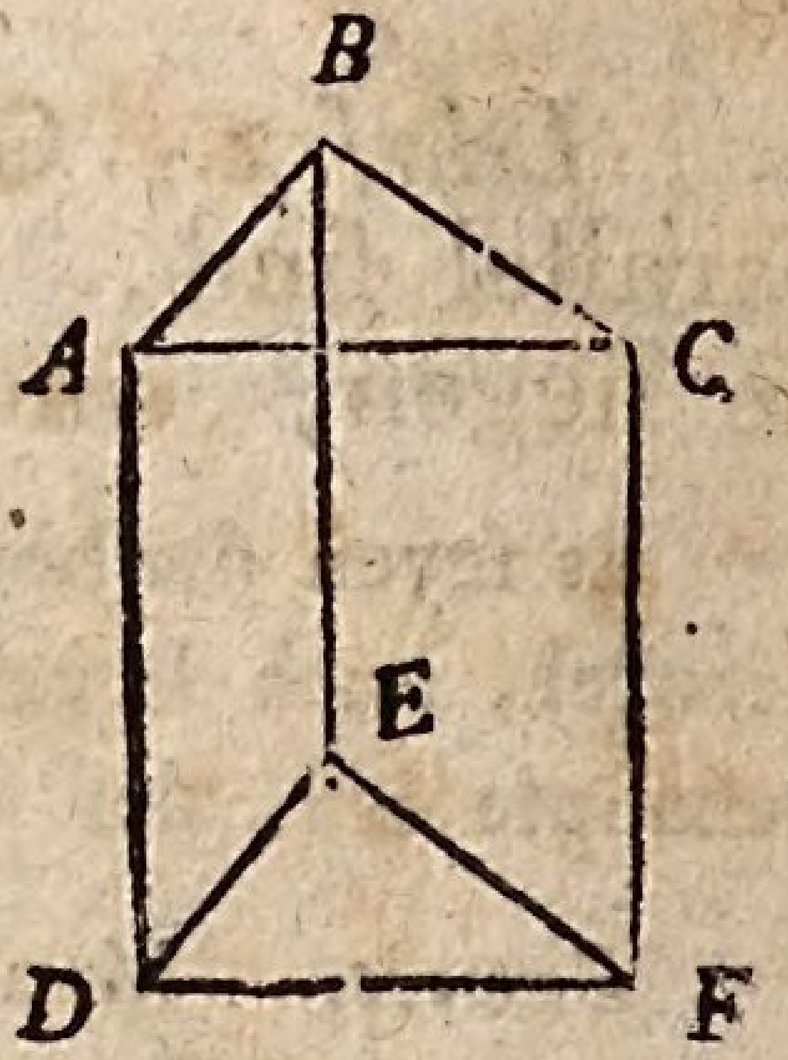
Da nun die EF auf den beyden GH, GK lothrecht ist, so ist (11, 4. S.) die EF auch auf der Ebene durch GH, GK lothrecht: auch ist die EF der *AB* parallel; folglich ist (11, 8. S.) auch die AB auf der Ebene durch H, G, K lothrecht. Aus eben den Gründen ist auch die CD auf der Ebene durch H, G, K lothrecht; folglich sind die beyden *A*B, C*D* auf der Ebene durch H, G, K lothrecht. Wenn aber zwey gerade Linien auf einerley Ebene lothrecht sind, so sind sie (11, 6. S.) einander parallel; folglich ist die *A*B der CD parallel, w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien, die einander berühren, zwey andern, die einander berühren, parallel, und nicht mit ihnen in

in *einer* Ebene sind, so schliessen sie gleiche Winkel ein.

Zwey gerade Linien, die einander berühren, AB, *B*C seyen zwey andern geraden Linien die einander berühren DE, EF parallel, und nicht in *einer* Ebene mit ihnen, so behaupte ich, dass der Winkel A B C dem Winkel D E F gleich sey.



Beweis. Man nehme die B A, B C, E D, E F einander gleich, und ziehe die A D, C F, B E, A C, D F. *D*a nun die B A der E D gleich und parallel ist, so ist(1, 35. S) auch die A D der B E gleich und parallel. *A*us eben dem Grunde ist auch die C F der *B* E gleich und parallel; folglich ist jede der beyden A D, C F der B E gleich und parallel. Gerade Linien aber die *einer* dritten paralel sind, sind (11, 9. *S.*) auch einander selbst parallel; folglich ist die AD der CF parallel und gleich, und diese beyden werden durch die Linien A C, D F verbunden; folglich ist auch die A *C* der D F gleich und parallel. Und da die zwey geraden Linien A B, B C den zweyen *D* E, E F gleich sind, und die Grundlinie A C der Grundlinie D F gleich ist, so ist (1, 8. S.) auch der Winkel *A* B C dem Winkel *D* E F gleich.

Wenn demnach zwey gerade Linien, die einander berühren u. s. w. w. z. e. w.

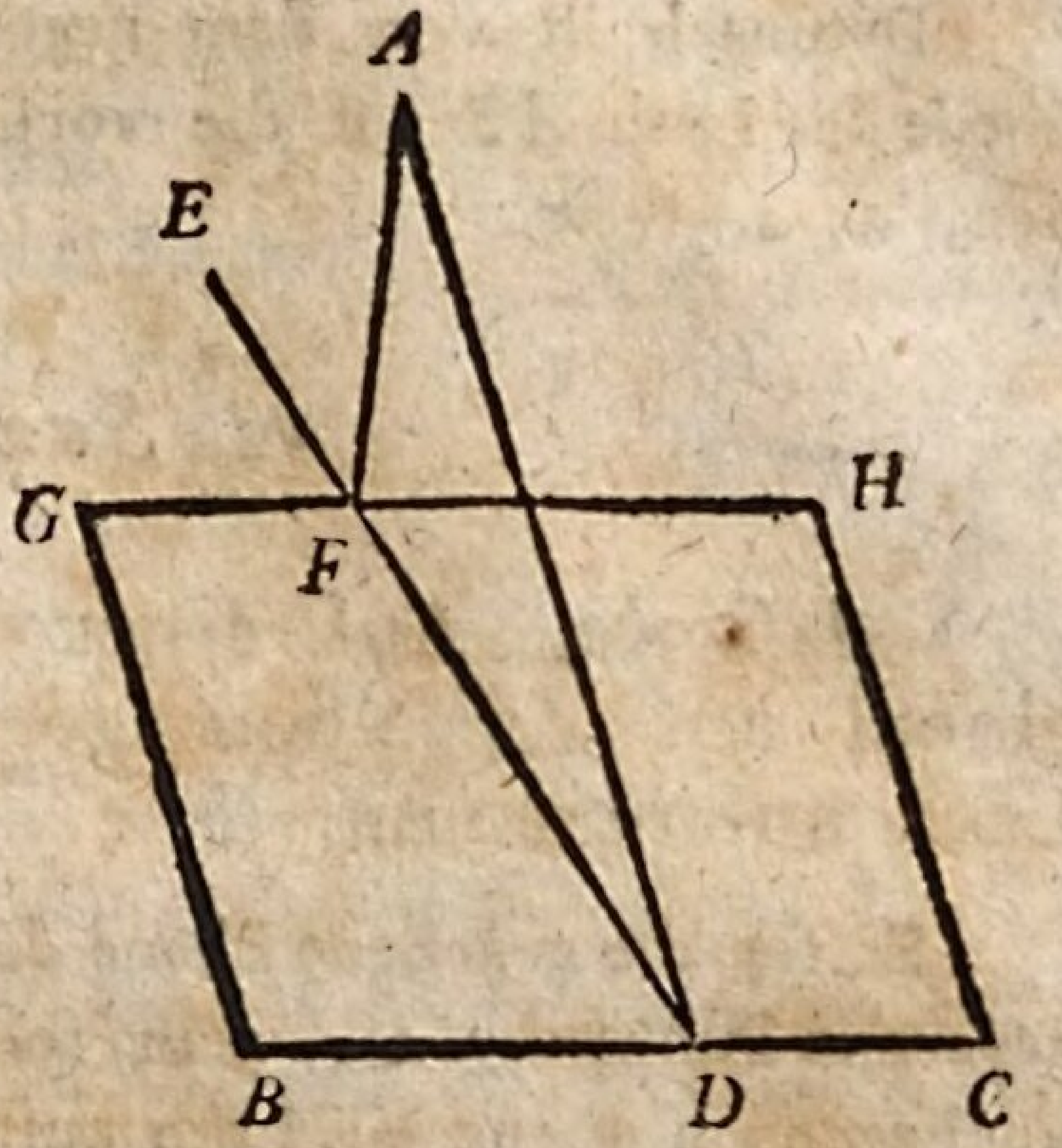
11. *Saz.*

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte über einer Ebene ein Loth auf die Ebene zu fällen.

Es sey der gegebene Punkt *A*, die gegebene Ebene sey die vorliegende, und man soll von dem Punkte *A* auf die vorliegende Ebene ein Loth fällen.

Auflösung. Man ziehe in der vorliegenden Ebene nach Belieben eine gerade Linie B C, und fälle (1, 12. S.) von dem

dem Punkte A auf die Linie *BC* die *A D* lothrecht. Ist nun die *AD* auch auf der vorliegenden Ebene lothrecht, so ist das verlangte geschehen. Ist dies aber nicht, so errichte man (1, 11. S.) in dem Punkte D auf der Linie BC in der vorliegenden Ebene die D E lothrecht, fälle hierauf (1, 12. S.) von dem



Punkte *A* auf die Linie D E das Loth A F, und ziehe durch den Punkt F die G H der B C parallel.

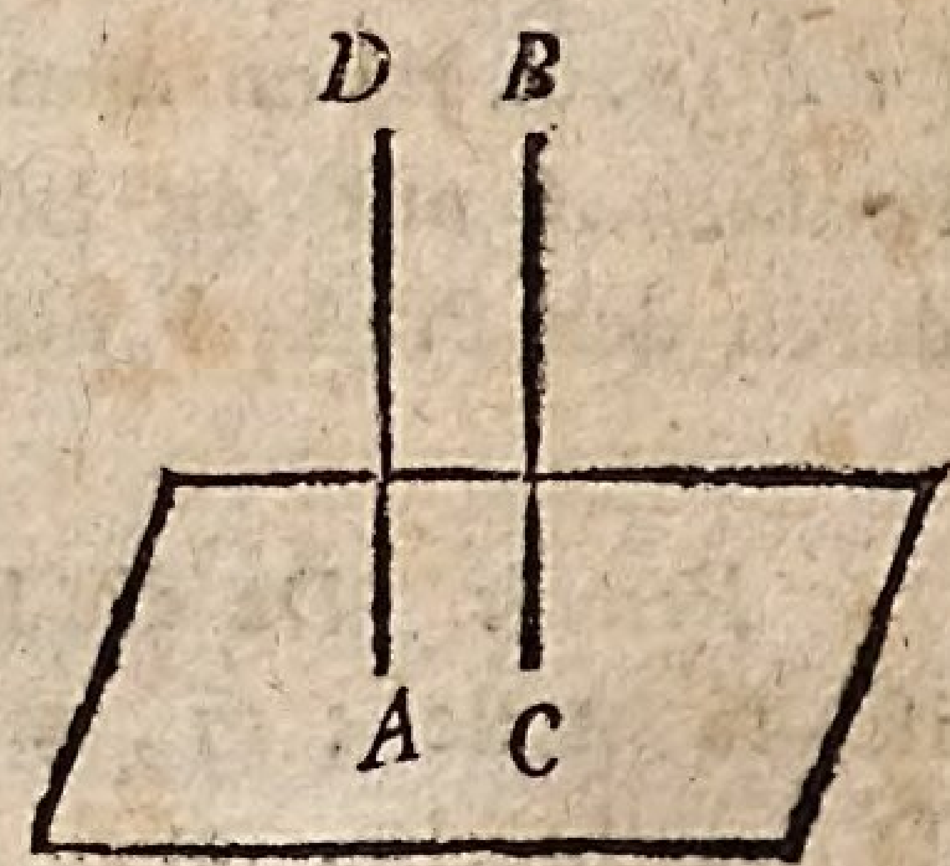
Beweis. Da die B C auf den beyden D *A*, DE lothrecht ist, so ist sie (11, 4. S.) auch auf der Ebene durch ED, D A lothrecht, auch ist sie der G H parallel. Wenn aber zwey gerade Linien parallel sind, und es ist die eine von ihnen auf einer Ebene lothrecht, so ist (11, 8. S.) auch die andere auf derselben Ebene lothrecht; folglich ist auch die G H auf der Ebene durch E D, *D* B, und mithin (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, lothrecht. Es berührt aber die AF die GH, und ist in der Ebene durch ED, *D* A; folglich ist die G H auf der F *A*, und mithin auch die F A auf der G H, lothrecht. Es ist aber auch die A F auf der D E lothrecht; folglich ist die A F auf den beyden GH, *D* E lothrecht. Wenn aber eine gerade Linie auf zwey andern, die einander berühren, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte lothrecht ist, so ist sie (11, 4. S.) auch auf der Ebene durch diese beyden lothrecht; folglich ist die F A auf der Ebene durch E D, G H lothrecht. Die Ebene durch ED, G H aber ist die vorliegende; folglich ist die A F auf der vorliegenden Ebene lothrecht.

Demnach ist von dem gegebenen Punkte A über der Ebene das Loth *AF* auf die vorliegende Ebene gefällt worden, w. z. v. w.

12. *Saz*.

Aufgabe. Auf einer gegebenen Ebene in einem auf derselben gegebenen Punkte ein Loth aufzurichten.

Es sey die gegebene Ebene die vorliegende, der in ihr gegebene Punkt sey A, man soll in dem Punkte A auf der vorliegenden Ebene ein Loth aufrichten.



Auflösung Man nehme einen Punkt B über der Ebene an, und fälle (11, 11. S.) von diesem auf die vorliegende Ebene das Loth BC, alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt A mit der B C die A B parallel.

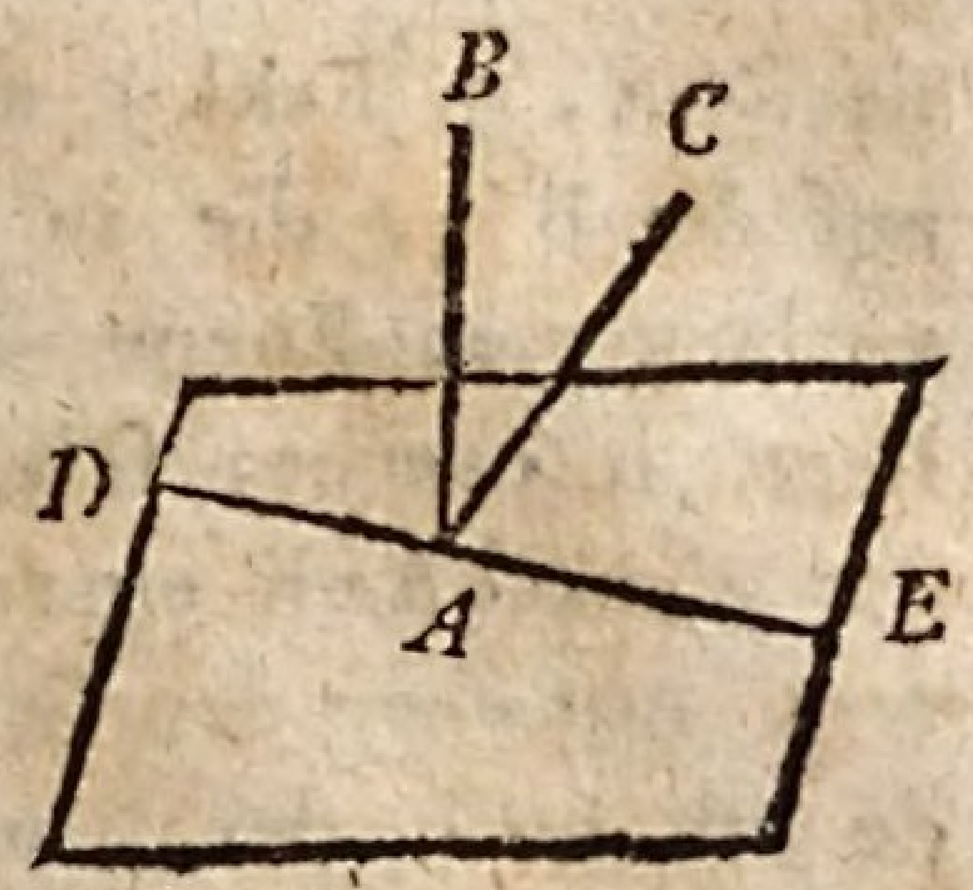
Beweis. Da nun die zwey geraden Linien AD, BC parallel sind, uud die eine von ihnen *B*C auf der vorliegenden Ebene lothrecht ist, so ist (11, 8. S.) auch die andere auf der vorliegenden Ebene lothrecht.

Demnach ist auf der gegebenen Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte ein Loth errichtet worden, w. z. v. w.

13. *Saz*.

Lehrsaz. Auf einerley Ebene können in einerley Punkte nicht zwey gerade Linien auf einerley Seite lothrecht errichtet werden.

Beweis. Gesezt, dies wäre möglich, so errichte man auf die gegebene Ebene in dem Punkte A derselben die zwey geraden Linien *A*B, A C, lothrecht, und lege die Ebene durch BA, *A*C, welche die vorliegende Ebene (11, 3. S.)



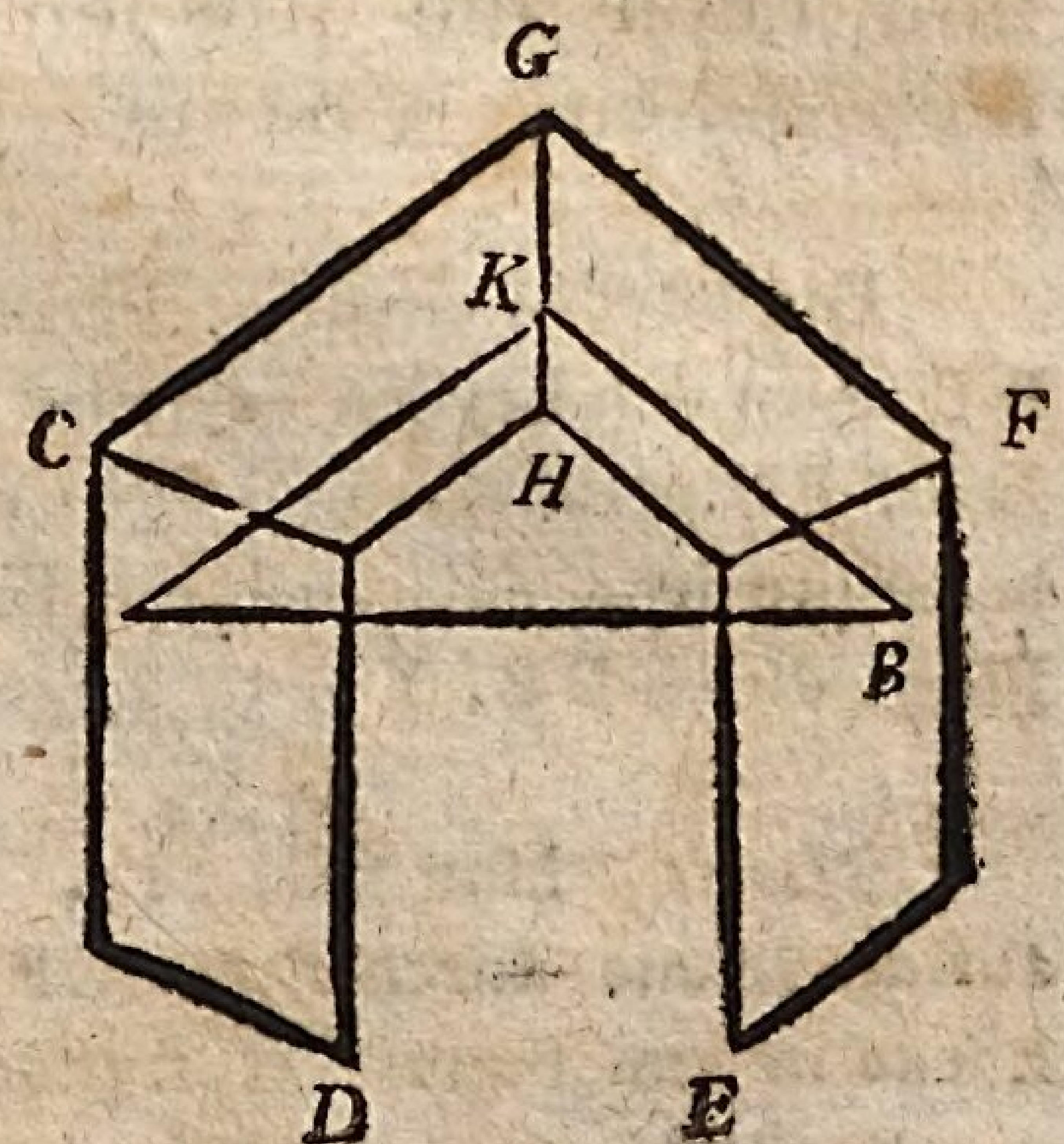
S.) in einer geraden Linie durch den Punkt A schneiden wird. Sie schneide sie in der Linie DAE, so liegen die Linien AB, AC, DAE in *einer* Ebene. Weil aber die CA auf der vorliegenden Ebene lothrecht ist, so macht sie (11, 3. Erkl.) mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel. Es berührt aber die gerade Linie DAE die CA in der vorliegenden Ebene; folglich ist der Winkel CAE ein rechter. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel BAE ein rechter; folglich ist der Winkel CAE dem BAE gleich, und beyde sind in *einer* Ebene, welches (9. Grunds.) unmöglich ist.

Demnach können auf einerley Ebene in einerley Punkte u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

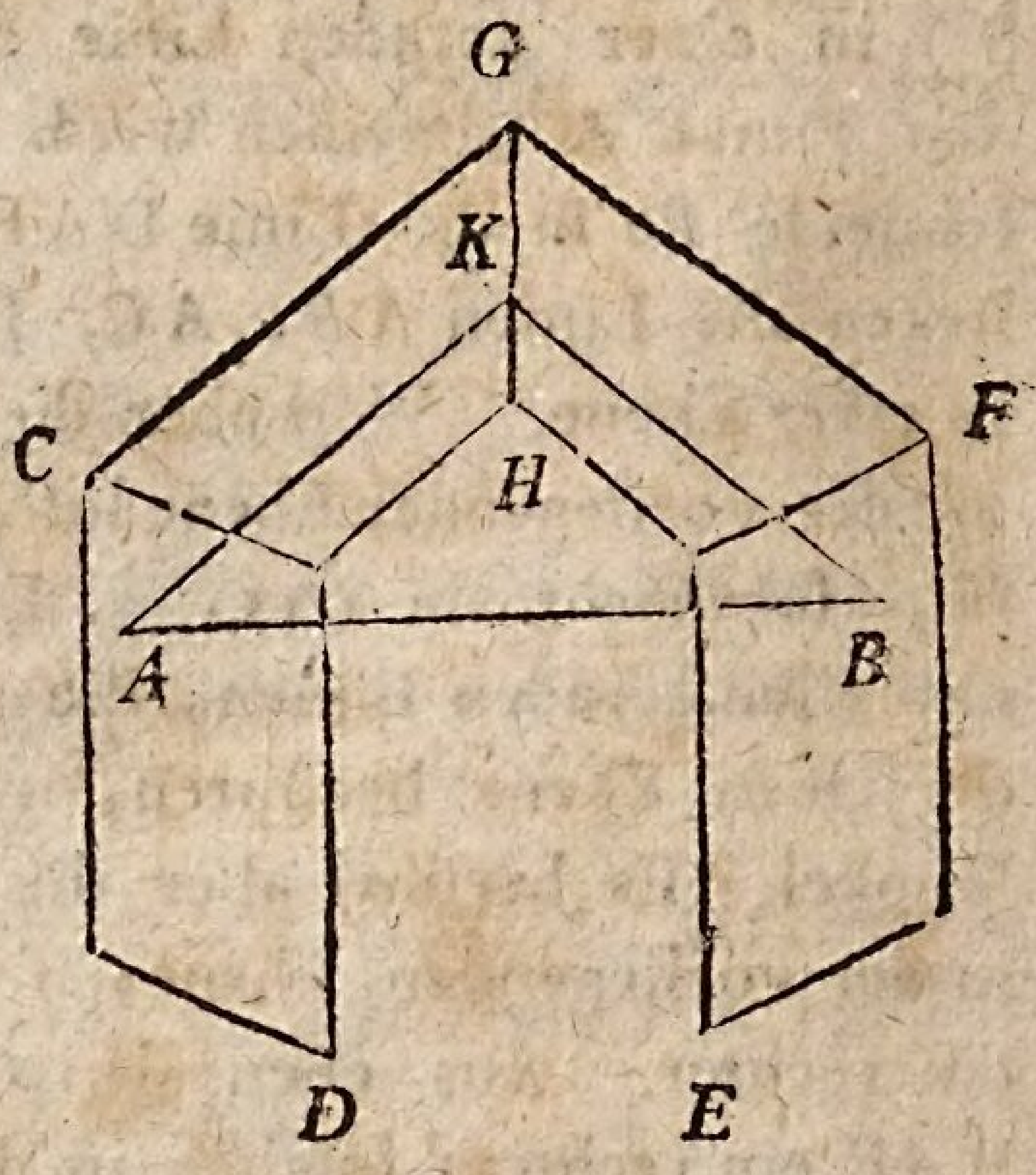
Lehrsaz. Ebenen, auf welchen einerley gerade Linie lothrecht ist, sind parallel.

Es sey auf den beyden Ebenen CD, EF die Linie AB lothrecht, so behaupte ich, dass diese Ebenen parallel seyen.



Beweis. Wäre dies nicht, so müssten sie verlängert zusammentreffen. Sie treffen also zusammen; alsdann haben sie (11, 3. S.) zum gemeinschaftlichen Durchschnitte eine gerade Linie. Es sey diese die GH, so nehme man in derselben den Punkt K an, und ziehe die AK, BK. Da nun die AB auf der Ebene EF lothrecht ist, so ist

sie



sie (11, 3. Erkl.) auch auf der BK, die in der verlängerten Ebene EF liegt, lothrecht; folglich der Winkel ABK ein rechter. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel BAK ein rechter, und mithin sind die zwey Winkel ABK, BAK zwey rechten gleich, welches (1, 17. S.) unmöglich ist; folglich treffen die Ebenen CD, EF verlängert nicht zusammen, und mithin ist CD der EF parallel.

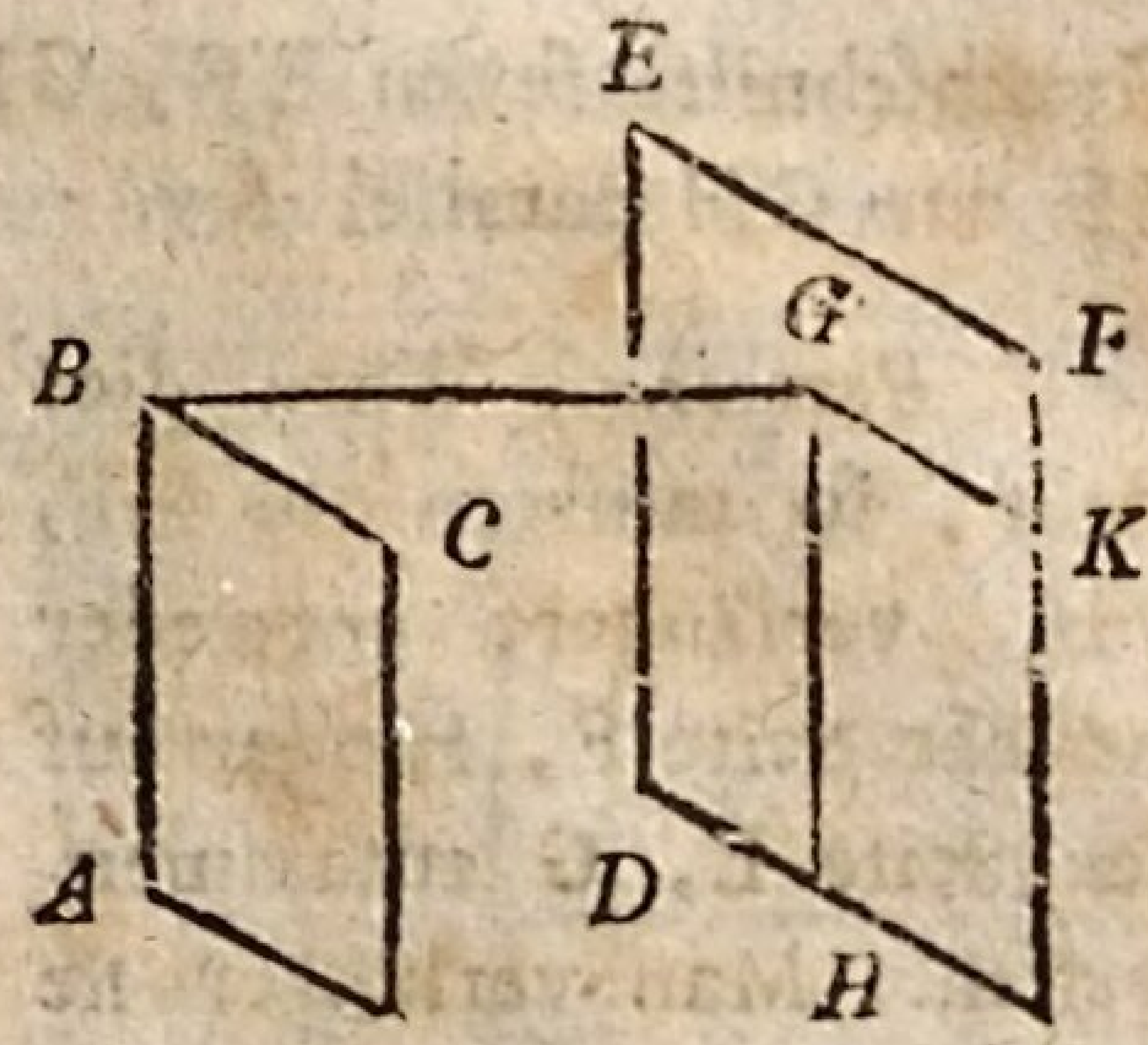
Demnach sind Ebenen u. s. w. w. z. e. w.

15. Saz.

Lehrsaz. Wenn zwey einander berührende gerade Linien zwey andern einander berührenden geraden Linien parallel sind, und nicht mit ihnen in *einer* Ebene liegen, so sind auch die Ebenen, die durch diese Linien gehen, einander parallel.

Die beyden einander berührenden geraden Linien AB, BC seyen den beyden einander berührenden geraden Linien DE, EF parallel, und nicht mit ihnen in *einer* Ebene, so behaupte ich, dass auch die Ebene durch AB, BC mit der Ebene durch DE, EF verlängert nicht zusammentreffe.

Beweis. Man fälle (11, 11. S.) von dem Punkte B auf die Ebene durch DE, EF das Loth BG, welches die Ebene in dem Punkte G treffe, hierauf ziehe man durch den Punkt G (1, 31. S.) der ED die GH, und der EF die GK parallel. Da nun die BG auf der Ebene durch ED, EF



EF lothrecht ift, fo macht fie (11, 3. Erkl.) mit allen geraden Linien die fie in derfelben Ebene berühren, rechte Winkel. Es berühren fie aber die beyden GH, GK, welche in der Ebene durch *D* E, EF liegen; folglich ift jeder der Winkel *B*GH, BGK ein rechter. *D*a nun die BA der GH parallel ift, fo find (1, 29. S.) die Winkel GBA, BGH zwey rechten gleich. Der Winkel *B*GH aber ift ein rechter; folglich ift auch der Winkel G*B*A ein rechter, und mithin die GB auf der *BA* lothrecht. Aus eben dem Grunde ift auch die BG auf der BC lothrecht. Da nun die Linie BG auf den beyden einander fchneidenden Linien BA, BC lothrecht ift, fo ift (11, 4. S.) die BG auch auf der Ebene durch AB, *B*C lothrecht. Sie ift aber auch auf der Ebene durch *D*E, EF lothrecht, folglich ift die BG auf den beyden Ebenen, die durch *AB*, B*C*, und durch *D*E, EF gehen, lothrecht. Ebenen aber, auf welchen einerley gerade Linie lothrecht ift, find (11, 14. S.) parallel; folglich ift die Ebene durch *AB*, BC der Ebene durch E*D*, EF, parallel.

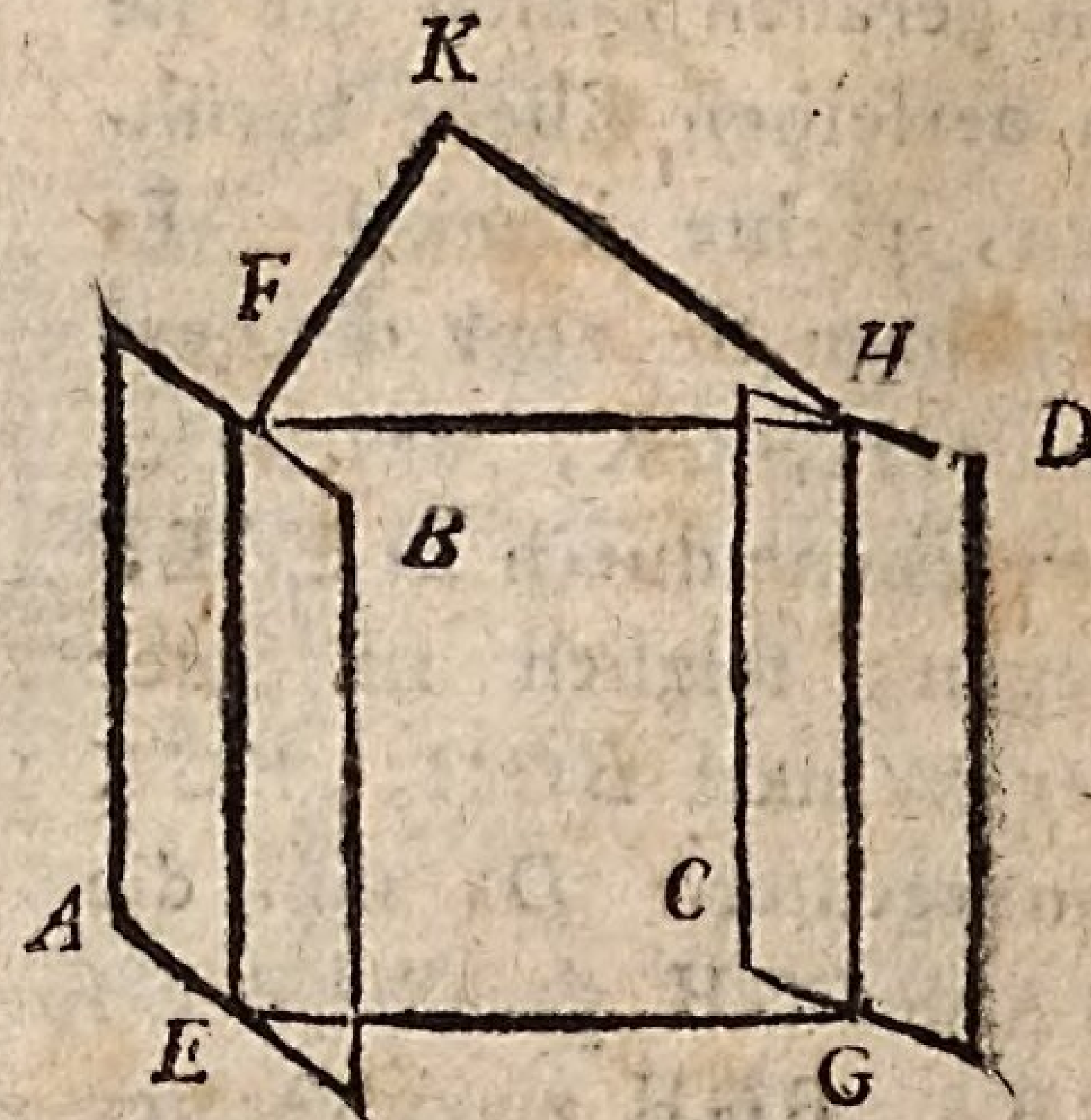
Wenn demnach zwey gerade Linien u. f. w. w. z. e. w.

16. *Saz.*

Aufgabe. Wenn zwey parallele Ebenen von einer Ebene gefchnitten werden, fo find ihre gemeinfchaftlichen Durchfchnitte auch parallel.

Die zwey parallelen Ebenen *AB*, C*D* werden von der Ebene EFGH gefchnitten, und ihre gemeinfchaftlichen *D*urch-

Durchschnitte seyen EF, GH, so behaupte ich, daſs die EF der GH parallel sey.



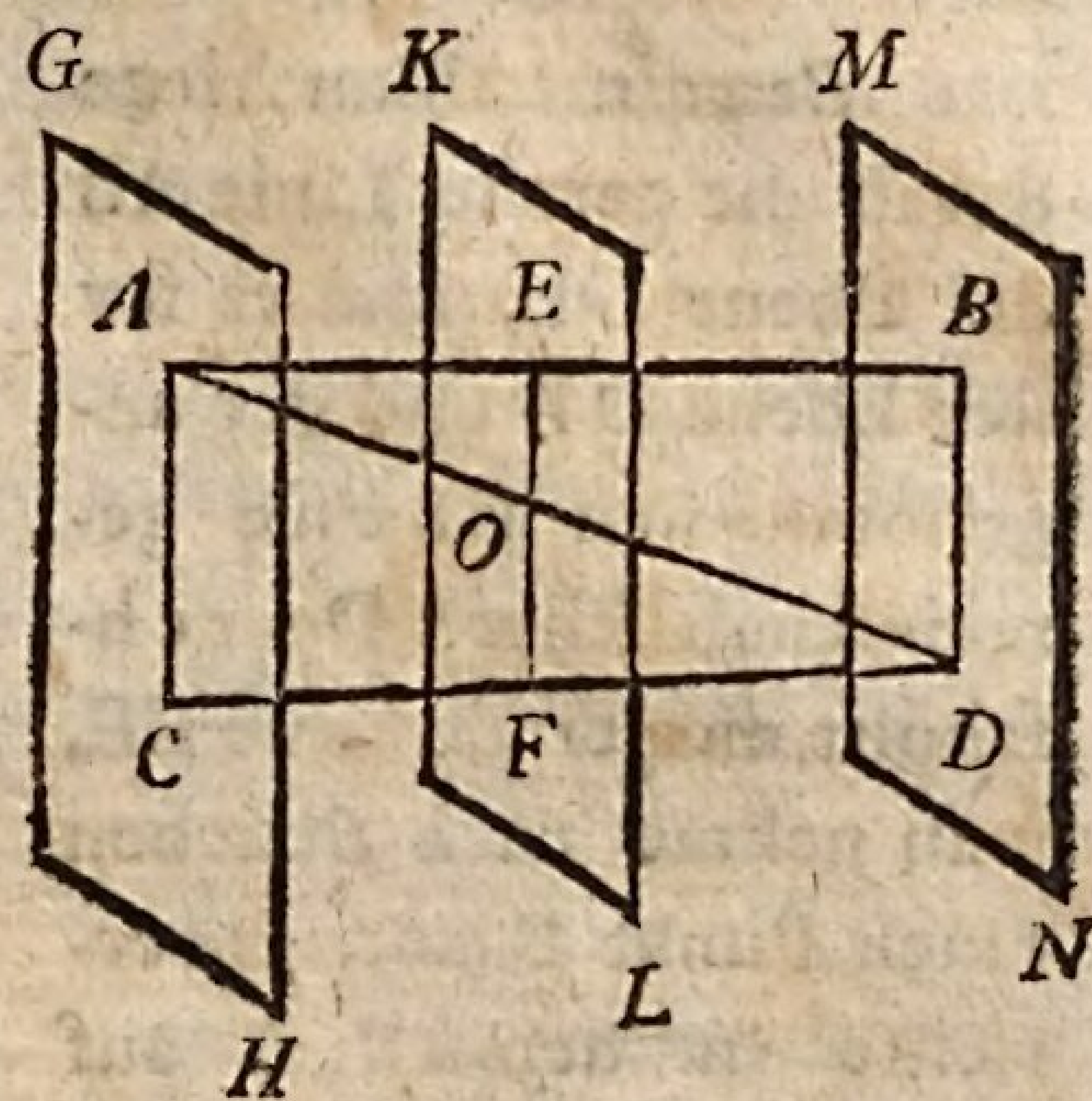
Beweis. Wäre dies nicht, so müſsten die EF, GH, verlängert entweder auf der Seite F, H oder auf der Seite E, G zusammentreffen. Man verlängere sie zuerst nach der Seite F, H zu, und sie treffen in dem Punkte K zusammen. Da nun die EFK in der Ebene AB liegt, so liegen auch alle Punkte, die man in der EFK annehmen mag, in derselben Ebene. Einer von den Punkten in der Linie EFK ist nun der Punkt K; folglich liegt der Punkt K in der Ebene AB. Aus eben dem Grunde liegt der Punkt K auch in der Ebene *CD*; folglich treffen die Ebenen AB, *CD* verlängert zusammen. Sie treffen aber nicht zusammen, da sie nach der Voraussezung, parallel sind; folglich treffen die Linien EF, GH an der Seite F, H verlängert nicht zusammen. Eben so kann aber gezeigt werden, daſs die Linien EF, GH auch an der Seite E, G verlängert nicht zusammentreffen. Linien aber, die an keiner Seite zusammentreffen, sind (1, 35. Erkl.) parallel; folglich ist die EF der GH parallel.

Wenn demnach zwey parallele Ebenen u. s. w. w. z. e. w.

17. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von parallelen Ebenen geschnitten werden, so werden sie nach einerley Verhältnisse geschnitten.

Die beyden geraden Linien AB, CD werden von den parallelen Ebenen GH, KL, MN in den Punkten A, E, B, C, F, D, geschnitten, so behaupte ich, dass die Linie AE zu der EB sich verhalte wie die CF zu der FD.



Beweis. Man ziehe die AC, BD, AD, und die AD begegne der Ebene KL in dem Punkte O, so ziehe man noch die EO, OF.

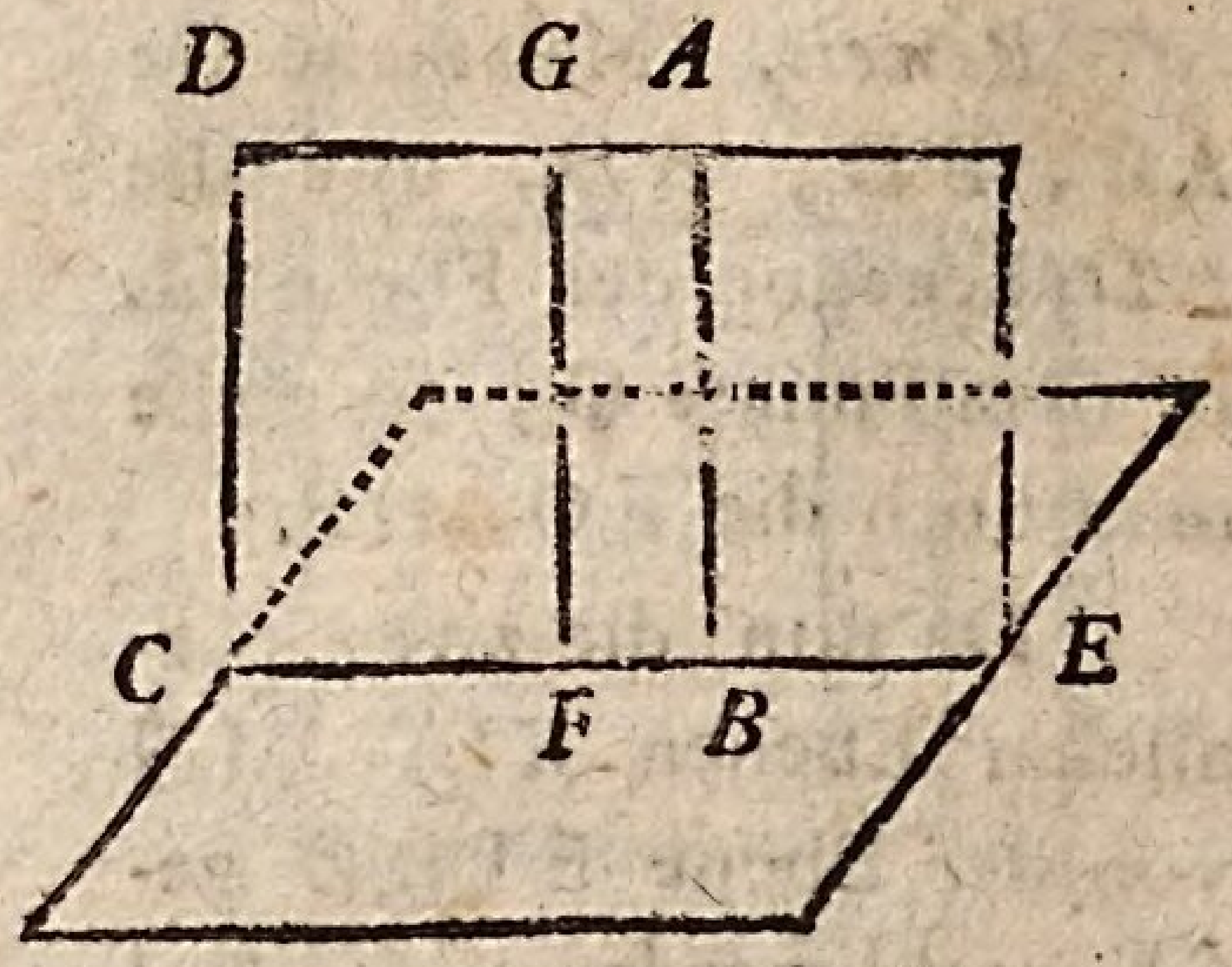
Da nun die zwey parallelen Ebenen KL, MN von der Ebene EBDO geschnitten werden, so sind (11, 16. S.) ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte EO, BD parallel. Aus eben den Gründen sind, da die beyden parallelen Ebenen GH, KL von der Ebene AOFC geschnitten werden, ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte AC, FO parallel. Da nun mit der Seite BD des Dreyecks ABD die EO parallel gezogen ist, so verhält sich (6, 2. S.) die AE zu der EB wie die AO zu der OD. Da ferner mit der Seite AC des Dreyecks ADC die OF parallel gezogen ist, so verhält sich die AO zu der OD wie die CF zu der OD wie die CF zu der FD. Es ist aber gezeigt worden, dass die AO zu der OD sich verhalte wie die AE zu der EB; folglich verhält sich (5, 11. S.) die AE zu der EB wie die CF zu der FD.

Wenn demnach zwey gerade Linien von parallelen Ebenen geschnitten werden u. s. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht ist, so sind auch alle Ebenen, die durch sie gehen, auf der nämlichen Ebene lothrecht.

Es sey die gerade Linie AB auf der angenommenen Ebene lothrecht; so behaupte ich, dass auch alle Ebenen, die durch die AB gehen, auf der angenommenen Ebene lothrecht seyen.



Beweis. Man lege durch die gerade Linie AB die Ebene DE, und es sey der Ebene DE und der angenommenen Ebene gemeinschaftlicher Durchschnitt die gerade Linie CE, man nehme nach Belieben einen Punkt F an, und errichte in demselben auf der CE in der Ebene DE die FG lothrecht.

Da nun die AB auf der angenommenen Ebene lothrecht ist, so ist sie (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in der angenommenen Ebene berühren, lothrecht; folglich ist sie auch auf der CE lothrecht, und mithin ist der Winkel ABF ein rechter. Aber auch der Winkel GFB ist ein rechter; folglich (1, 28. S.) die AB der FG parallel. Es ist aber die AB auf der angenommenen Ebene lothrecht; folglich ist (11, 8. S.) auch die FG auf eben der Ebene lothrecht. Aber (11, 4. Erkl.) ist eine Ebene auf einer andern lothrecht, wenn alle auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte in der einen Ebene lothrecht errichteten geraden Linien auch auf der andern Ebene lothrecht sind. Nun ist aber von der Linie FG, die auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte CE der beyden Ebenen, in der einen Ebene DE lothrecht errichtet ist, gezeigt worden, dass sie auf der angenommenen Ebene lothrecht sey; folglich ist die Ebene DE lothrecht auf der angenommenen Ebene. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass auch alle Ebenen, die durch die Linie AB gehen, auf der angenommenen Ebene lothrecht seyen.

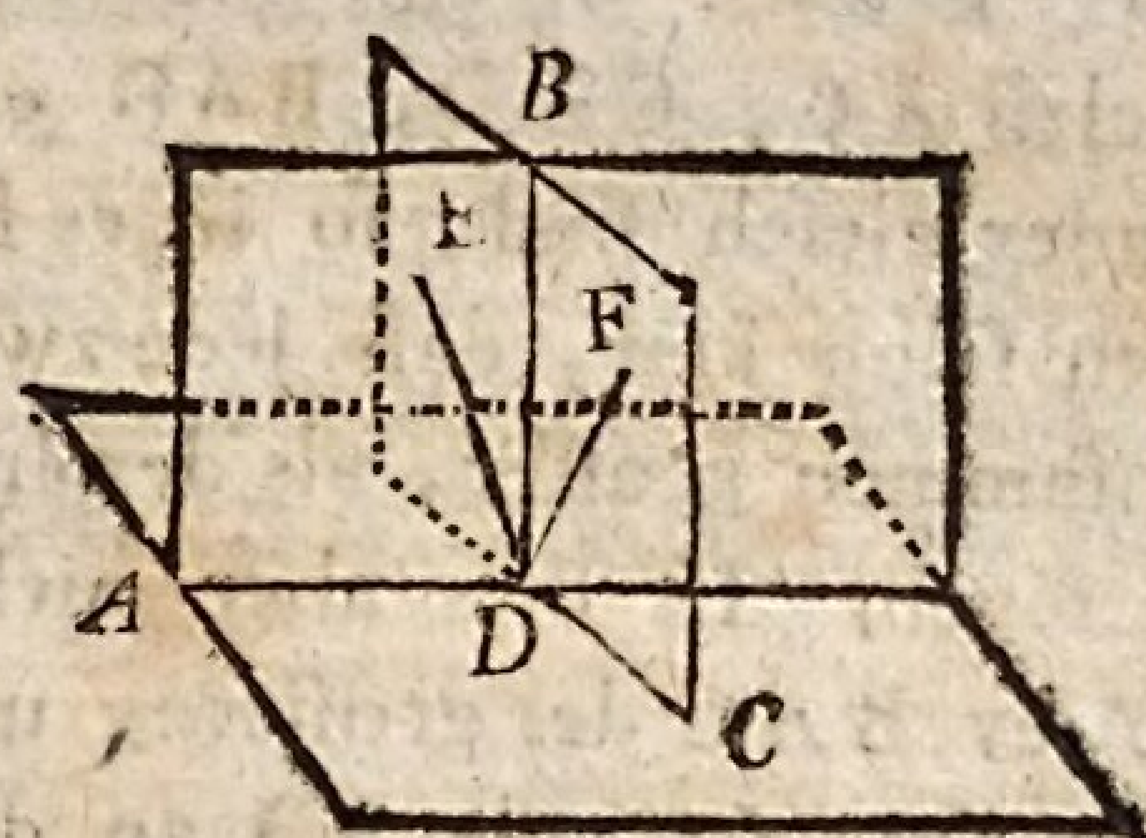
Wenn demnach eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht ist, u. s. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

19. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey einander ſchneidende Ebenen auf einer Ebene lothrecht ſind, ſo iſt ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt auf der nämlichen Ebene lothrecht.

Die zwey einander ſchneidenden Ebenen A*B*, BC ſeyen auf der angenommenen Ebene lothrecht, und ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt ſey B*D*, ſo behaupte ich, daſs die Linie BD auf der angenommenen Ebene lothrecht ſey.



Beweis. Geſezt, dies wäre nicht, ſo errichte man (1, 11. S.) in dem Punkte D auf der Linie A*D* in der Ebene AB die DE, in der Ebene BC aber auf der Linie CD die DF lothrecht.

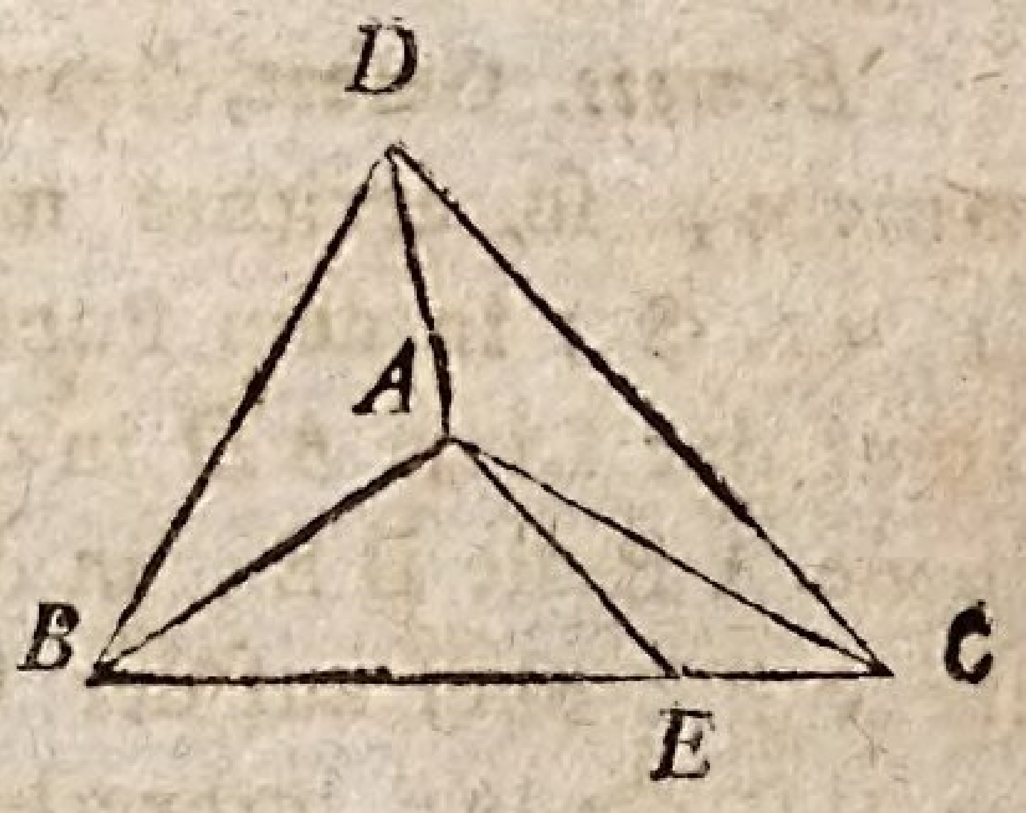
Da nun die Ebene A*B* auf der angenommenen Ebene lothrecht iſt, und auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte A*D* derſelben in der Ebene AB die Linie DE lothrecht errichtet worden, ſo iſt die *D*E auf der angenommenen Ebene lothrecht. Auf eben die Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die DF auf der angenommenen Ebene lothrecht ſey; folglich ſind auf der angenommenen Ebene in einerley Punkte D an einerley Seite zwey gerade Linien lothrecht errichtet worden, welches (11, 13. S.) unmöglich iſt. Demnach ſind in dem Punkte D auf der angenommenen Ebene keine andere gerade Linien lothrecht, als der gemeinſchaftliche *D*urchſchnitt *D*B der Ebenen AB, BC.

Wenn demnach zwey Ebenen, die einander ſchneiden u. ſ. w. w. z. e. w.

20. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein körperlicher Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen wird, so sind jede zwey zusammen grösser, als der dritte, wie man sie auch zusammen nehmen mag.

Der körperliche Winkel bey A werde von den drey ebenen Winkeln BAC, CAD, BAD eingeschlossen, so behaupte ich, dass von den Winkeln BAC, CAD, BAD jede zwey zusammengenommen grösser, als der dritte, seyen.



Beweis. Wenn die Winkel BAC, CAD, BAD einander gleich sind, so ist es für sich selbst klar, dass jede zwey zusammen grösser, als der dritte seyen. Ist dies aber nicht, so sey BAC der grössere, und man seze (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie AB, in der Ebene durch den Winkel BAC, den Winkel BAE, der dem Winkel DAB gleich sey, und mache (1, 3. S.) die AD der AE gleich. Hierauf ziehe man durch den Punkt E die Linie BEC, welche die Linien BA, AC in den Punkten B, C schneide, endlich ziehe man noch die DB, DC. Da nun die DA der AE gleich, die AB aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DA, AB den beyden AE, AB gleich, auch ist der Winkel DAB dem Winkel BAE gleich; folglich ist (1, 4. S.) die Grundlinie DB der Grundlinie BE gleich. Da nun ferner die zwey Linien DB, DC grösser sind, als die BC, und gezeigt worden ist dass die DB der BE gleich sey, so ist auch der Rest DC grösser, als der Rest EC. Da aber die DA der AE gleich, und die AC gemeinschaftlich ist, auch die Grundlinie DC grösser ist, als die Grundlinie EC, so ist (1, 25. S.) der Winkel DAC grösser, als der Winkel EAC. Es ist aber auch gezeigt worden, dass der Winkel DAB dem Winkel BAE gleich sey; folglich sind die

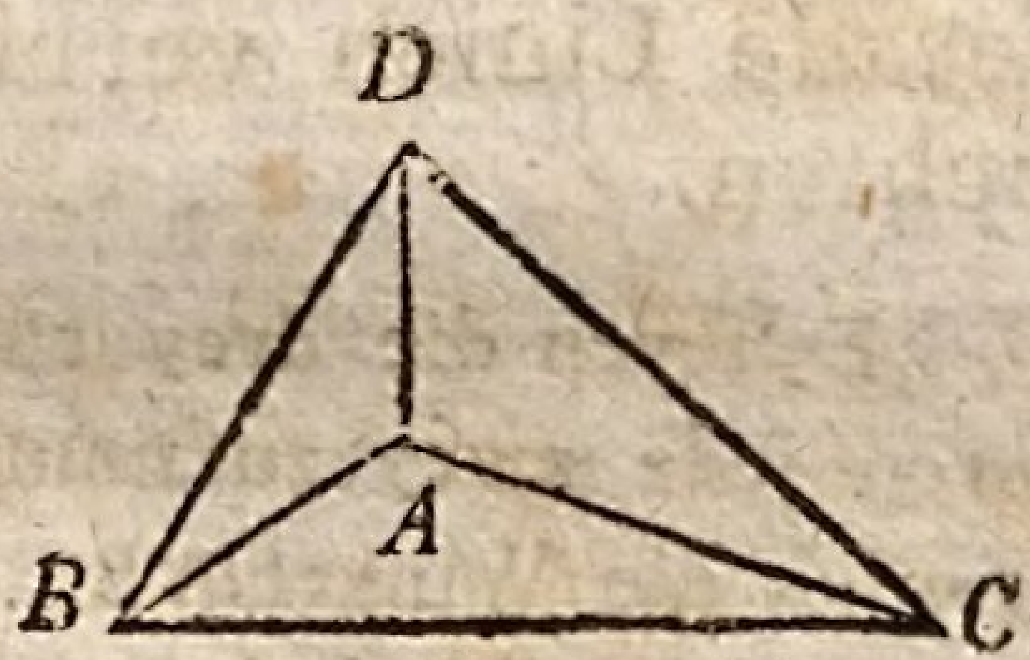
die Winkel DAB, DAC gröſſer, als der Winkel *B* A C. Auf gleiche *A*rt kann nun von jeden zwey andern, wie man ſie auch zuſammen nehmen mag, gezeigt werden, daſs ſie zuſammen gröſſer, als der dritte, ſeyen.

Wenn demnach ein körperlicher Winkel von drey ebenen Winkeln eingeſchloſſen wird u. ſ. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

Lehrſaz. Ieder körperliche Winkel wird von ebenen Winkeln eingeſchloſſen, die zuſammen weniger, als vier rechte, betragen.

Es ſey der körperliche Winkel bey A von den ebenen Winkeln *B*AC, CAD, D*A*B eingeſchloſſen, ſo behaupte ich, daſs die Winkel B*A*C, CAD, DAB kleiner, als vier rechte, ſeyen.



Beweis. Man nehme auf den Linien AB, *A*C, *A*D nach Belieben die Punkte B, C, D, und ziehe die Linien *B*C, C*D*, DB. Da nun der körperliche Winkel bey B von den drey ebenen Winkeln CBA, ABD, CB*D* eingeſchloſſen wird, ſo ſind (11, 20. S.) von dieſen jede zwey zuſammen gröſſer, als der dritte; folglich ſind die Winkel CBA, ABD zuſammen gröſſer, als der Winkel CBD. Aus ebenden Gründen ſind auch die Winkel BCA, ACD gröſſer, als der Winkel BCD, und die Winkel CDA, *A D*B gröſſer, als der Winkel CDB; folglich ſind die ſechs Winkel CBA, ABD, BC*A*, ACD, ADC, ADB gröſſer, als die drey Winkel CBD, BCD, CDB. *A*ber die drey Winkel CBD, *B*CD, CDB ſind (1, 32. S.) zwey rechten gleich; folglich ſind die ſechs Winkel CBA, *A*BD, BCA, AC*D*, *A D*C, ADB gröſſer, als zwey rechte. Da aber in jedem der *D*reyecke *A B*C, ACD, ADB die drey Winkel zuſammen zwey rechten gleich

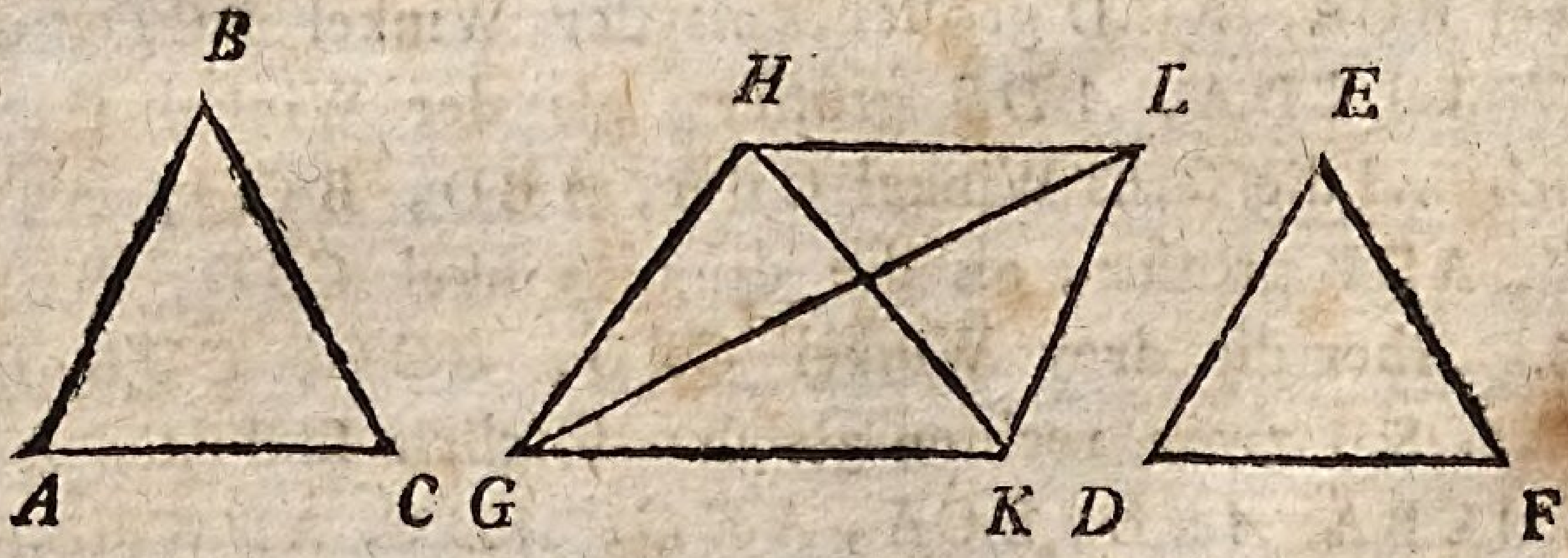
ſind; ſo ſind in allen drey Dreyecken die neun Winkel, CBA, ACB, BAC, ACD, DAC, CDA, ADB, DBA, BAD ſechs rechten Winkeln gleich. Von dieſen aber ſind die ſechs Winkel ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA gröſſer, als zwey rechte; folglich ſind die drey übrigen Winkel BAC, CAD, DAB, die den körperlichen Winkel einſchlieſſen, kleiner, als zwey rechte.

Demnach wird jeder körperliche Winkel u. ſ. w. w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn man drey ebene Winkel hat, deren jede zwey zuſammen gröſſer, als der dritte, ſind, und dieſe von gleichen geraden Linien eingeſchloſſen werden, ſo iſt es möglich aus den Linien, welche jene gleiche gerade Linien verbinden, ein Dreyeck zu errichten.

Es ſeyen die drey ebenen Winkel ABC, DEF, GHK deren jede zwey zuſammen gröſſer, als der dritte, ſeyen, nämlich die Winkel ABC, DEF gröſſer, als der Winkel GHK, die Winkel DEF, GHK gröſſer, als der Winkel ABC, und die Winkel GHK, ABC gröſſer, als der Winkel DEF, und es ſeyen die geraden Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK einander gleich, und man ziehe die AC, DF, GK, ſo behaupte ich, es ſey möglich aus Linien, die



den dreyen AC, DF, GK gleich ſind, ein Dreyeck zu errichten

richten

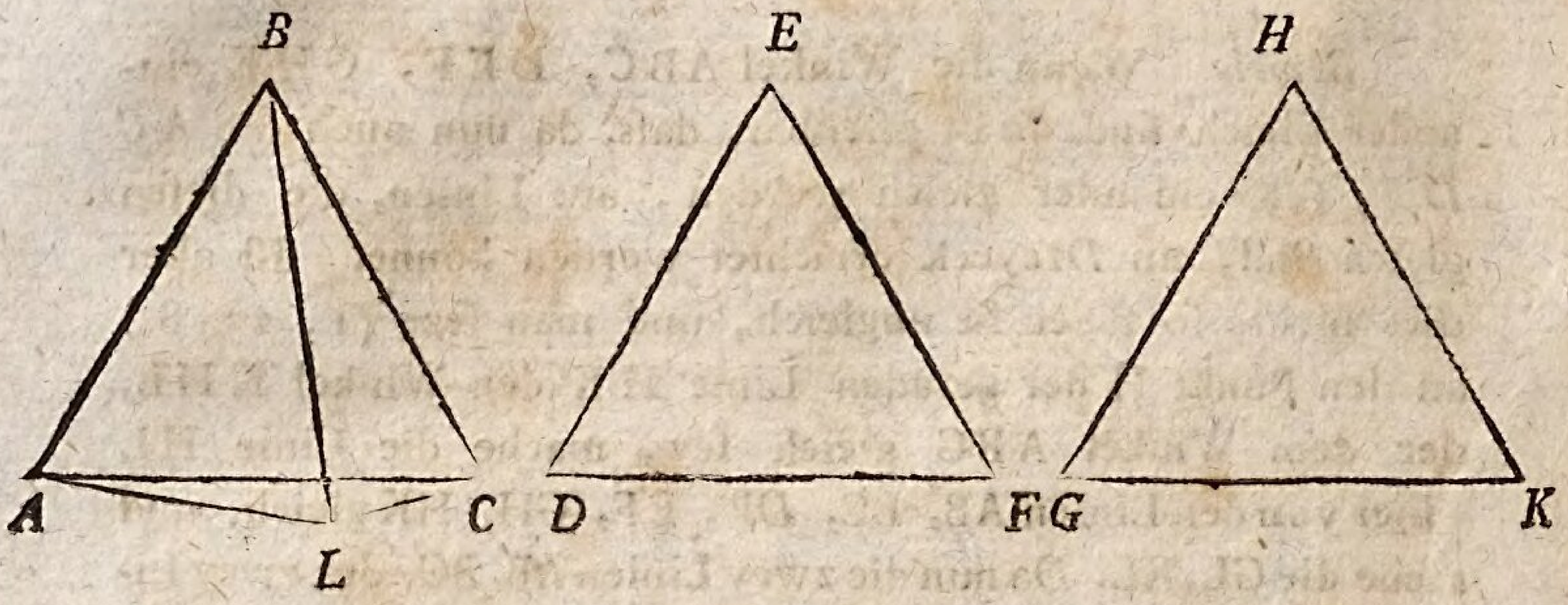
richten, das heifst, von den Linien A C, *D* F, G K, feyen jede zwey zufammen gröffer, als die dritte.

Beweis. Wenn die Winkel AB C, D E F, G H K einander gleich find, fo ift offenbar, dafs, da nun auch die A *C* *D* F, G K einander gleich werden, aus Linien, die diefen gleich find, ein *D*reyeck errichtet werden könne. Ift aber dies nicht, fo feyen fie ungleich, und man feze (1, 23. S.) an den Punkt H der geraden Linie H K den Winkel K H L, der dem Winkel A B C gleich fey, mache die Linie H L einer von den Linien AB, BC, *D*E, EF, GH, HK gleich, und ziehe die GL, KL. *D*a nun die zwey Linien AB, BC, den zwey Linien KH, HL gleich find, und der Winkel bey B dem Winkel KHL gleich ift, fo ift (1, 4. S.) auch die Grundlinie A C der Grundlinie K L gleich. *D*a ferner die Winkel A *B* C, G H K gröffer find, als der Winkel D E F, der Winkel A B C aber dem Winkel K H L gleich ift, fo ift der Winkel G H L gröffer, als der Winkel D E F. Da ferner die zwey Seiten GH, H L den zwey Seiten *D*E, E F gleich find, aber der Winkel G H L gröffer ift, als der Winkel E, fo ift (1, 24. S.) die Grundlnie G L gröffer, als die Grundlinie D F. Aber (1, 20. S.) find die G K, K L gröffer, als die G L; folglich find noch vielmehr die G K, K L gröffer, als die D F. Es ift aber die K L der A C gleich; folglich find auch die A C, G K gröffer, als die D F. Auf eben die Art kann nun gezeigt werden, dafs auch die AC, DF gröffer, als die GK, die GK, D F aber gröffer, als die A C feyen; folglich ift es (1, 22. S.) möglich, aus Linien die den dreyen A C, D F, G K gleich find, ein Dreyeck zu errichten.

Anderer Beweis.

Es feyen die drey gegebenen ebenen Winkel A B C, D E F, G H K, deren jede zwey zufammen gröffer, als der dritte, feyen, fie werden von den gleichen geraden Linien A B, B C, D E, E F, G H, H K eingefchloffen, und man ziehe die Linien A C, *D*F, G K, fo behaupte ich, es fey mög-

möglich aus Linien, die den dreyen AC, DF, GK gleich sind, ein Dreyeck zu errichten, das heisst wiederum, es seyen jede zwey derselben zusammen grösser, als die dritte.



Wenn wiederum die Winkel an den Punkten B, E, H einander gleich sind, so sind (1, 4. S.) auch die Linien AC, DF, GK einander gleich, und jede zwey derselben grösser, als die dritte. Ist dies aber nicht, so seyen die Winkel an den Punkten B, E, H ungleich, und der an dem Punkte B grösser, als jeder der beyden an den Punkten E, H; so ist (1, 24. S.) auch die Linie AC grösser, als jede der beyden DF, GK, und es erhellet also, dass die AC mit der einen der beyden DF, GK zusammen grösser, als die andere, sey. Ich behaupte aber, dass auch die DF, GK zusammen grösser, als die AC, seyen. Man seze (1, 23. S.) an den Punkt B der Linie AB den Winkel ABL, der dem Winkel GHK gleich sey, mache die BL einer der Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK gleich, und ziehe die AL, LC. Da nun die beyden AB, BL den beyden GH, HK stückweise gleich sind, und gleiche Winkel einschliessen, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AL der Grundlinie GK gleich. Und da die Winkel an den Punkten E, H grösser sind, als der Winkel ABC, der Winkel GHK aber dem Winkel ABL gleich ist, so ist der übrige Winkel an dem Punkte E grösser, als der Winkel LBC. Da ferner die zwey Seiten LB, BC den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich sind, der Winkel DEF aber grösser ist, als der Winkel LBC, so ist (1, 24. S.) die Grundlinie DF grösser, als die Grundlinie LC. Es ist aber von der GK ge-

gezeigt worden, daſs ſie der A L gleich ſey; folglich ſind die D F, G K zuſammen gröſſer, als die A L, L C zuſammen. Aber (1, 20. S.) ſind die AL, L C zuſammen gröſſer, als die A C; folglich ſind noch vielmehr die *D* F, G K zuſammen gröſſer, als die A C, und mithin von den drey Linien A C, D F, G K jede zwey zuſammen gröſſer, als die dritte; folglich iſt es (1, 22. S.) auch möglich, aus Linien, die den dreyen A C, D F, G K gleich ſind, ein Dreyeck zu errichten, w. z. e. w.

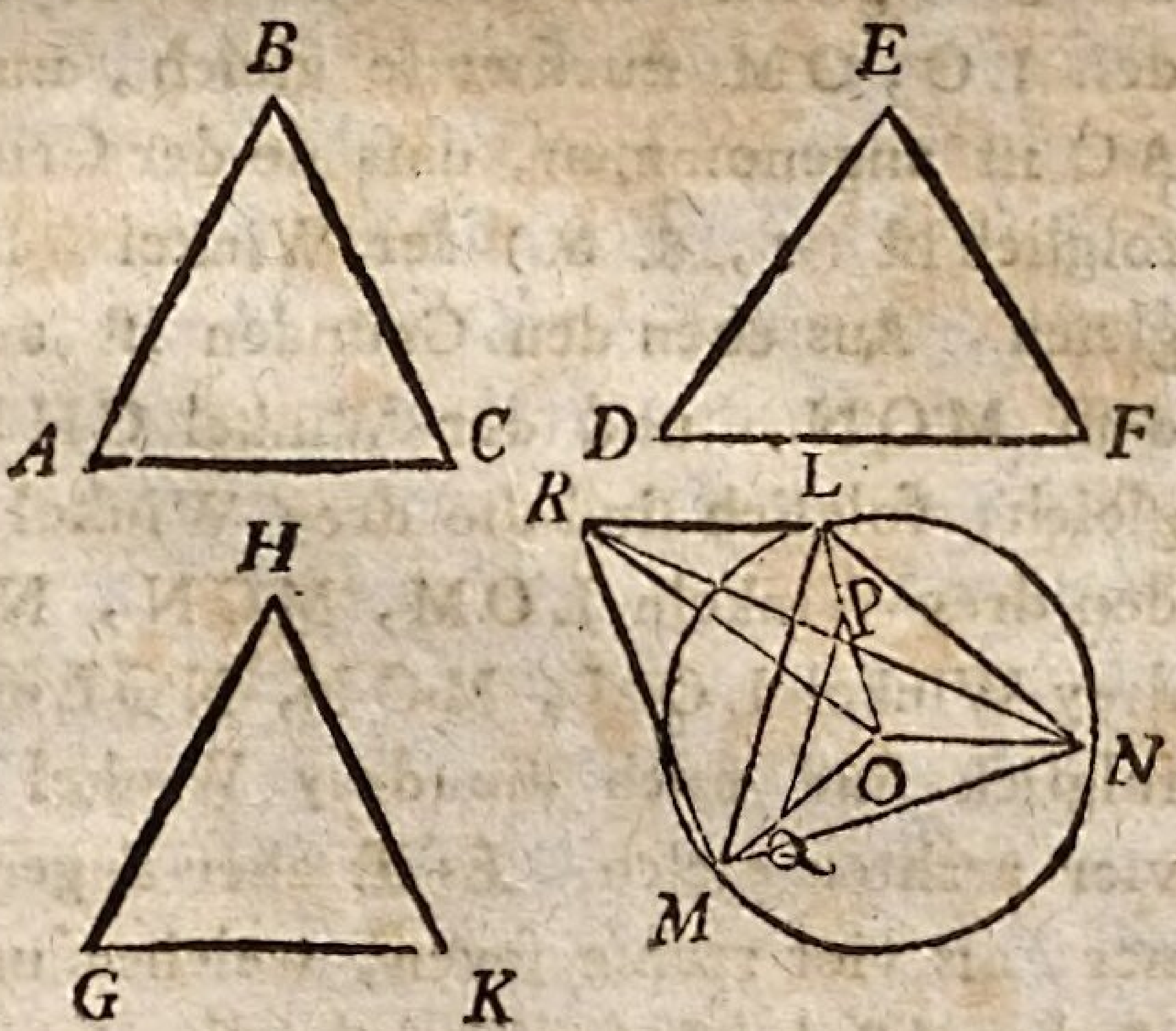
23. *Saz.*

Aufgabe. Aus drey ebenen Winkeln, die zuſammen kleiner, als vier rechte, und deren je zwey zuſammen gröſſer, als der dritte, ſind, einen körperlichen Winkel zu errichten.

Es ſeyen die drey gegebenen ebenen Winkel A B C, D E F, G H K, die zuſammen kleiner, als vier rechte, und deren je zwey zuſammen gröſſer, als der dritte, ſeyen, und man ſoll aus Winkeln die den dreyen A B C, D E F, G H K gleich ſind, einen körperlichen Winkel errichten.

Auflöſung.

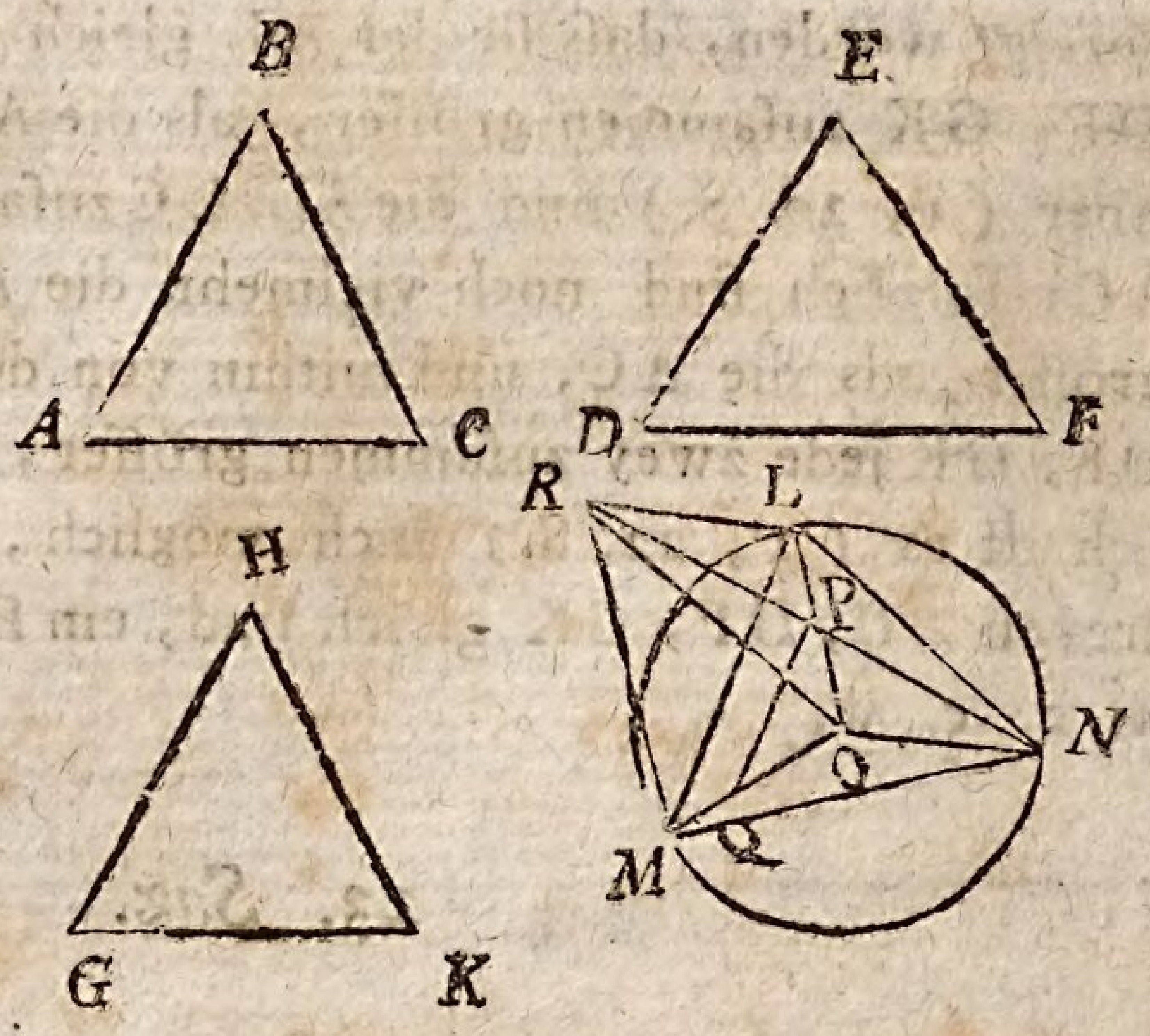
Man mache die AB, *B*C, DE, EF, GH, HK einander gleich, und ziehe die A C, DF, GK; ſo iſt es (11, 22. S.) möglich, aus Linien, die den dreyen *A C*, D F, GK gleich ſind, ein Dreyeck zu errichten.



Man verzeichne alſo (1, 22. S.) das Dreyeck LMN ſo, daſs der AC die LM, der *D*F aber die MN, und der GK die LN gleich ſey, alsdann beſchreibe man

(6,

(4, 5. S.) um das Dreyeck LMN den Kreis LMN, und nehme den Mittelpunkt dieses Kreises, welcher entweder innerhalb des Dreyecks LMN, oder auf eine seiner Seiten, oder ausserhalb desselben fällt.

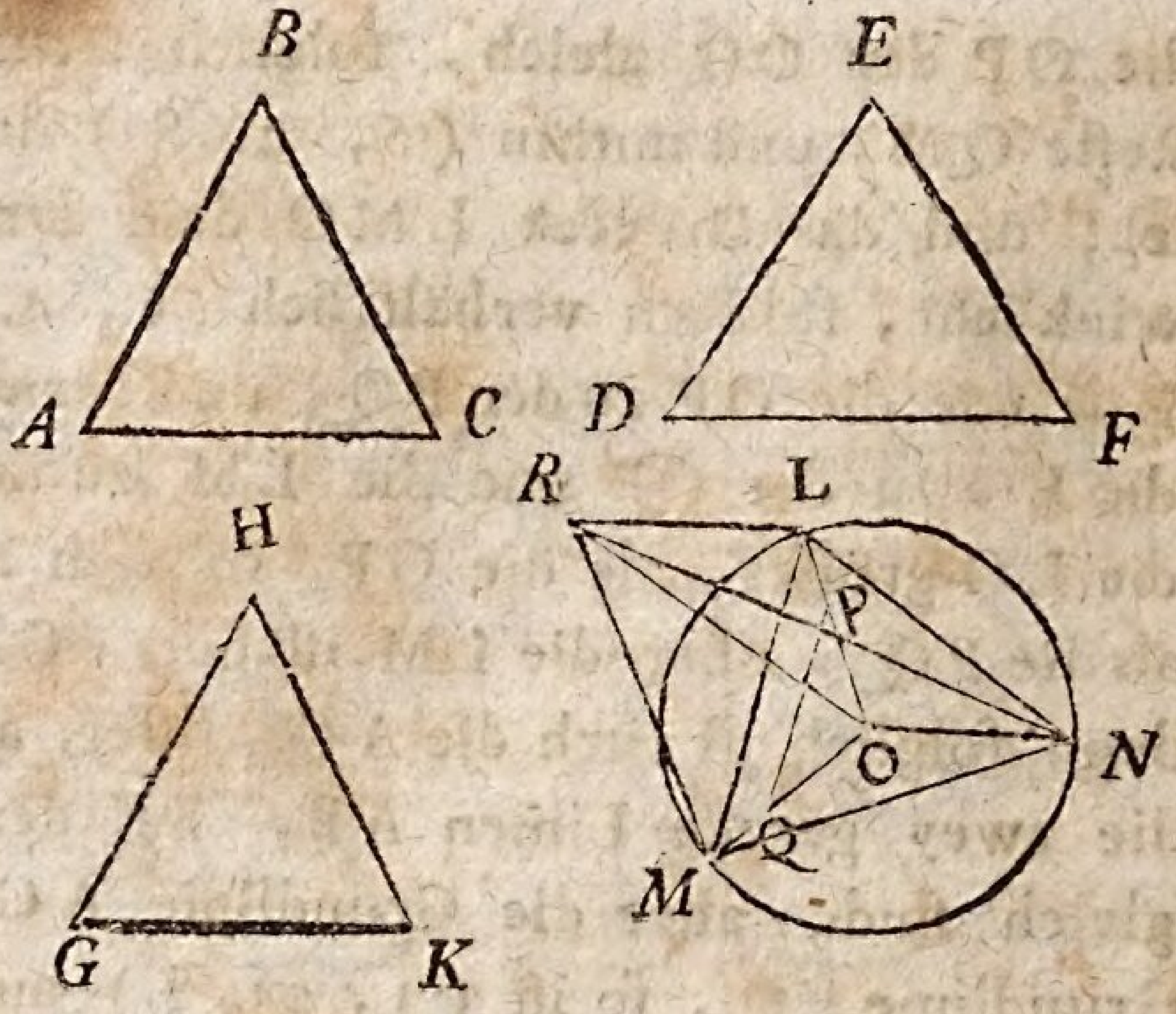


Er falle *zuerst* innerhalb, und sey O, so ziehe man die Linien LO, MO, NO und ich behaupte, dass die AB grösser, als die LO sey.

Wäre dies nicht, so wäre entweder die AB der LO gleich, oder kleiner, als sie. Sie sey ihr *zuerst* gleich. Da die AB der LO, aber auch die AB der BC gleich ist, so ist auch die LO der BC gleich. Es ist aber auch die LO der OM gleich; folglich sind die beyden *AB*, *BC* den beyden LO, OM stückweise gleich, und von der Grundlinie AC ist angenommen, dass sie der Grundlinie LM gleich sey; folglich ist (1, 8. S.) der Winkel ABC dem Winkel LOM gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel DEF dem MON, und der Winkel GHK dem Winkel NOL gleich; folglich sind die drey Winkel A*B*C, DEF, GHK den drey Winkeln LOM, MON, NOL gleich. Aber die drey Winkel LOM, MON, NOL sind vier rechten gleich; folglich sind auch die drey Winkel ABC, DEF, GHK vier rechten gleich. Es ist aber angenommen, dass sie kleiner, als vier rechte seyen, welches unmöglich ist; folglich ist die *A*B der LO nicht gleich. Ich behaupte aber ferner, dass auch die *A*B nicht kleiner, als die LO, sey. Denn gesezt, dies wäre möglich, so sey sie kleiner, und man mache der AB die OP, und der BC die OQ gleich, und ziehe die PQ. Da nun die AB der BC gleich ist, so ist auch die

die OP der OQ gleich, folglich auch der Reſt PL dem Reſte QM, und mithin (6, 2. S) die LM der PQ parallel, und das Dreyeck LMO dem *Dreyecke* PQO gleichwinklicht, folglich verhält ſich (6, 4. S.) die OL zu der LM wie die OP zu der PQ, und *verwechſelt*, (5, 16 S.) die LO zu der OP wie die LM zu der PQ. Es iſt aber die LO gröſſer, als die OP, folglich auch die LM gröſſer, als die PQ. *A*ber die LM iſt der *A*C gleich gemacht worden; folglich iſt auch die A *C* gröſſer, als die PQ. *D*a nun die zwey gerade Linien AB, B*C* den zwezen OP, OQ gleich ſind, aber die Grundlinie AC gröſſer iſt, als die Grundlinie PQ, ſo iſt (1, 24. S.) auch der Winkel *ABC* gröſſer, als der Winkel POQ. Auf eben die *A*rt kann nun gezeigt werden, daſs auch der Winkel *D*EF gröſſer ſey, als der Winkel MON, und der Winkel GHK gröſſer, als der Winkel NOL; folglich ſind die drey Winkel ABC, DEF, GHK gröſſer, als die drey LOM, MON, NOL. *A*ber die Winkel ABC, *D*EF, GHK ſind, nach der Vorausſezung, kleiner, als vier rechte; Folglich ſind noch vielmehr die Winkel LOM, MON, NOL kleiner, als vier rechte. Sie ſind aber auch ebenſogroſs, welches unmöglich iſt; folglich iſt die *A*B nicht kleiner, als die LO. Es iſt aber gezeigt worden, daſs ſie ihr auch nicht gleich ſey; folglich iſt die A*B* gröſſer, als die LO. Man errichte (11, 12. S.) in dem Punkte O auf der Ebene des Kreiſes LMN die Linie OR lothrecht, mache das Quadrat von OR, nach dem nachſtehenden Lehnſaze, dem Ueberſchuſſe des Quadrats von AB über das Quadrat von LO gleich, und ziehe die Linien RL, RM, RN. *D*a nun die OR auf der Ebene des Kreiſes LMN lothrecht iſt, ſo iſt ſie auch auf jeder der Linien LO, MO, NO (11, 3. Erkl.) lothrecht. Und da die LO der OM gleich, die OR aber gemeinſchaftlich und lothrecht iſt, ſo iſt (1, 4. S.) die Grundlinie LR der Grundlinie RM gleich. Aus eben den Gründen iſt auch die RN jeder der beyden RL, RM gleich, folglich ſind die drey Linien RL, RM, RN einander gleich. Und da das Quadrat von OR dem Ueberſchuſſe des Quadrats von *A*B über das Quadrat von LO gleich gemacht iſt, ſo iſt das Quadrat von

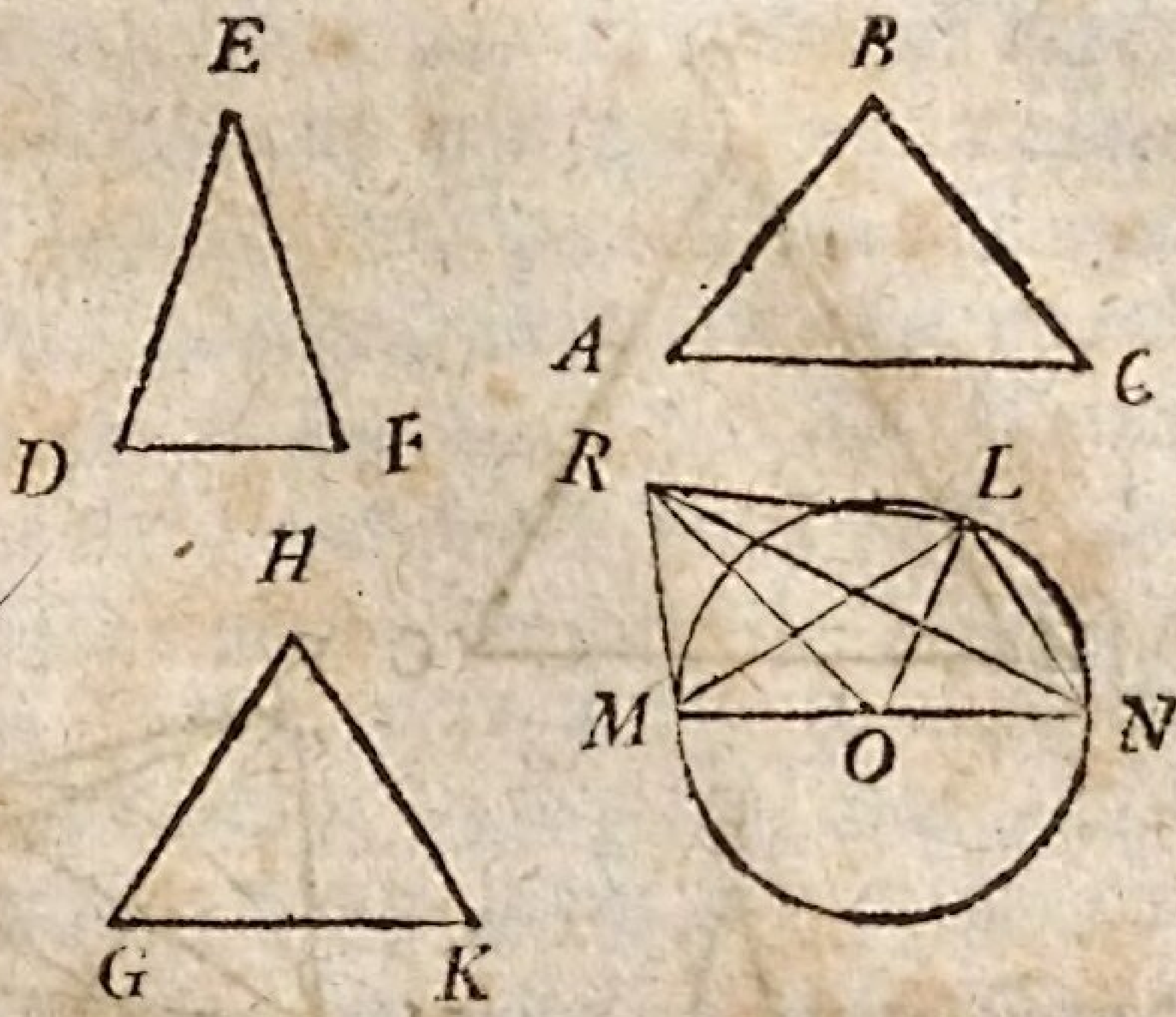
*A*B



AB den Quadraten von LO, OR gleich. Den Quadraten von LO, OR aber ist (1, 47. S) das Quadrat von RL gleich, denn der Winkel LOR ist ein rechter; folglich ist das Quadrat von AB dem Quadrate von RL, und mithin die AB der RL, gleich. Aber der AB ist jede der Linien BC, DE, EF, GH, HK, der RL aber jede der beyden RM, RN gleich; folglich ist jede der Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK jeder der Linien RL, RM, RN gleich. Da aber die zwey Linien LR, RM den zweyen AB, BC gleich sind, und die Grundlinie LM der Grundlinie AC gleich gemacht ist, so ist (1, 8. S.) der Winkel LRM dem Winkel ABC gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel MRN dem Winkel DEF, und der Winkel LRN dem Winkel GHK gleich; folglich ist aus den drey ebenen Winkeln LRM, MRN, LRN, die den drey gegebenen ABC, DEF, GHK gleich sind, an dem Punkte R ein körperlicher Winkel errichtet worden.

Es falle aber nun *zweytens* der Mittelpunkt des Kreises auf eine der Seiten des Dreyecks, nämlich auf die MN, und er sey O, so ziehe man die OL, und ich behaupte wiederum, daſs die AB gröſser sey, als die OL.

Wäre dies nicht, so wäre die AB der OL entweder gleich, oder kleiner, als sie. Sie sey ihr *erstlich* gleich, so sind die beyden AB, BC, das heiſst, die DE, EF den beyden MO, OL, das heiſst, der MN, gleich. Die MN aber ist der DF gleich gemacht; folglich sind die beyden DE, EF der DF gleich, welches (1, 20. S.) unmöglich ist; folglich ist die AB der OL nicht gleich. Aus ähnlichen Grün-



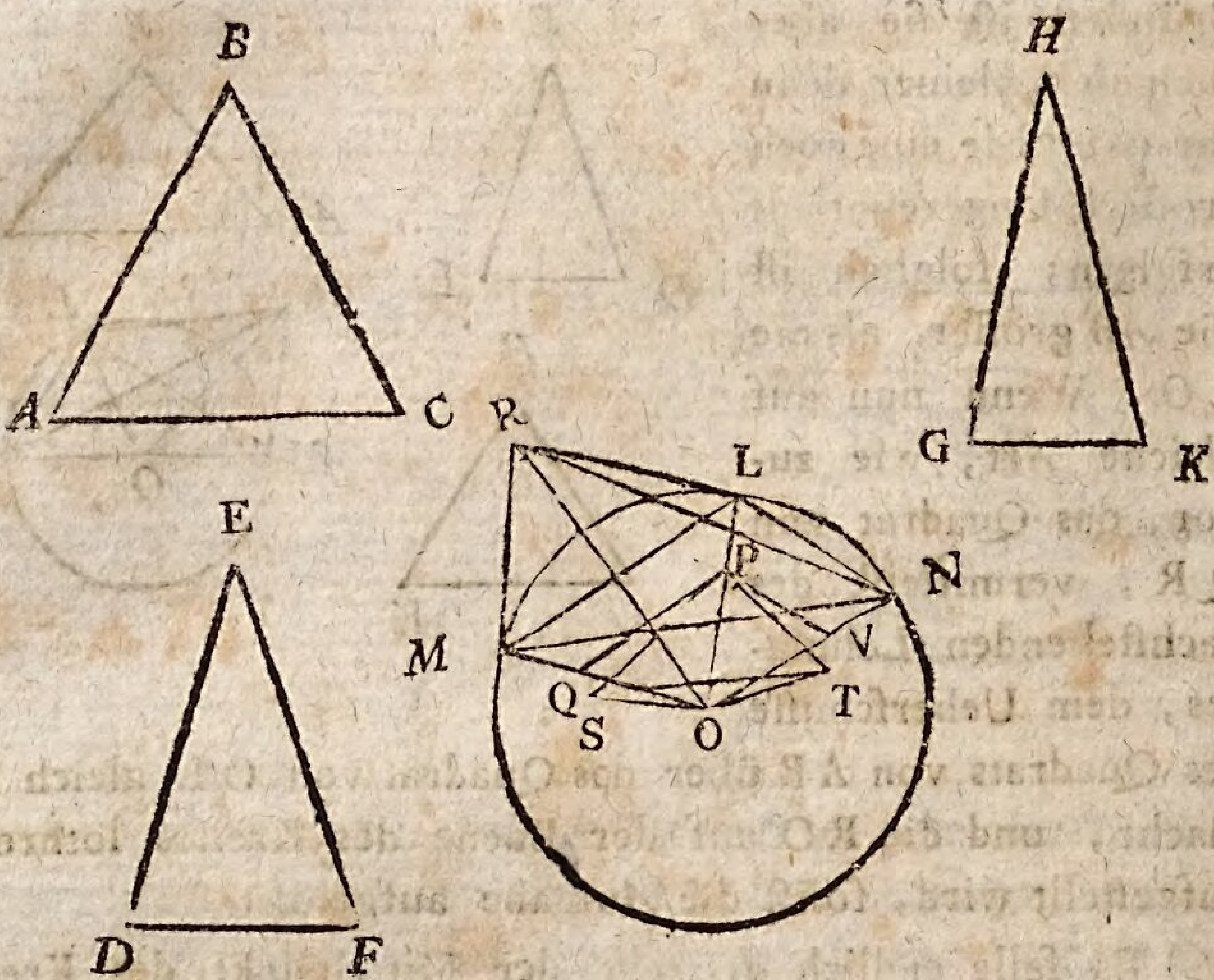
Gründen ist sie aber auch nicht kleiner, denn daraus würde eine noch grössere Ungereimtheit erfolgen; folglich ist die *AB* grösser, als die LO. Wenn nun auf gleiche *Art*, wie zuvor, das Quadrat von QR, vermittelst des nachstehenden Lehnsazes, dem Ueberschusse des Quadrats von AB über das Quadrat von OL gleich gemacht, und die RO auf der Ebene des Kreises lothrecht aufgestellt wird, so ist die *Aufgabe* aufgelöst.

Es falle endlich *drittens* der Mittelpunkt des Kreises ausserhalb des *Dreyecks* LMN, und er sey O so ziehe man die LO, MO, NO, und ich behaupte, dass auch dann die AB grösser, als die LO sey.

Wäre dies nicht, so wäre die A*B* entweder ebensogross, oder kleiner, als die OL. Sie sey *erstlich* ebensogross, so sind die beyden AB, BC den beyden MO, OL stückweise gleich, auch ist die Grundlinie *AC* der Grundlinie ML gleich; folglich ist (1,8. S.) der Winkel A*B*C dem Winkel MOL gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel GHK dem Winkel NOL gleich; folglich ist der ganze Winkel MON den beyden *A*BC, GHK gleich. *Aber* die Winkel ABC, GHK sind grösser, als der Winkel *D*EF; folglich ist auch der Winkel MON grösser, als der DEF. Da nun die beyden DE, EF den beyden MO, ON gleich sind, und die Grundlinie DF der Grundlinie MN gleich ist, so ist (1, 8. S) der Winkel MON dem Winkel DEF gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass er grösser sey, als dieser, welches ungereimt ist; folglich ist die AB der OL nicht gleich.

Nun wollen wir zeigen, dass sie auch nicht kleiner sey; folglich muss sie grösser seyn.

Wird

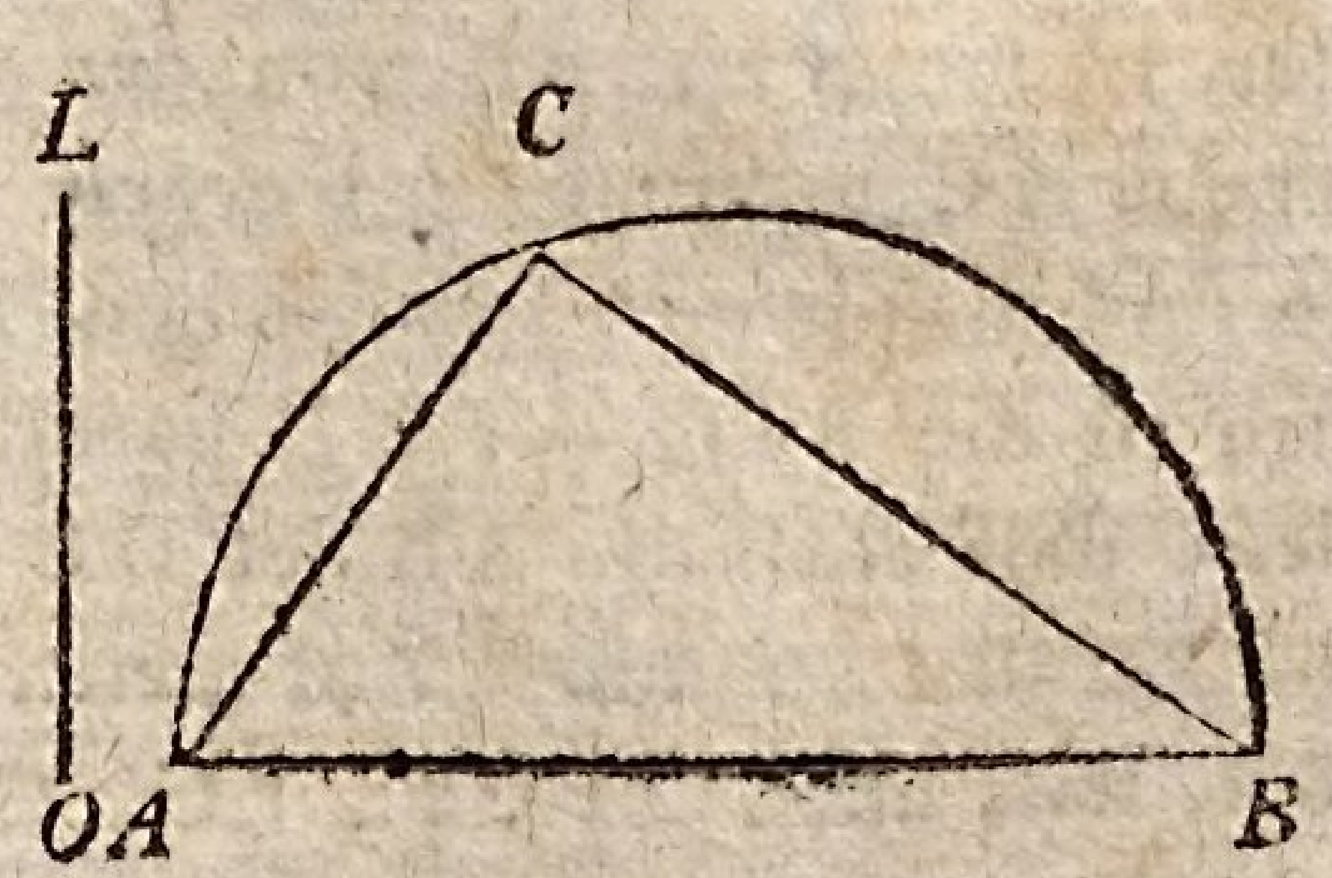


Wird wiederum die OR auf der Ebene des Kreises lothrecht aufgestellt, und der Seite des Quadrats, nach dem folgenden Lehnsaze, gleich gemacht, das dem Ueberschusse des Quadrats von AB über das Quadrat von OL gleich ist, so ist die Aufgabe aufgelösst. Ich behaupte aber, dass die *AB* nicht kleiner sey, als die OL.

Sie sey, die Möglichkeit angenommen, kleiner, so mache man der AB die OP, der BC die OQ gleich, und ziehe die PQ. Da nun die AB der *BC* gleich ist, so ist auch die OP der OQ, folglich auch der Rest PL dem Reste QM gleich, und mithin (6, 2. S.) die LM der PQ parallel, folglich das Dreyeck LMO dem Dreyecke OPQ gleichwinklicht, und es verhält sich (6, 4. S.) die LO zu der LM wie die OP zu der PQ, und *verwechselt* die LO zu der OP wie LM zu der PQ. Es ist aber die LO grösser, als die OP; folglich auch die LM grösser, als die PQ. Die LM aber ist der AC gleich gemacht, folglich ist auch die AC grösser, als die PQ. Da nun die beyden A*B*, *B*C den beyden OP, OQ stückweise gleich sind, aber die Grundlinie AC grösser ist, als die Grundlinie PQ, so ist (1, 25. S.)

S.) auch der Winkel ABC gröſſer, als der Winkel PQQ. Eben ſo kann nun, wenn man die OV jeder der beyden OP, OQ gleich nimmt, und die PV ziehet, gezeigt werden, daſs der Winkel GHK gröſſer, als der Winkel POV, ſey. Man ſeze an den Punkt O der Linie LO den Winkel LOS, der dem Winkel *ABC*, und den Winkel LOT der dem Winkel GHK gleich ſey, mache die beyden OS, OT der OP gleich, und ziehe die PS, PT, ST. Da nun die beyden *AB*, BC den beyden OP, OS gleich ſind, und der Winkel *ABC* dem Winkel POS gleich iſt, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie *AC*, das heiſst, LM der Grundlinie PS gleich. Aus eben den Gründen iſt auch die LN der PT gleich. Und da die beyden ML, NL den beyden PS, PT gleich ſind, und der Winkel MLN gröſſer iſt, als der Winkel SPT, ſo iſt (1, 24. S.) auch die Grundlinie MN gröſſer, als die Grundlinie ST. Aber die MN iſt der DE gleich; folglich iſt auch die DF gröſſer, als die ST. Da nun die beyden DE, EF den beyden SO, OT gleich ſind, aber die Grundlinie *DF* gröſſer iſt, als die Grundlinie ST, ſo iſt (1, 25. S.) auch der Winkel *DEF* gröſſer, als der Winkel SOT. Es iſt aber der Winkel SOT den Winkeln ABC, GHK gleich; folglich iſt auch der Winkel *DEF* gröſſer, als die Winkel A*B*C, GHK. Er iſt aber auch kleiner, welches unmöglich iſt.

Lehnſaz. Auf welche *Art* das Quadrat von OR dem Ueberſchuſſe des Quadrats von AB über das Quadrat von LO gleich gemacht werde, kann auf folgende Art gezeigt werden.



Man nehme die geraden Linien *AB*, LO, und es ſey die gröſſere AB, ſo beſchreibe man mit dieſer den Halbkreis *A*BC, trage in denſelben die der LO gleiche Linie AC, und ziehe die BC.

Da nun der Winkel ACB ein Winkel im Halb-

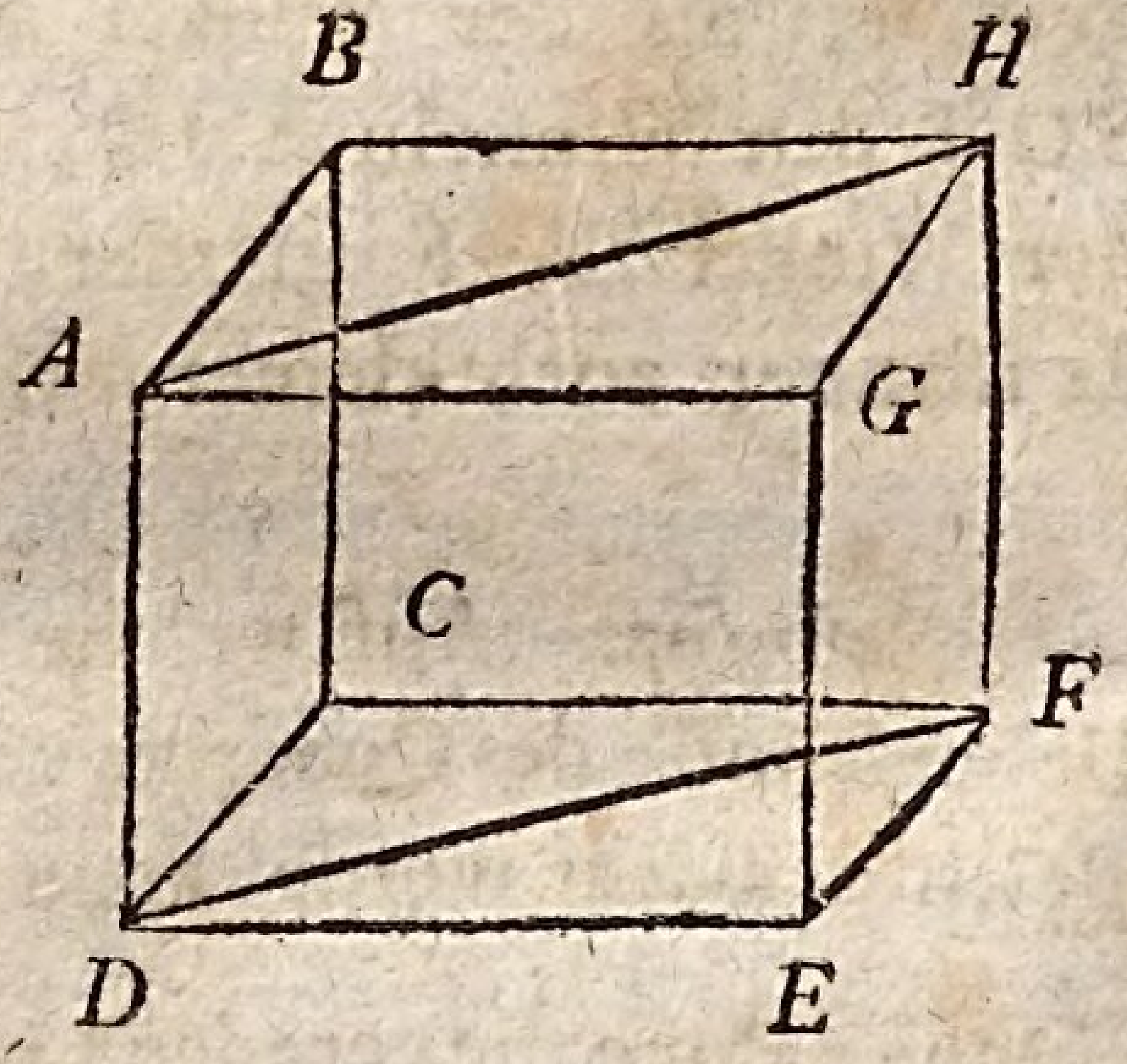
kreiſe

kreise *ABC* ist, so ist (3, 31. S.) der Winkel *ACB* ein rechter, folglich ist (1, 47. S.) das Quadrat von AB dem Quadratate von *A*C und dem Quadrate von C*B* gleich. Es ist aber die AC der LO gleich, folglich ist das Quadrat von AB um das Quadrat von CB grösser, als das Quadrat von LO. Nimmt man also der CB die OR gleich, so ist das Quadrat von AB um das Quadrat von OR grösser, als das Quadrat von LO, w. z. v. w.

24. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Körper von parallelen Ebenen eingeschlossen wird, so sind seine gegenüberliegenden Seitenflächen einander gleich, und Parallelogramme.

Der Körper *CD*HG werde von den parallelen Ebenen AC, GF, AH, *D*F, FB, AE, eingeschlossen, so behaupte ich, dass seine gegenüberliegenden Ebenen einander gleich und Parallelogramme seyen.



Beweis. Da die beyden parallelen Ebenen BG, EC von der Ebene AC geschnitten werden, so sind (11, 16. S.) ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte parallel, folglich ist die AB der CD parallel. Da ferner die zwey parallelen Ebenen BF, *A*E von der Ebene BF, AE von der Ebene *A*C geschnitten werden so sind ihre gemeinschaftlichen *D*urchschnitte parallel; folglich ist die A*D*, der B*C* parallel. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die AB der DC parallel sey; folglich ist A*C* ein Parallelogramm. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass auch die DF, FG, GB, BF, AE, jedes ein Parallelelogramm sey. Man ziehe die AH, DF. Da nun die A*B* der *D*C, und die BH der *C*F parallel ist, so sind die bey-

den einander berührenden Linien AB, BH den beyden einander berührenden Linien DC, CF parallel, und nicht mit ihnen in *einer* Ebene; folglich schliessen sie (11, 10. S.) gleiche Winkel ein; der Winkel ABH ist also dem Winkel *D* CF gleich. Und da (1, 34. S.) die beyden AB, BH den beyden DC, CF gleich sind, und der Winkel *A* BH dem Winkel DCF gleich ist; so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AH der Grundlinie DF, und das Dreyeck ABH dem *Dreyecke* *D* CF gleich. Auch ist (1, 34. *S.*) von dem Dreyecke ABH das Parallelogramm BG, und von dem Dreyecke *D* EF das Parallelogramm CE das Doppelte; folglich ist das Parallelogramm BG dem Parallelogramme CE gleich. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch das Parallelogramm AC dem Parallelogramme GF, und das Parallelogramm AE dem Parallelogramme BF gleich sey.

Wenn demnach ein Körper von parallelen Ebenen eingeschlossen wird u. s. w. w. z. e. w.

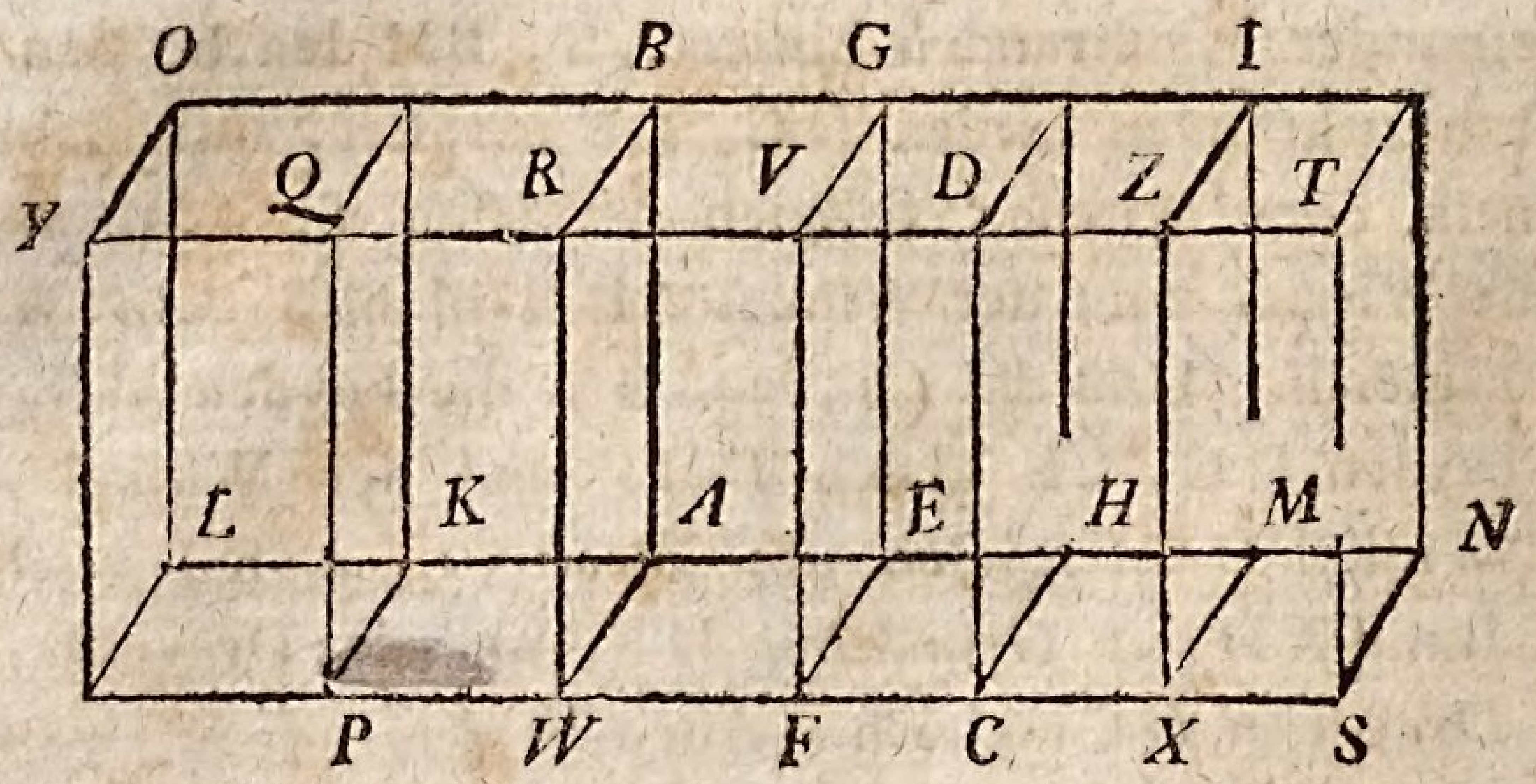
25. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Parallelepipedon durch eine seinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallele Ebene geschnitten wird, so verhält sich die eine Grundfläche zur andern wie der eine Körper zum andern.

*D*as Parallelepipedon ABCD werde von der Ebene VE, die seinen gegenüberliegenden Seitenflächen RA, DH parallel ist, geschnitten, so behaupte ich, dass die Grundfläche AEFW zu der Grundfläche EHCF sich verhalte wie der Körper ABFV zu dem Körper EGC*D*.

Beweis. Man verlängere die AH auf beyden Seiten, und mache der EH Linien, so viel man will, wie die HM, MN, der AE aber auch Linien, so viel man will, wie die AK, KL, gleich, und vollende die Parallelogramme LP, KW, HX, MS, und die Körper AQ, KY, *D*M, MT.

Da



Da nun die LK, KA, AE einander gleich ſind, ſo ſind (1, 38. S.) auch die Parallelogramme LP, KW, AF einander gleich. Ebenſo ſind die Parallelogramme KO, KB, AG, und (11, 24. S.) auch die Parallelogramme LY, KQ, AR einander gleich, denn ſie liegen einander gegenüber. *A*us ebendem Grunde ſind auch die Parallelogramme *E*C, HX, MS, und die Parallelogramme HG, HI, IN, deſsgleichen die Parallelogramme DH, MZ, NT einander gleich; folglich ſind in den drey Körpern LQ, KR, AV, drey Seitenflächen einander gleich. Aber dieſe drey ſind ihren gegenüberliegenden gleich; folglich ſind (11, 10. Erkl.) die drey Körper LQ, KR, AV, einander gleich. Aus eben den Gründen ſind auch die drey Körper ED, DM, MT einander gleich. Wievielfach alſo die Grundfläche LF von der Grundfläche AF iſt, ebenſovielfach iſt der Körper LV von dem Körper AV. Aus gleichen Gründen iſt der Körper NV von dem Körper HV ebenſovielfach, als die Grundfläche NF von der Grundfläche HF. Ferner iſt, jenachdem die Grundfläche LF ebenſogroſs, oder gröſſer, oder kleiner iſt, als die Grundfläche NF, auch der Körper LV ebenſogroſs, oder gröſſer, oder kleiner, als der Körper NV *Da* nun von den vier Gröſſen, den zwey Grundflächen AF, FH und den zwey Körpern AV, VH, Gleichvielfache genommen worden ſind, nämlich von der Grundfläche AF und dem Körper AV die Grundfläche LF und der Körper LV, von der Grundfläche HF und dem Körper HV aber die Grundfläche NF und der Körper NV, und gezeigt worden iſt, daſs, jenachdem die Grundfläche LF gröſſer, ebenſo-

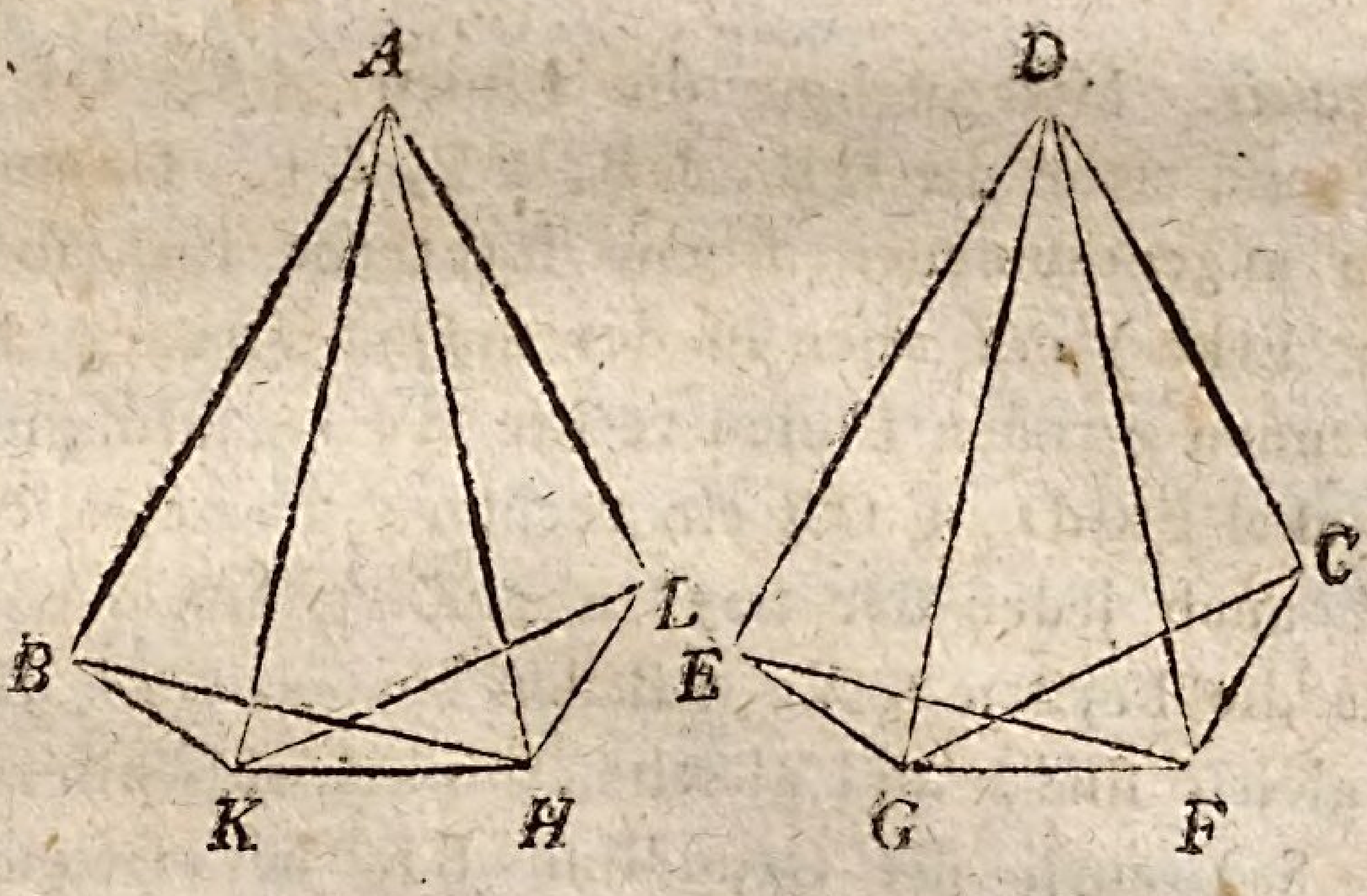
groſs

groſs, oder kleiner iſt, als die Grundfläche NF, auch der Körper LV gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner ſey, als der Körger NV, ſo verhält ſich (5, 5. Erkl.) die Grundfläche *A*F zur Grundfläche FH wie der Körper AV zum Körper VH w. z. e. w.

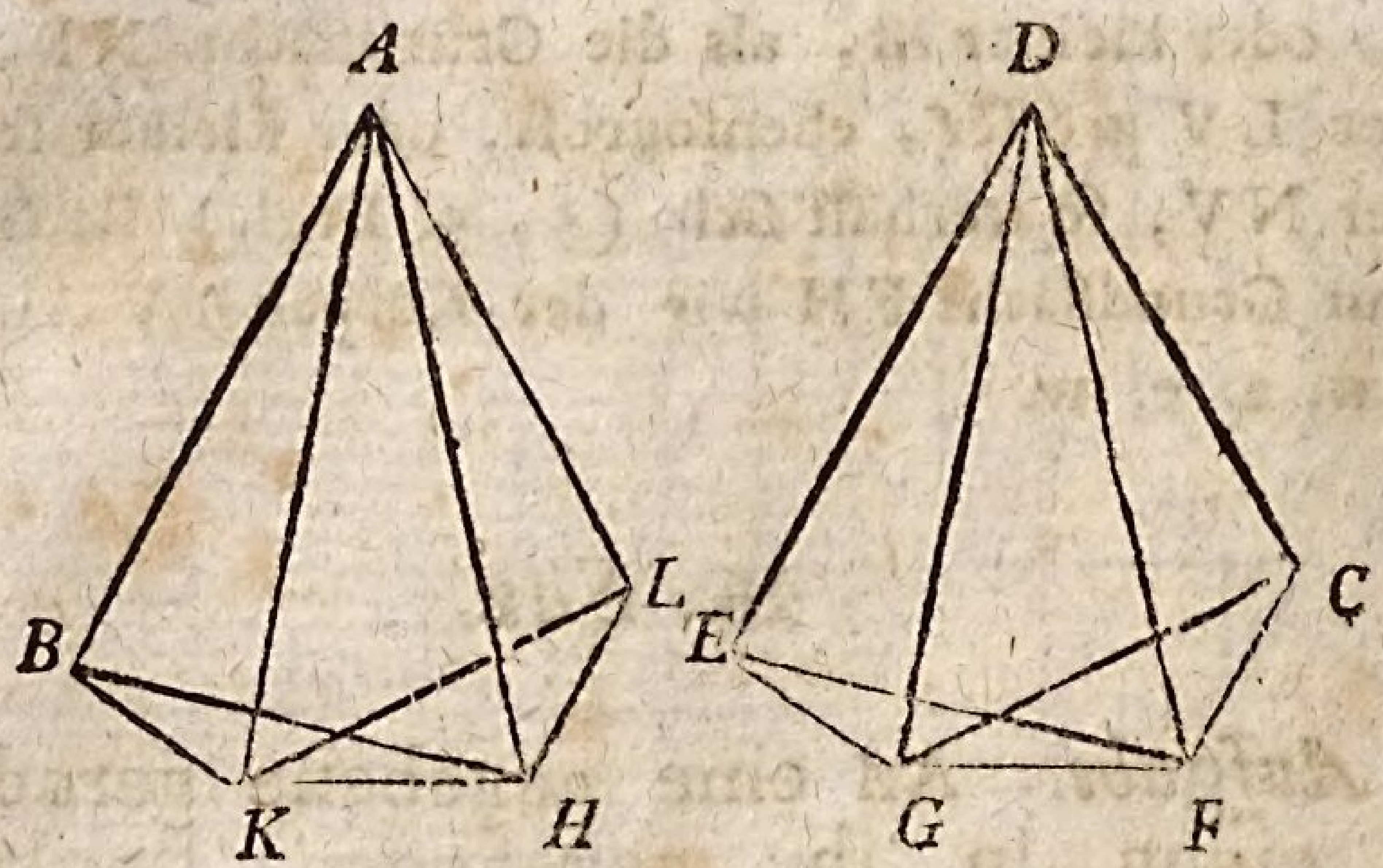
26. *Saz.*

Aufgabe. An eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt einen Winkel zu ſezen, der einem gegebenen körperlichen Winkel gleich ſey.

Es ſey die gegebene gerade Linie AB, der in ihr gegebene Punkt A, der gegebene körperliche Winkel, der an dem Punkte D, welcher von den ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC eingeſchloſſen wird, und man ſoll an die gegebene gerade Linie AB und an den in ihr gegebenen Punkt A einen Winkel ſezen, der dem gegebenen körperlichen Winkel bey *D* gleich ſey.



Auflöſung. Man nehme in der Linie *D*F einen beliebigen Punkt F, fälle von demſelben (11, 11. S.) auf die Ebene durch ED, DC die FG lothrecht, welche die Ebene in dem Punkte G treffe, und ziehe die *D*G, hierauf ſeze man (1, 23. S.) an den Punkt *A* der Linie AB den Winkel B*A*L, der dem Winkel E*D* *C*, und den Winkel B*A*K, der dem Winkel EDG gleich ſey, alsdann mache man (1,



3. S.) der D G die *A*K gleich, und errichte in dem Punkte K (11, 12. S.) auf der Ebene durch *B*AL die KH lothrecht, mache endlich der GF die KH gleich, und ziehe die HA, so behaupte ich, dass der körperliche Winkel bey A, welcher von den Winkeln B*A*L, *B*AH, HAL eingeschlossen wird, dem körperlichen Winkel bey D, der von den ebenen Winkeln E*D*C, EDF, FDC, eingeschlossen wird, gleich sey.

Beweis. Men nehme die Linien *AB*, DE einander gleich, und ziehe die HB, KB, FE, GE. Da nun die FG auf der angenommenen Ebene lothrecht ist, so macht sie (11, 3. Erkl.) mit allen in der angenommenen Ebene sie berührenden geraden Linien rechte Winkel; folglich ist jeder der Winkel FGD, FGE ein rechter. Aus eben den Gründen ist auch jeder der beyden HKA, HKB ein rechter. Und da die beyden KA, AB den beyden G*D*, DE stückweise gleich sind, und gleiche Winkel einschliessen, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie BK der Grundlinie EG gleich. Es ist aber auch die KH der GF gleich, auch schliessen sie gleiche Winkel ein; folglich ist auch die H*B* der FE gleich. Da ferner die beyden AK, KH den beyden *D*G, GF gleich sind, und rechte Winkel einschliessen, so ist auch die Grundlinie AH der DF gleich; auch ist die A*B* der DE gleich; folglich sind die beyden HA, AB den beyden FD, *D*E gleich, und die Grundlinie H*B* ist der Grundlinie F*C* gleich: folglich ist auch der Winkel BAH dem

dem Winkel E *D* F gleich. *A*us ebenden Gründen ist auch der Winkel H A L dem Winkel F *D* C gleich. Wenn man nämlich die A L, D C einander gleich nimmt, und die K L, H L, G C, F C zieht, so ist, weil der ganze Winkel *B* A L dem ganzen E *D C* gleich ist, und der B A K dem E *D* G gleichgesezt wird, auch der Rest K A L dem Reste G *D* C gleich. Und da die beyden K A, *A* L den beyden G D, *D* C gleich sind, und gleiche Winkel einschliessen, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie K L der Grundlinie G *C* gleich. Es ist aber auch die K H der G F gleich; die beyden L K, K H sind also den beyden C G, G F gleich, und schliessen rechte Winkel ein; folglich ist die Grundlinie H L der Grundlinie F C gleich. Da ferner die beyden H *A*, *A* L den beyden F D, *D* C gleich sind, und die Grundlinie H L der Grundnie F C gleich ist, so ist (1, 8. S.) auch der Winkel H A L dem Winkel F D C gleich. Es ist aber auch der Winkel *B* A L dem Winkel E D C gleich.

Demnach ist an eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt ein Winkel gesezt worden, der einem gegebenen körperlichen Winkel gleich ist.

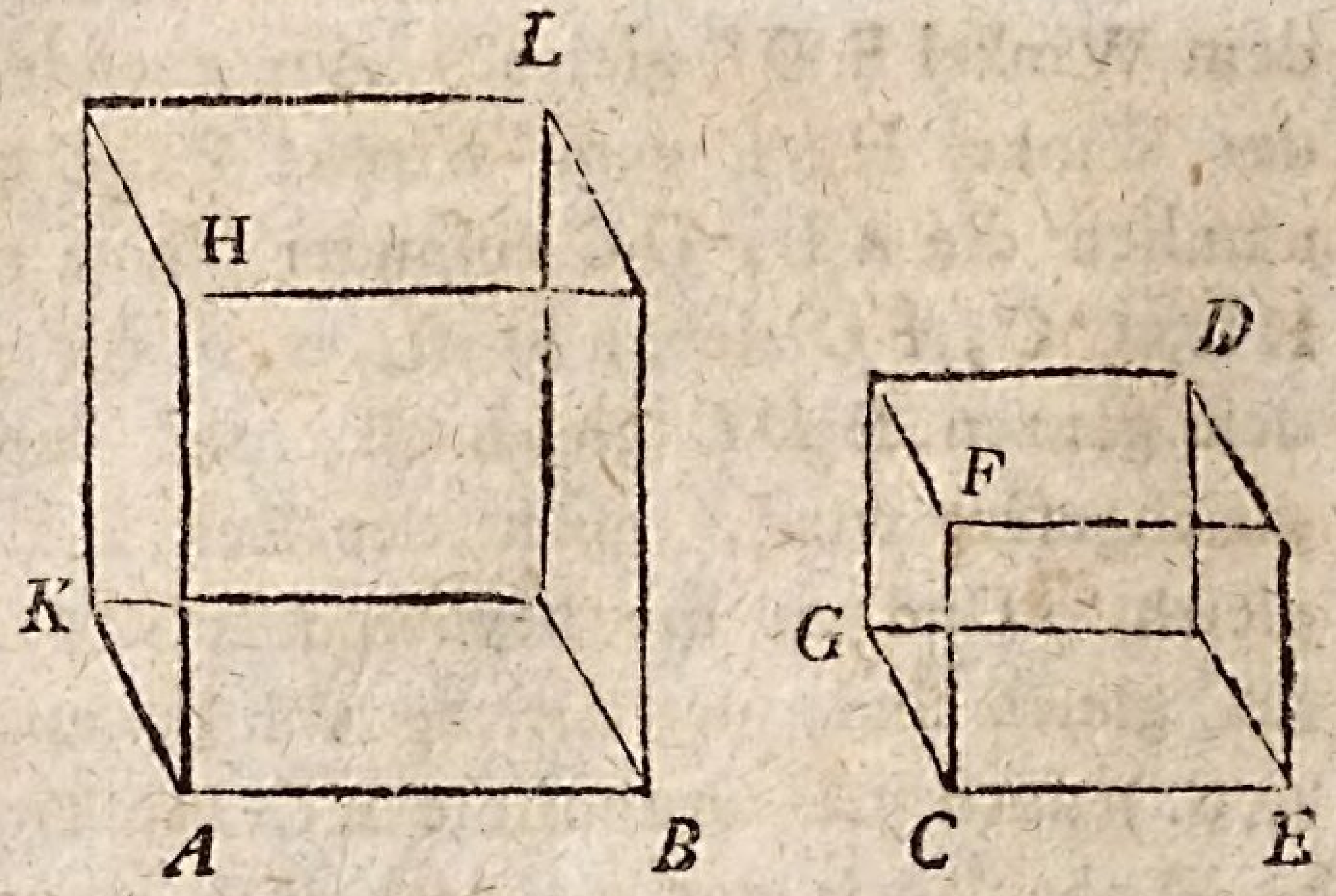
27. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelepipedon zu beschreiben, das einem gegebenen Parallelepipedon ähnlich sey und ähnlich liege.

Es sey die gegebene gerade Linie A *B*, das gegebene Parallelepipedon *D* C, man soll auf der gegebenen geraden Linie A B ein Parallelepipedon beschreiben, das dem Parallelepipedon *D* C ähnlich sey und ähnlich liege.

Auflösung. Man seze (11, 26. S.) an den Punkt A der Linie A *B* einen körperlichen Winkel, der dem körperlichen Winkel bey C gleich sey, und von den Winkeln BAH, H *A* K, K *A* B eingeschlossen werde, so dass der Winkel B A H dem Winkel E C F, der Winkel B A K dem Winkel E C G, und der Winkel K A H dem G *C* F gleich sey. Hier-

auf mache man (6, 12. S.) die EC zu der CG wie die BA zu der *A*K, und die G*C* zu der *C*F wie die KA zu der *A*H, folglich (5, 22. S.) *gleichförmig* die E*C* zu der CF wie die B*A* zu der AH, endlich vollende man das Parallelogramm *B*H und den Körper *A*L.



Beweis. Da die E*C* zu der CG sich verhält wie die *B*A zu der *A*K, so sind die um die gleichen Winkel ECG, *B*AK liegenden Seiten proportionirt und daher (6, 4. S.) dem Parallelogramme KB das Parallelogramm GE ähnlich. Aus eben den Gründen ist auch das Parallelogramm KH dem Parallelogramme GF, und das Parallelogramm FE dem Parallelogramme HB ähnlich; folglich sind die drey Parallelogramme des Körpers C*D* den drey Parallelogrammen des Körpers AL ähnlich. Aber (11, 24. S.) sind diese drey ihren gegenüberliegenden gleich und ähnlich; folglich ist der ganze Körper CD dem ganzen Körper AL ähnlich.

Demnach ist auf der gegebenen Linie A*B* das Parallelepipedon *A*L errichtet worden, das dem gegebenen Parallelepipedon CD ähnlich ist und ähnlich liegt, w. z. v. w.

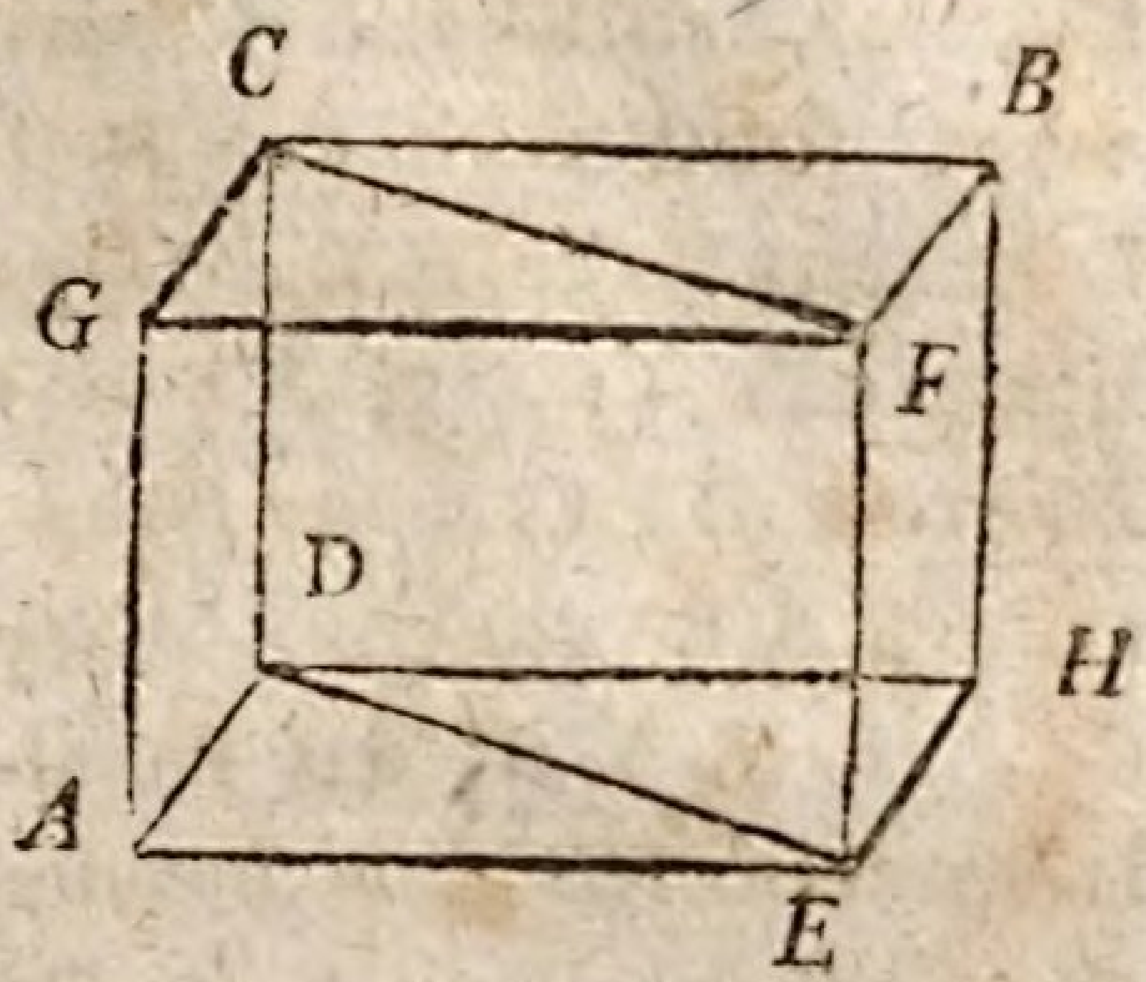
28. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Parallelepipedon von einer Ebene durch die Diagonalen der gegenüberliegenden Seitenflächen geschnitten wird, so wird es durch diese Ebene halbirt.

Das Parallelepipedon A*B* werde von der Ebene C*D*EF durch die Diagonalen der gegenüberliegenden Seitenflächen, näm-

nämlich durch die CF, DE geschnitten, so behaupte ich, dass der Körper AB von der Ebene CDEF halbirt werde.

Beweis. Da (1, 34. S.) das Dreyeck CGF dem Dreyecke CBF, das Dreyeck *A*DE aber dem Dreyecke DEH gleich ist, aber (11, 24. S.) das Parallelogramm C*A* dem Parallelogramme BE, und das Parallelogramm GE dem Parallelogramme CH gleich ist, weil



sie einander gegenüberliegen, so ist (11, 10. Erkl.) das von den zwey Dreyecken CGF, *A*DE, und den drey Parallelogrammen GE, *A*C, CE eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken CFB, DEH und den drey Parallelogrammen CH, BE, CE eingeschlossenen Prisma gleich, denn sie werden von gleich vielen und gleich grossen Ebenen eingeschlossen; folglich wird der ganze Körper *A*B von der Ebene CDEF halbirt. w. z. e. w.

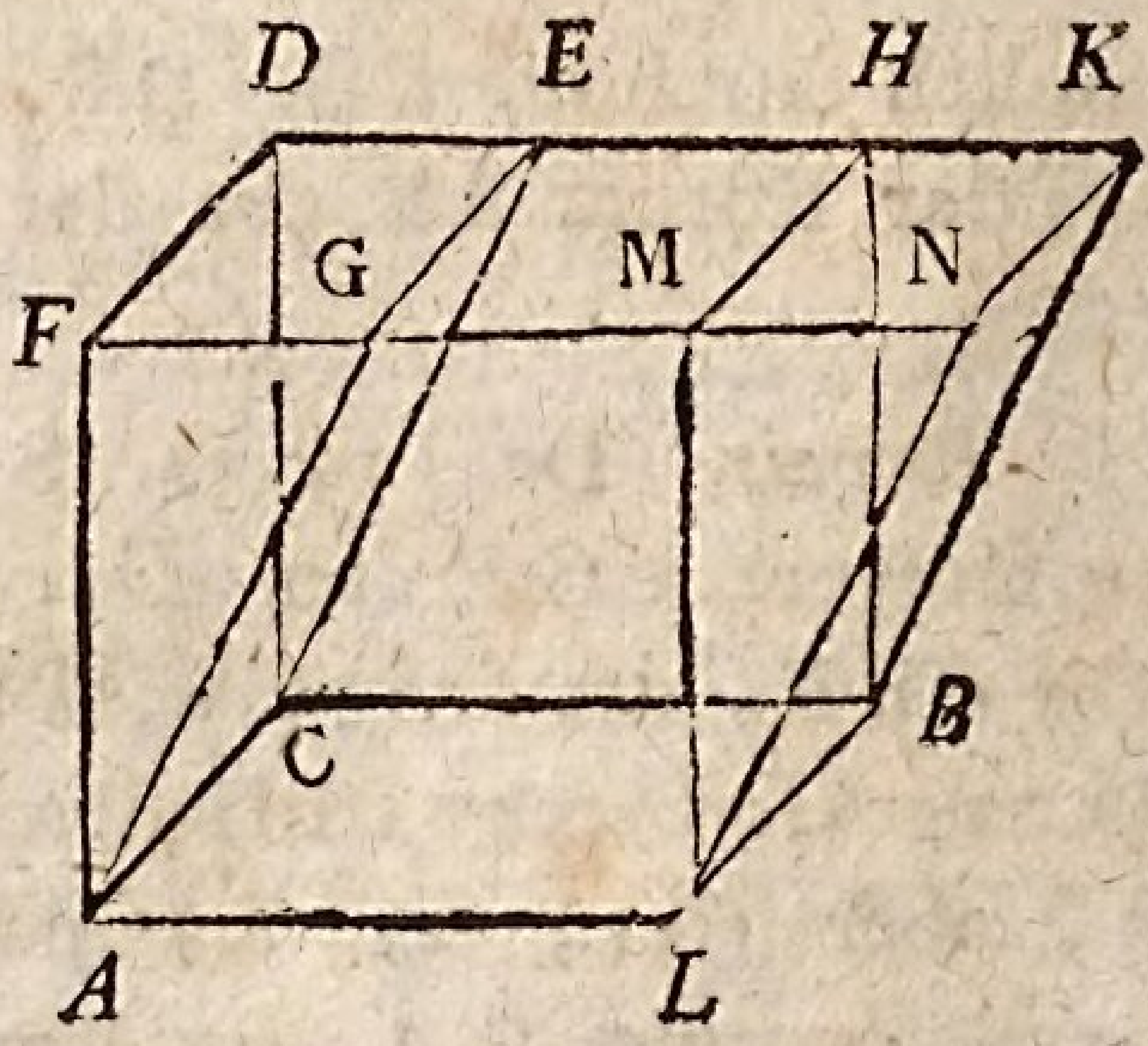
29. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, deren Seitenlinien in einerley geraden Linien sich endigen, sind einander gleich.

Es seyen die Parallelepipeda *C*M, CN auf einerley Grundfläche *A*B, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien *A*F, *A*G, LM, LN, CD, CE, BH, BK endigen sich in einerley geraden Linien FN, DK, so behaupte ich, dass der Körper CM dem Körper CN gleich sey.

Beweis. Da die beyden Figuren CH, CK Parallelogramme sind, so ist (1, 34. S.) die CB jeder der beyden

DH



DH, EK gleich, folglich ist auch die DH der EK gleich. Man nehme die gemeinschaftliche EH hinweg, so ist auch der Rest DE dem Reste HK, folglich auch (1, 8. S.) das Dreyeck DEC dem Dreyecke HKB gleich. Aber (1, 36. S.) ist das Parallelogramm DG dem Parallelogramme HN gleich. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck AFG dem Dreyecke LMN gleich. Aber (11, 24. S.) ist das Parallelogramm CF dem Parallelogramme BM, und das Parallelogramm CG dem Parallelogramme BN gleich, denn sie sind gegenüberliegend; folglich ist (11, 10. Erkl.) das von den zwey Dreyecken AFG, DEC und den drey Parallelogrammen *AD*, *DG*, GC eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken LMN, HBK und den drey Parallelogrammen BM, NH, BN eingeschlossenen Prisma gleich. Man seze den gemeinschaftlichen Körper hinzu, dessen Grundfläche das Parallelogramm AB, die gegenüberliegende Seitenfläche aber GEHM ist, so ist das ganze Parallelepipedon CM dem ganzen Parallelepipedon CN gleich.

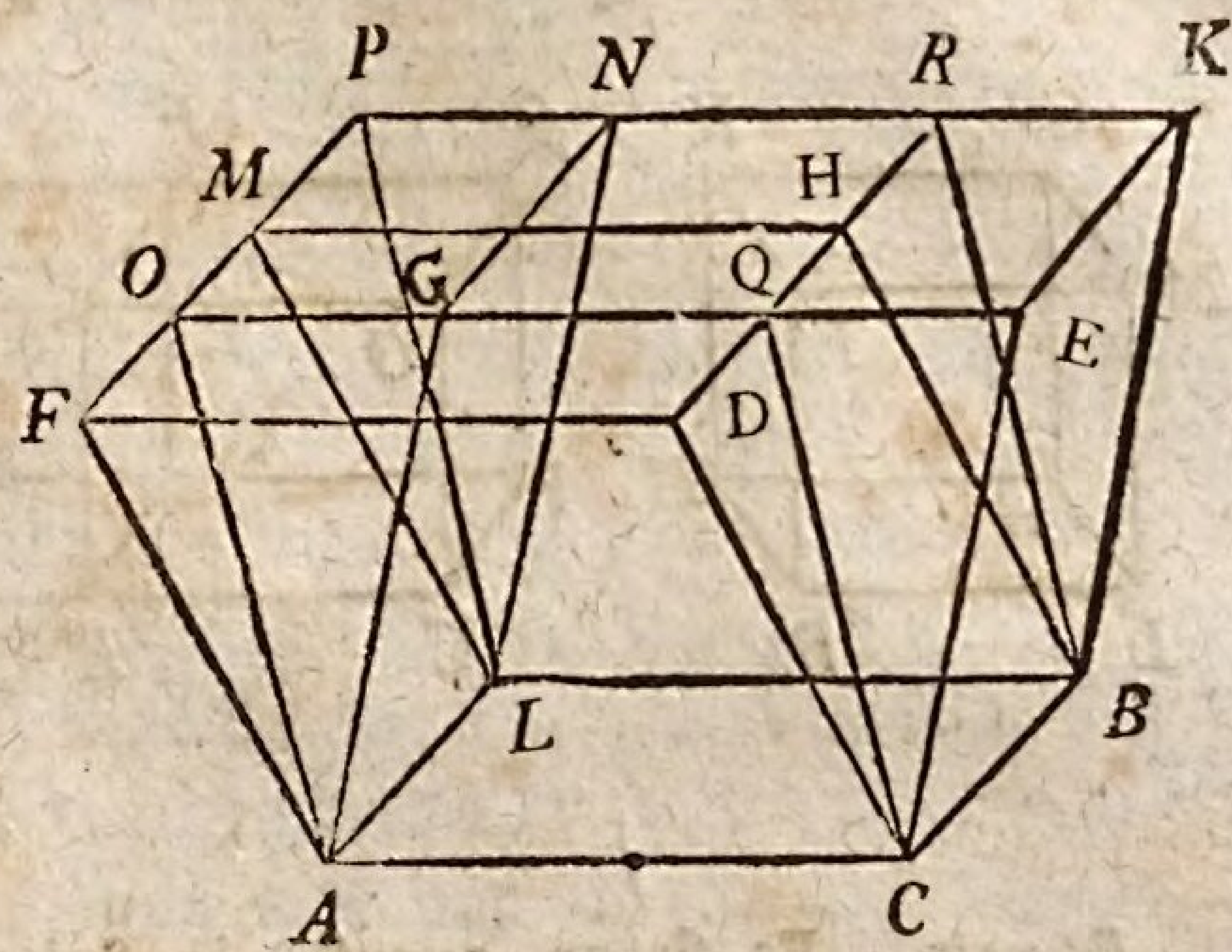
Demnach sind Parallelepipeda auf einerley Grundfläche u. s. w. w. z. e. w.

30. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, deren Seitenlinien nicht in einerley geraden Linien sich endigen, sind einander gleich.

Es seyen die Parallelepipeda CM, CN auf einerley Grundfläche *AB* und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien AF, *AG*, LM, LN, *CD*, CE, BH, BK liegen nicht in ei-

einerley geraden Linien, so behaupte ich, dass der Körper CM dem Körper CN gleich sey.



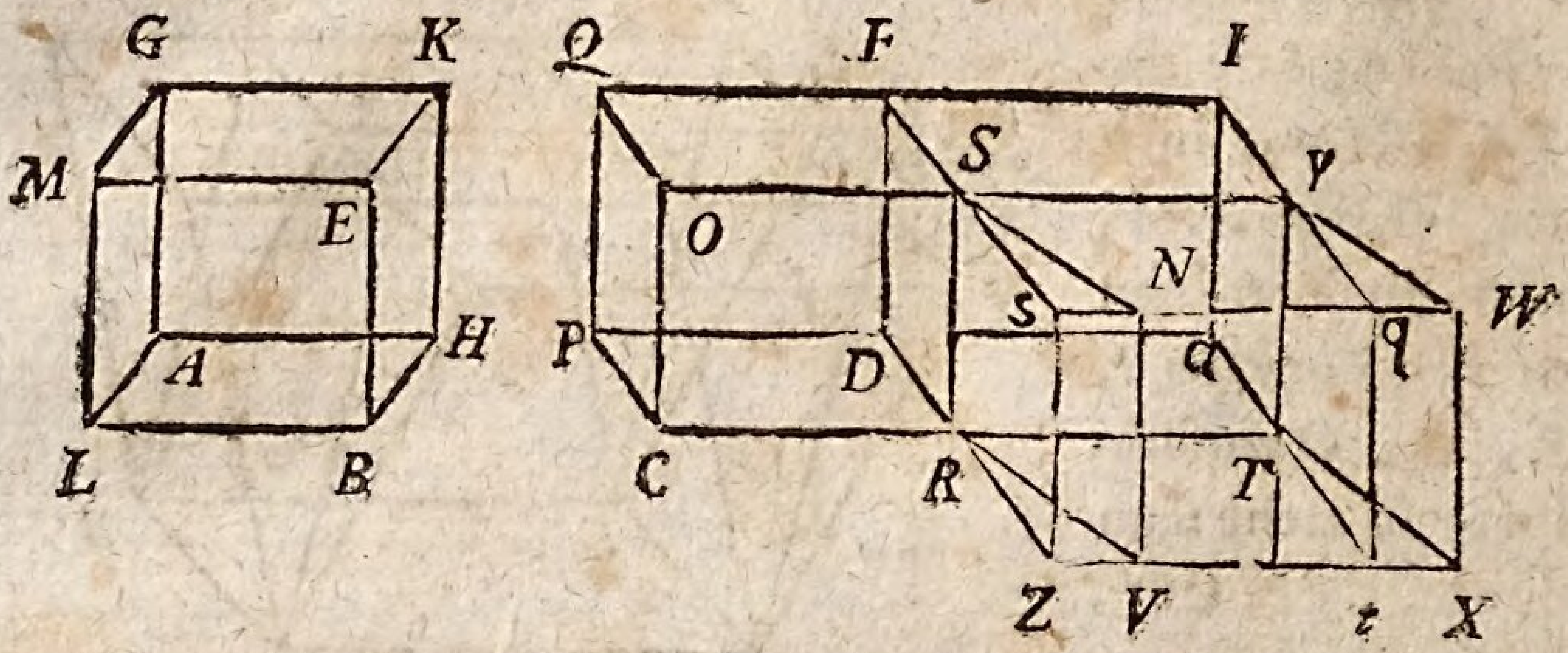
Beweis. Man verlängere die NK, DH wie auch die GE, FM, und diese treffen in den Punkten P, R, Q, O zusammen, so ziehe man die AO, LP, CQ, BR. Nun ist (11, 29. S) der Körper CM, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL und die ihr entgegengesezte Seitenfläche FDHM ist, dem Körper CP, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL und die ihr entgegengesezte Seitenfläche OQRP ist, gleich, denn sie sind auf einerley Grundfiäche ACBL und ihre Seitenlinien AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH, BR endigen sich in einerley geraden Linien FP, DR. Aber der Körper CP, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL, und die ihr entgegengesezte Seitenfläche OQRP ist, ist (11, 29. S.) dem Körper CN, dessen Grundfläche des Parallelogramm ACBL und die ihr entgegengesezte Seitenfläche GEKN ist, gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche ACBL und ihre Seitenlinien AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK, BR endigen sich in einerley geraden Linien GQ, NR; folglich ist auch der Körper CM dem Körper CN gleich.

Demnach sind Parallelepipeda auf einerley Grundfläche u. s. w. w. z. e. w.

31. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe sind einander gleich.

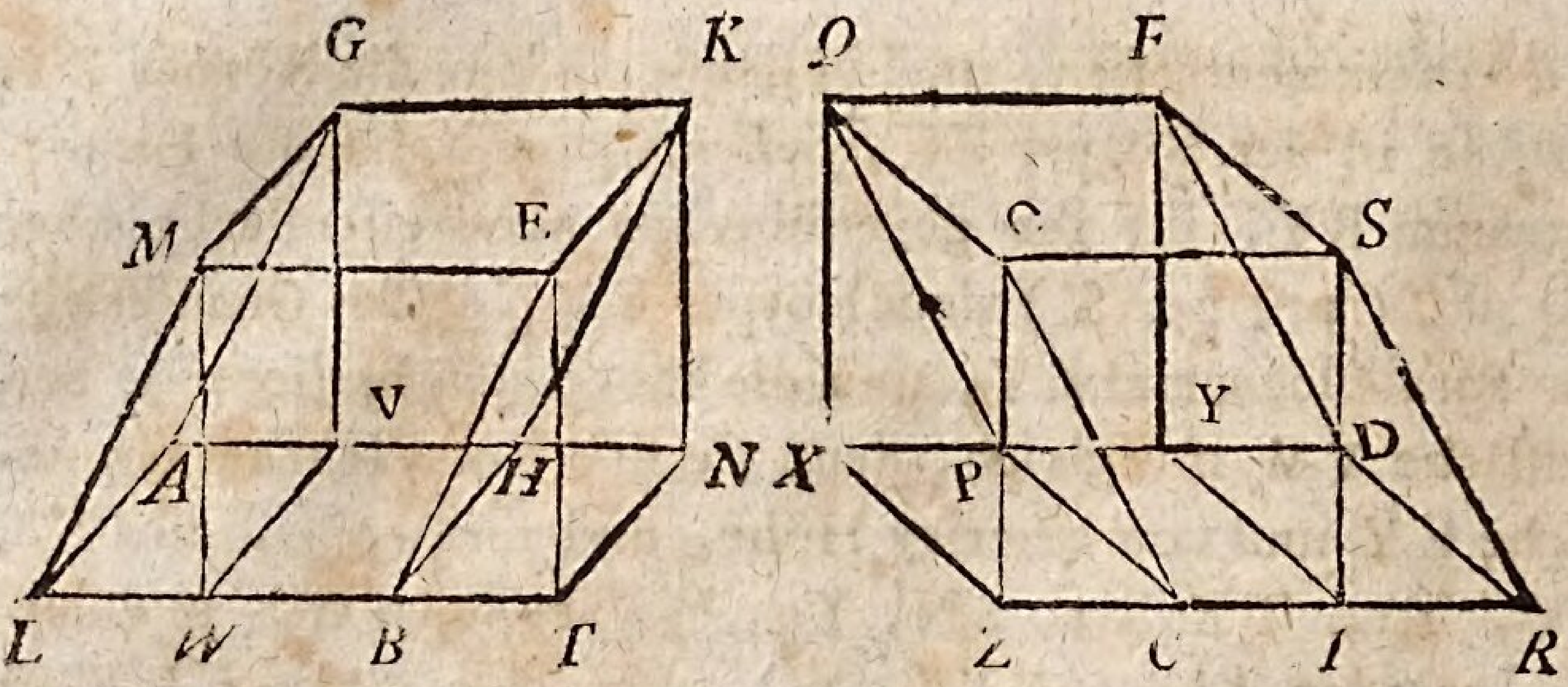
Es seyen die Parallelepipeda AE, CF auf den gleichen Grundflächen AB, CD und von einerley Höhe, so behaupte ich, dass der Körper AE dem Körper CF gleich sey.



Beweis. Es seyen *zuerst* die Seitenlinien HK, BE, AG, LM, PQ, DF, CO, RS auf den Grundflächen *A*B, CD lothrecht, der Winkel *A*L*B* aber sey dem Winkel CRD ungleich, so verlängere man die CR in gerader Linie nach RT, seze (1, 23. S.) an den Punkt R der geraden Linie RT den Winkel TRV, der dem Winkel AL*B* gleich sey, und mache der AL die RT, der LB aber die RV gleich, ziehe durch den Punkt V der RT die VX parallel, und vollende die Grundfläche RX, und den Körper VY. *Da* nun die beyden TR, RV den beyden AL, L*B* gleich sind, und gleiche Winkel einschliessen, so ist das Parallelogramm RX dem Parallelogramme HL gleich und ähnlich. Ferner da die AL der RT, und die LM der RS gleich ist, und beyde gleiche Winkel einschliessen, so ist das Parallelogramm RY dem Parallelogramme *A*M gleich und ähnlich. *Aus* ebenden Gründen ist das Parallelogramm LE dem Parallelogramme SV gleich und ähnlich; folglich sind die drey Parallelogramme des Körpers AE den drey Parallelogrammen des Körpers VY gleich und ähnlich. *Aber* (11, 24. S.) sind diese drey auch den drey gegenüberliegenden gleich und ähnlich, folglich ist (11, 10. Erkl.) das ganze Parallelepipedon *A*E dem ganzen Parallelepipedon VY gleich. Man verlängere die DR, XV, und sie treffen in dem Punkte Z zusammen, so ziehe man durch den Punkt T der DZ die Tt parallel, verlängere die Tt, PD bis sie in dem Punkte

te *a* zusammentreffen, und vollende alsdann die Körper ZY, RI, so ist der Körper ZY, dessen Grundfläche das Parallelogramm RY, die ihr gegenüberliegende Seitenfläche aber Zq ist, (11, 29. S.) dem Körper YV, dessen Grundfläche das Parallelogramm RY, und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche VW ist, gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche RY und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien RZ, RV, Tt, TX, Ss, SN, Yq, YW endigen sich in einerley geraden Linien ZX, sW. Aber der Körper VY ist dem Körper AE gleich; folglich ist auch der Körper YZ dem Körper AE gleich. Ferner da das Parallelogramm RVXT (1, 35. S.) dem Parallelogramme ZT gleich ist, denn sie sind auf einerley Grundlinie RT und in einerley Parallelen RT, ZX, aber auch das Parallelogramm RVXT dem Parallelogramme CD gleich ist, weil es auch dem AB gleich ist, so ist das Parallelogramm ZT dem Parallelogramme CD gleich. Es ist aber DT ein anderes Parallelogramm; folglich verhält sich (5, 7. S.) die Grundfläche CD zu der Grundfläche DT wie die ZT zu der DT. Und da das Parallelepipedon CI von der seinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallelen Ebene RT geschnitten wird, so verhält sich (11, 25. S.) die Grundfläche CD zur Grundfläche DT wie der Körper CF zu dem Körper RI. Aus eben den Gründen, weil das Parallelepipedon ZI von der seinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallelen Ebene RY geschnitten wird, verhält sich die Grundfläche ZT zur Grundfläche DT wie der Körper ZY zu dem Körper RI. Aber wie die Grundfläche C*D* zur Grundfläche DT sich verhält, so verhält sich die Grundfläche ZT zu der TD; folglich verhält sich auch der Körper CF zu dem RI (5, 11. S.) wie der Körper ZY zum Körper RI. Da also die beyden Körper CF, ZY zu dem Körper RI einerley Verhältniss haben, so ist (5, 9. S.) der Körper CF dem Körper ZY gleich. Aber von dem Körper ZY ist gezeigt worden, dass er dem Körper AE gleich sey, folglich ist auch der Körper AE dem Körper CF gleich.

Es



Es ſeyen aber *zweytens* die Seitenlinien AG, HK, BE, LM, CO, PQ, DF, RS auf den Grundflächen AB, CD nicht lothrecht, ſo behaupte ich wiederum, daſs der Körper AE dem Körper CF gleich ſey.

Man fälle (11, 11. S.) von den Punkten K, E, G, M, Q, F, O, S auf die angenommene Ebene die Lothe KN, ET, GV, MW, QX, FY, OZ, SI, welche die Ebene in den Punkten L, N, T, V, W, X, Y, Z, I treffen, und ziehe die NT, VW, NV, TW, XY, XZ, ZI, IY, ſo iſt (11, 31. S.) der Körper KW dem Körper QI gleich, denn ſie ſind auf gleichen Grundflächen KM, QS, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien ſind auf den Grundflächen lothrecht. Aber (11, 30. S.) iſt der Körper KW dem Körper AE, der Körper QI aber dem Körper CF gleich, denn ſie ſind auf einerley Grundfläche, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen ſich nicht in einerley geraden Linien; folglich iſt auch der Körper AE dem Körper CF gleich.

Demnach ſind Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen u. ſ. w. w. z. e. w.

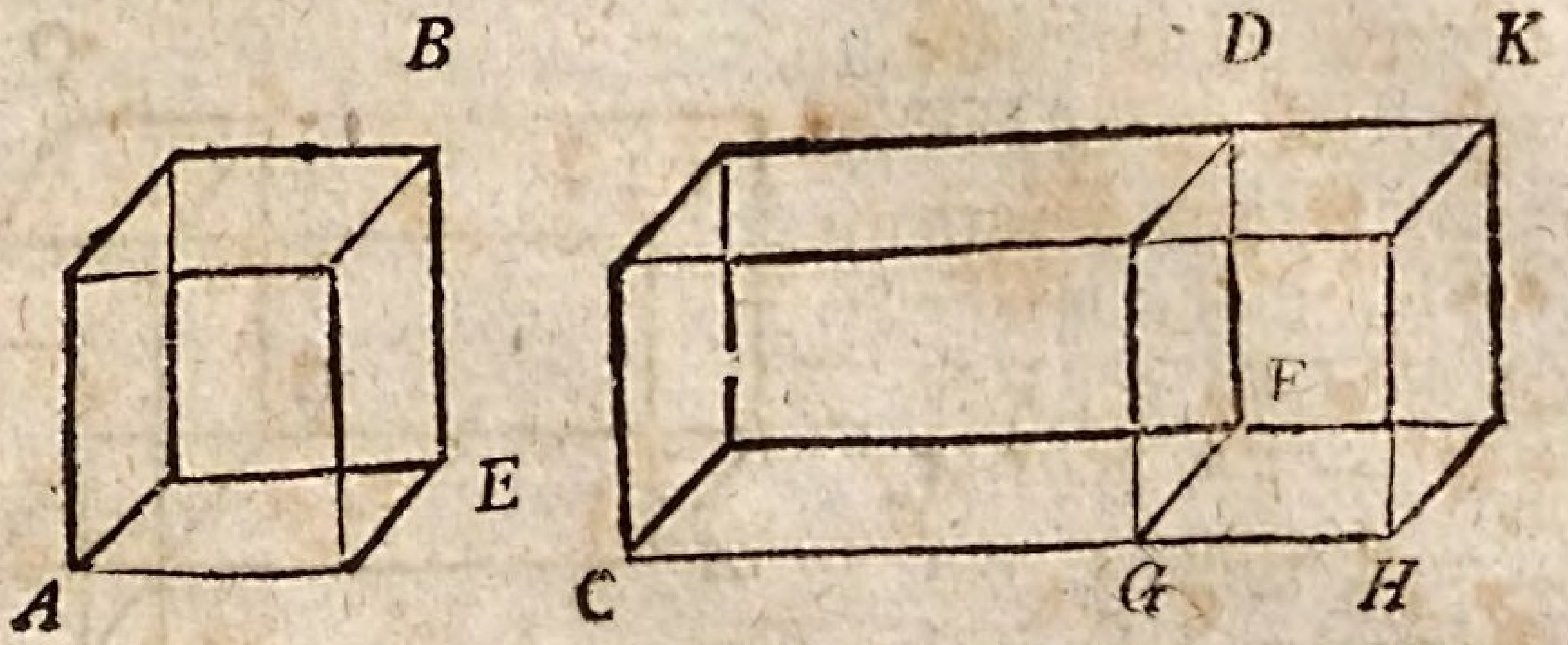
32. *Saz.*

Lehrſaz. Parallelepipeda von einerley Höhe verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

Es ſeyen die Parallelepipeda AB, CD, welche einerley Höhe haben, ſo behaupte ich, daſs ſie ſich wie ihre

Grund-

Grundflächen verhalten, das heifst, dafs die Grundfläche AE zur Grundfläche CF fich verhalte wie der Körper A *B* zum Körper CD.



Beweis. Man feze (1, 45. S.) auf die Linie FG das Parallelogramm FH, das dem Parallelogramme AE gleich fey, auf der Grundfläche FH aber, und unter einerley Höhe mit dem CD, errichte man das Parallepipedon GK, fo ift (11, 31. S) der Körper AB dem Körper GK gleich, denn fie find auf gleichen Grundflächen AE, FH und von einerley Höhe. Da nun das Parallelepipedon CK von der feinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallelen Ebene DG gefchnitten wird, fo verhält fich (11, 25. S.) die Grundfläche HF zur Grundfläche CF wie der Körper HD zum Körper DC. Aber die Grundfläche FH ift der Grundfläche AE, und der Körper GK dem Körper A*B* gleich; folglich verhält fich auch die Grundfläche A*E* zur Grundfläche CF wie der Körper AB zum Körper CD.

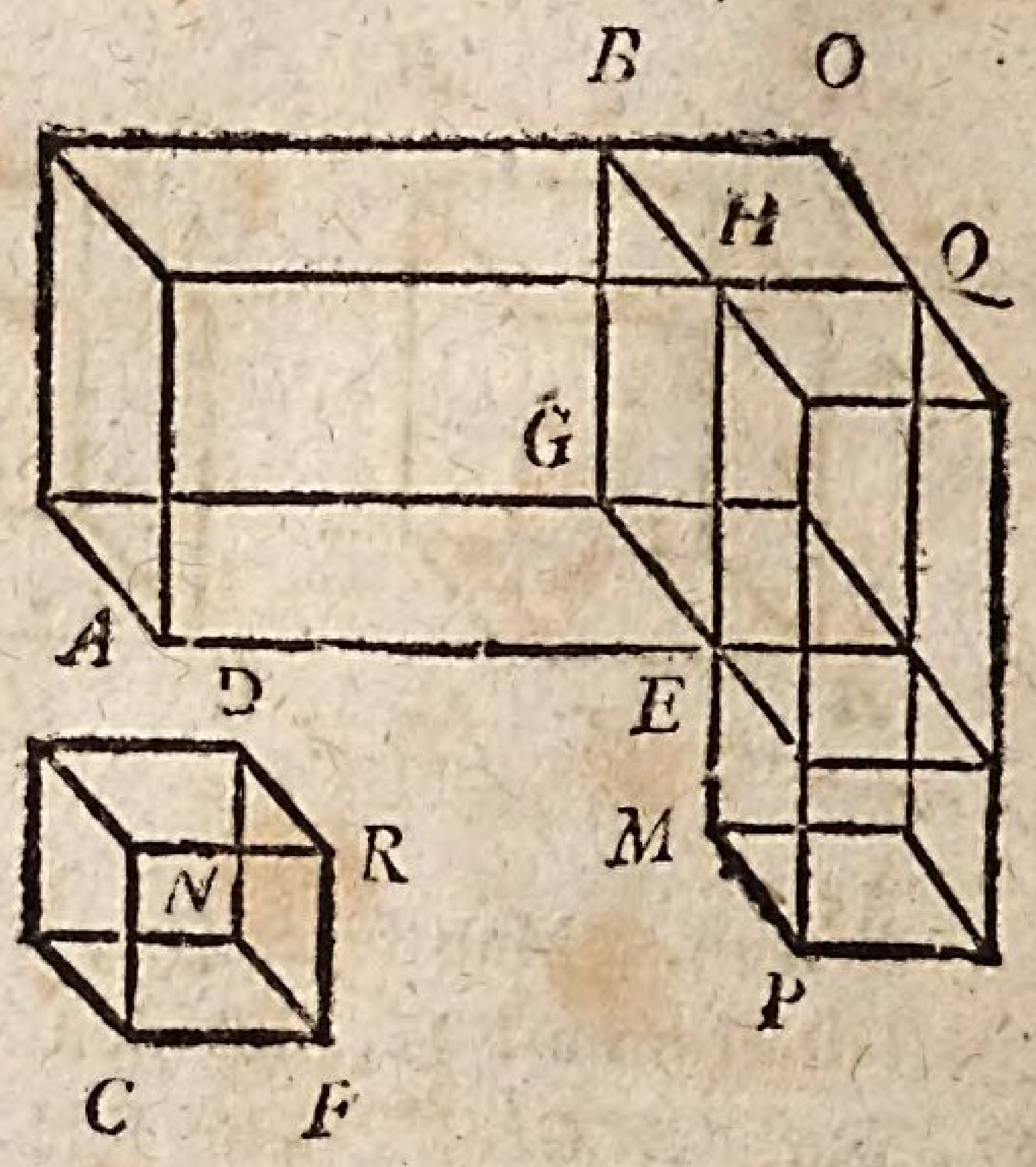
Demnach verhalten fich Parallelepipeda u. f. w. w. z. e. w.

33. *Saz.*

Lehrfaz. Aehnliche Parallelepipeda find in dreymal höherem Verhältniffe ihrer homologen Seiten.

Es feyen die Parallelepipeda A*B*, CD einander ähnlich, und die Seite AE der Seite CF homolog, fo behaupte ich, dafs

dafs der Körper AB zu dem Körper CD ein dreymal höheres Verhältnifs habe, als die AE zu der CF.



Beweis. Man verlängere die AE, GE, HE in gerader Richtung nach EK, EL, EM, mache der CF die EK, der FN die EL, der FR die EM gleich, und vollende das Parallelogramm KL und den Körper KP.

*D*a nun die beyden EK, EL den beyden CF, FN gleich find, aber auch der Winkel KEL dem Winkel CFN gleich ift, weil wegen der Aehnlichkeit der Körper AB, CD auch der Winkel AEG dem Winkel CFN gleich ift, fo ift das Parallelogramm KL dem Parallelogramme CN gleich und ähnlich. Aus eben den Gründen ift auch das Parallelogramm KM dem Parallelogramme CR, und das Parallelogramm EP dem Parallelogramme DF gleich und ähnlich, demnach find die drey Parallelogramme des Körpers KP den drey Parallelogrammen des Körpers CD gleich und ähnlich. *A*ber (11, 24. S.) find diefe drey den drey gegenüberliegenden gleich und ähnlich; folglich ift der ganze Körper KP (11, 10. Erkl.) dem ganzen Körper CD gleich und ähnlich. Man ergänze das Parallelogramm GK, und errichte auf den Grundflächen GK, KL, und unter einerley Höhe mit dem A*B*, die Körper EO, LQ. *D*a nun wegen der Aehnlichkeit der Körper AB, C*D*, die AE zu der CF fich verhält wie die EG zu der FN und wie die EH zu der FR, die CF aber der EK, die FN der EL, und die FR der EM gleich ift, fo verhält fich die AE zu der EK wie die GE zu der EL, und wie die HE zu der EM. Aber (6, 1. S.) verhält fich das Parallelogramm AG zu dem Parallelogramme GK wie die AE zu der EK, und das Parallelogramm GK zu dem Parallelogramme KL wie die GE zu der EL, und

das

das Parallelogramm QE zu dem Parallelogramme KM wie die HE zu der EM; folglich verhält sich auch das Parallelogramm AG zum Parallelogramme GK wie das GK zu dem KL, und wie das EQ zu dem KM. Aber (11, 32. S.) verhält sich das Parallelogramm AG zum Parallelogramme GK wie der Körper AB zum Körper EO, das Parallelogramm GK zum Parallelogramme KL wie der Körper EO zum Körper QL, und das Parallelogramm QE zum Parallelogramme KM wie der Körper QL zum Körper KP; folglich verhält sich auch der Körper AB zum Körper EO wie der EO zu dem QL und der QL zu dem KP. Wenn aber vier Grössen stetig proportionirt sind, so hat (5, 11. Erkl.) die erste zur vierten ein dreymal höheres Verhältniss, als die erste zur zweyten; folglich hat auch der Körper AB zum Körper KP ein dreymal höheres Verhältniss, als der Körper AB zum Körper EO. Aber (11, 32. S.) verhält sich der Körper AB zum Körper EO wie das Parallelogramm AG zum Parallelogramme GK und (6, 1. S.) wie die Linie AE zu der EK; folglich hat auch der Körper AB zum Körper KP ein dreymal höheres Verhältniss, als die Linie AE zu der EK. Es ist aber der Körper KP dem Körper CD, und die Linie EK der CF gleich; folglich hat auch der Körper AB zum Körper CD ein dreymal höheres Verhältniss, als seine homologe Seite AE zur homologen Seite CF, w. z. e. w.

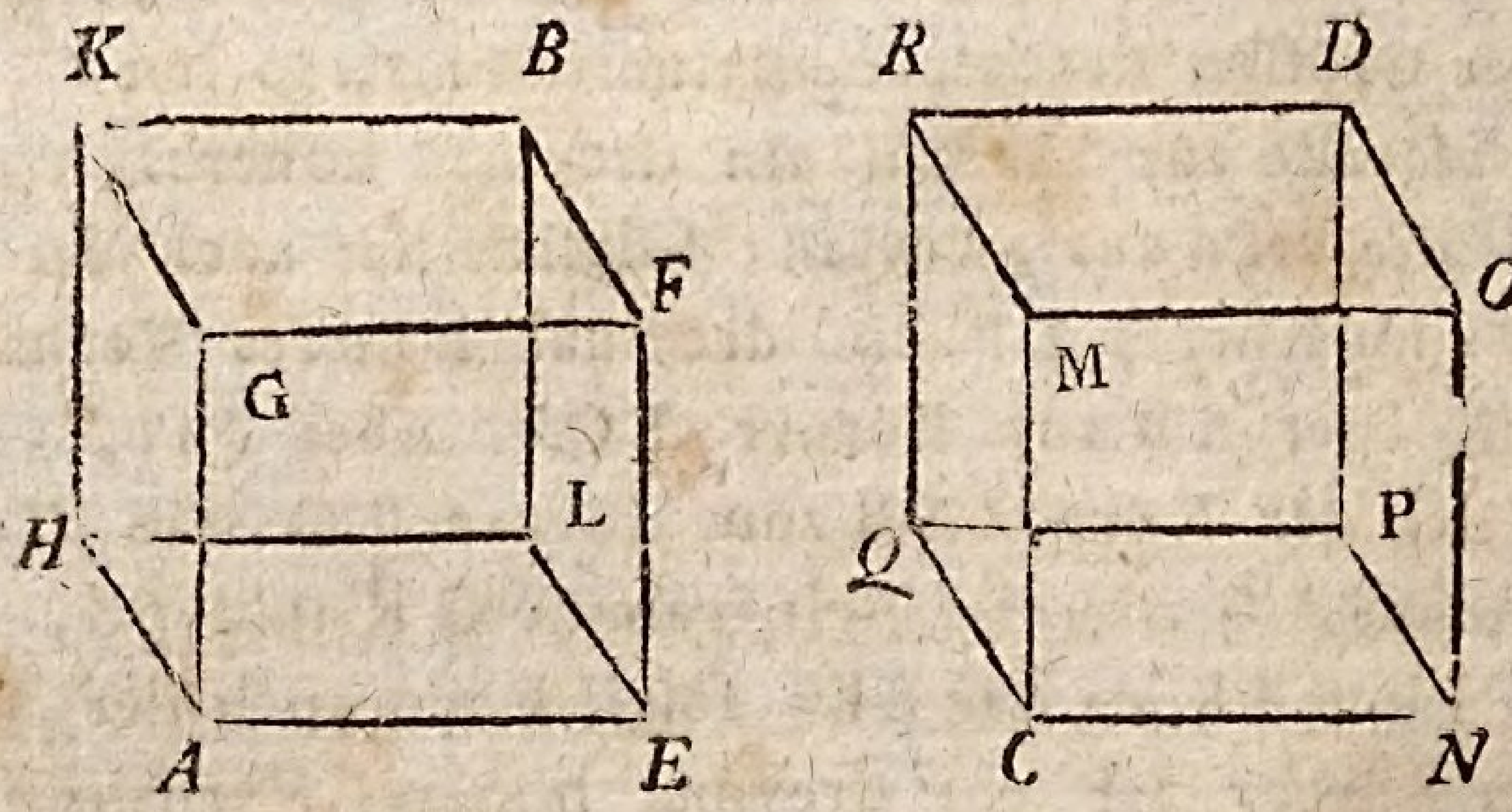
Zusaz. Hieraus erhellet, dass wenn vier gerade Linien proportionirt sind, die erste zur vierten sich verhalte wie das Parallelepipedon über der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipedon über der zweyten, weil nämlich die erste zur vierten ein dreymal höheres Verhältniss hat, als zur zweyten.

34. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Parallelepipeda einander gleich sind, so sind ihre Grundflächen

den Höhen umgekehrt proportionirt; und Parallelepipeda, deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt ſind, ſind einander gleich.

Es ſeyen die gleichen Parallelepipeda AB, CD, ſo behaupte ich, daſs ihre Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt ſeyen, das heiſst, daſs die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ ſich verhalte, wie die Höhe des Parallelepipedons *CD* zur Höhe des Parallelepipedons *A* B.

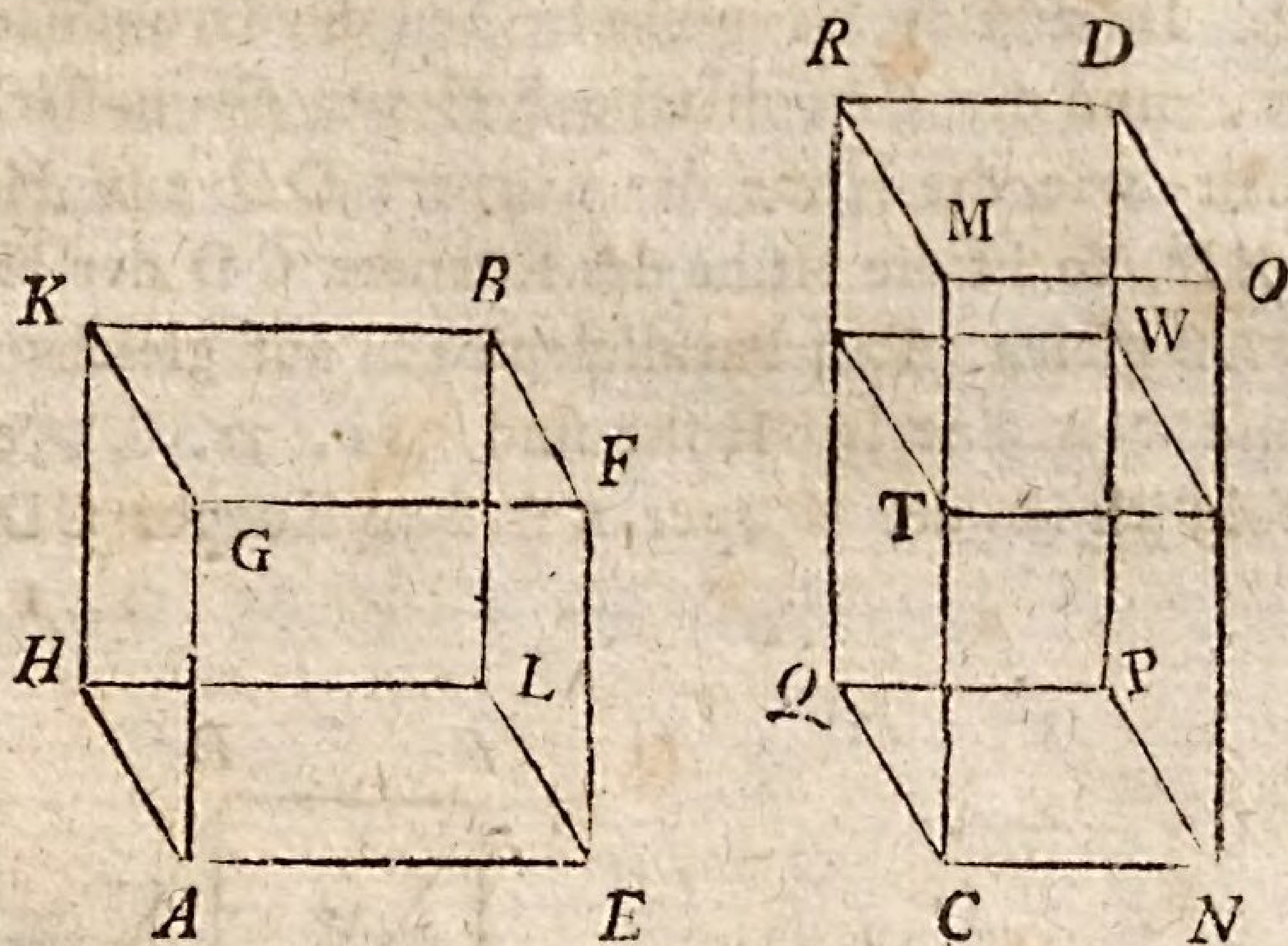


Beweis. Es ſeyen *zuerſt* die Seitenlinien AG, EF, LB, HK, CM, NO, PD, QR auf ihren Grundflächen lothrecht, ſo behaupte ich, daſs die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ ſich verhalte wie die Höhe CM zur Höhe AG.

Wenn die Grundfläche EH der Grundfläche NQ gleich iſt, ſo iſt, da auch das Parallelepipedon *A*B dem Parallelepipedon CD gleich iſt, auch die Höhe CM der Höhe AG gleich. Denn wenn die Grundflächen EH, NQ einander gleich und doch die Höhen AG, CM ungleich wären, ſo wäre (11, 31. S.) auch der Körper AB dem Körper CD nicht gleich. Es iſt aber angenommen, daſs er ihm gleich ſey; folglich iſt auch die Höhe CM der Höhe AG nicht ungleich, alſo gleich, und mithin verhält ſich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe CM zur Höhe AG, und es erhellet alſo, daſs die Grundflächen der Körper AB, CD den Höhen derſelben umgekehrt proportionirt ſeyen.

Aber

Aber die Grundfläche EH sey der Grundfläche NQ nicht gleich, sondern die EH sey grösser, so muss, da der Körper *AB* dem CD gleich ist, die CM grösser, als die *AG*, seyn. Denn wäre dies nicht, so wären wiederum (11, 31. S.) die Parallelepipeda *AB*, CD einander nicht gleich. Nach der Voraussezung aber sind sie einander gleich. Man seze also die CT der AG gleich, und vollende das Parallele-

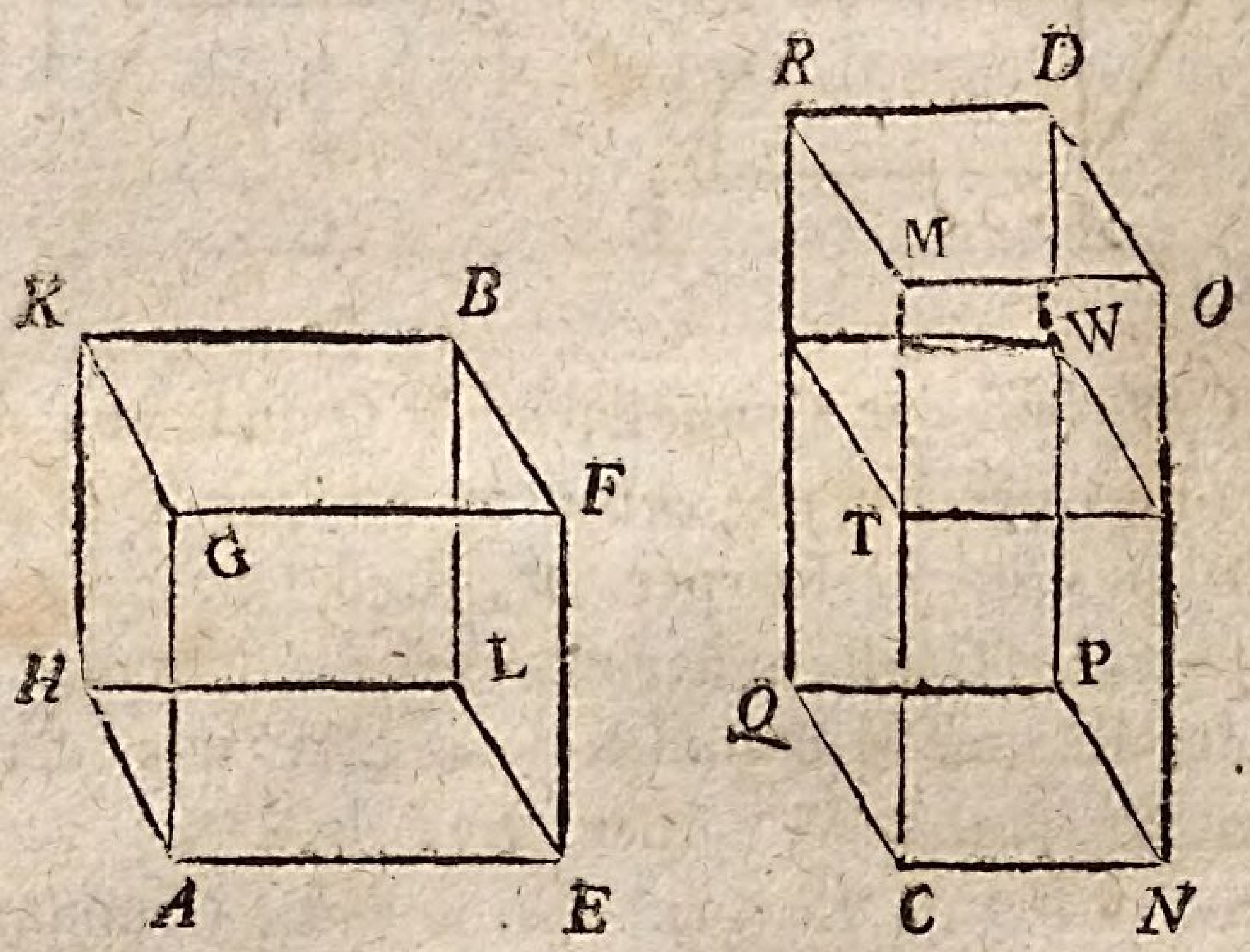


pipedon CW auf der Grundfläche NQ und von der Höhe CT. Da nun der Körper *A*B dem Körper C*D* gleich ist, *C*W aber ein anderer Körper ist, und (5, 7. S.) gleiche Grössen zu *einer* Grösse einerley Verhältniss haben, so verhält sich der Körper *A* B zum Körper *C* W wie der Körper *CD* zum Körper CW. Aber (11, 32. S.) verhält sich der Körper AB zum Körper CW wie die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ, denn die Körper AB, CW sind einander gleich. Hingegen (11, 25. S.) verhält sich der Körper CD zum Körper CW wie die Grundfläche MQ zur Grundfläche QT, und (6, 1. S.) wie die Grundlinie M*C* zur Grundlinie *C*T; folglich verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Linie MC zu der *C*T. Es ist aber die CT der AG gleich; folglich verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Linie MC zur Linie *A*G. Demnach sind der Körper *A*B, CD Grundflächen ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Es

Es ſeyen nun *zweytens* die Grundflächen der Körper AB, CD ihren Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte ſich die Grundfläche EH zur Grundfläche MQ wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, ſo behaupte *ich*, daſs der Körper AB dem Körper CD gleich ſey.

Die Seitenlinien ſeyen wiederum auf den Grundflächen lothrecht. Da nun die Grundfläche EH der Grundfläche NQ gleich iſt, und die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ ſich verhält wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, ſo iſt die Höhe des Körpers CD der Höhe des Körpers AB gleich. Aber Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe ſind (11, 31. S.) einander gleich; folglich iſt der Körper AB dem Körper CD gleich.

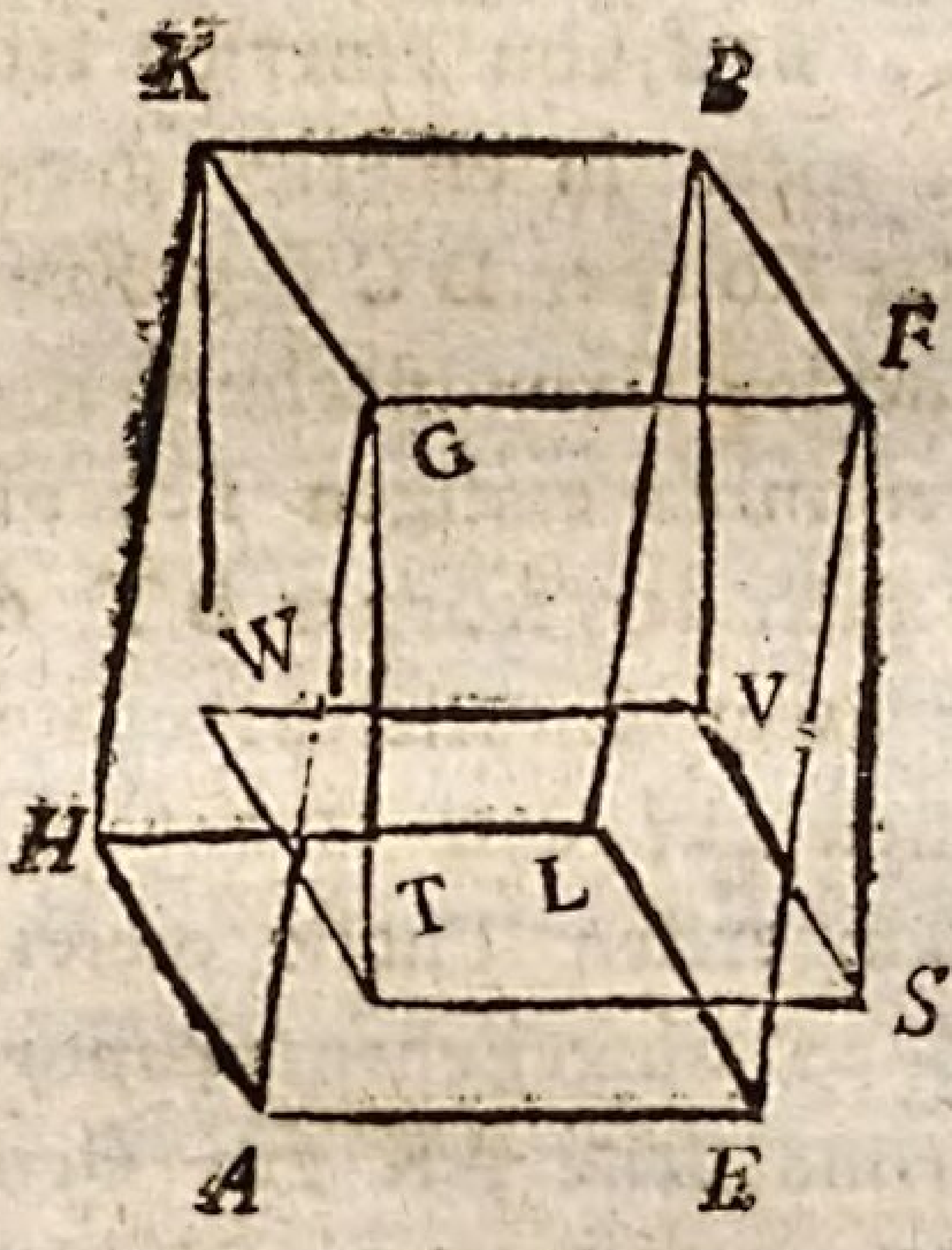


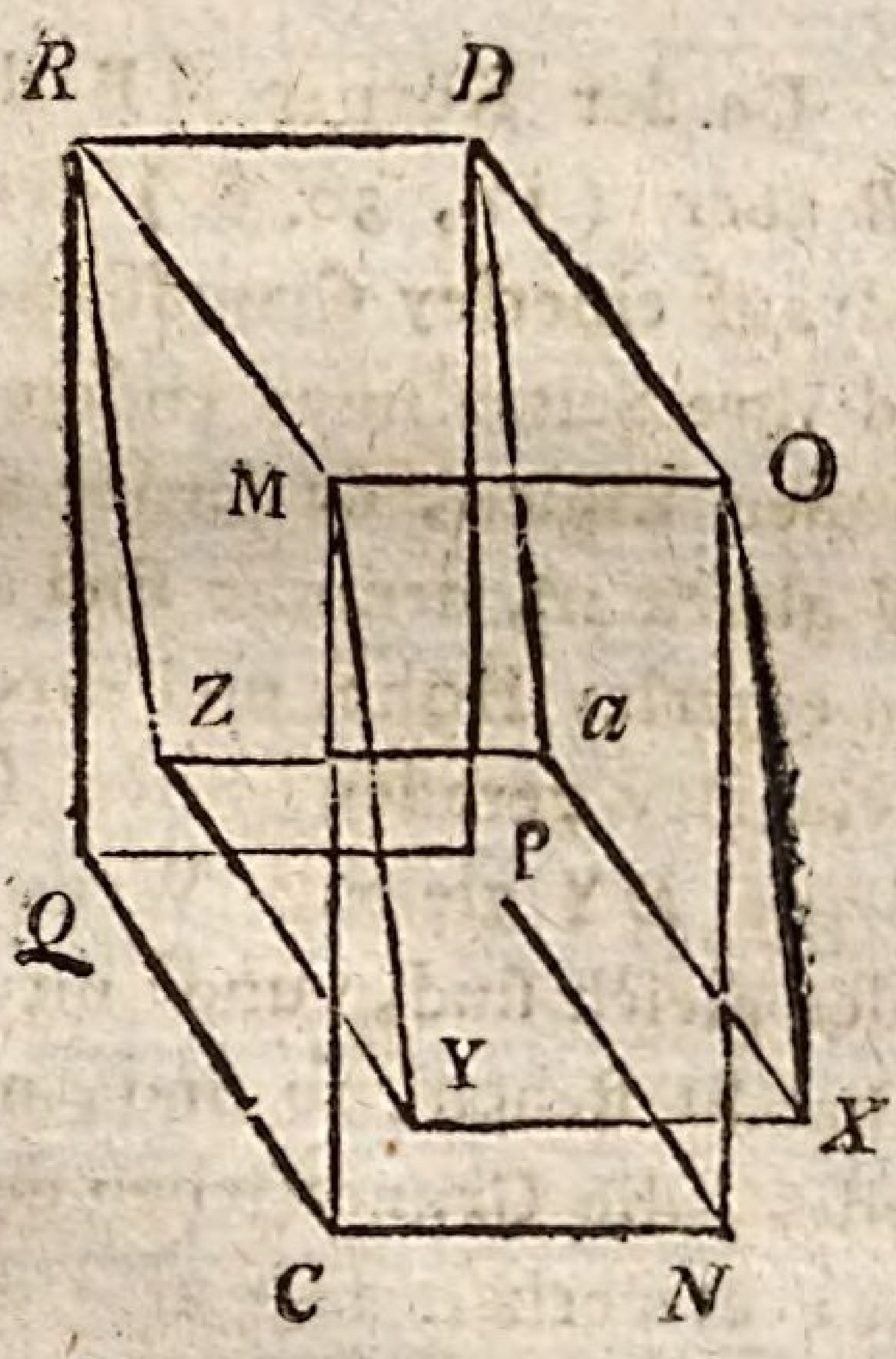
Es ſey aber die Grundfläche EH der Grundfläche NQ nicht gleich, ſondern die EH ſey gröſſer, ſo iſt auch die Höhe des Körpers CD gröſſer, als die Höhe des Körpers AB, das heiſst, die CM gröſſer, als die AG. Man nehme wiederum die AG der CT gleich, und vollende, wie zuvor, den Körper CW. Da nun die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ ſich verhält wie die CM zu der AG, die AG aber der CT gleich iſt, ſo verhält ſich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die MC zu der CT. Aber (11,

32.

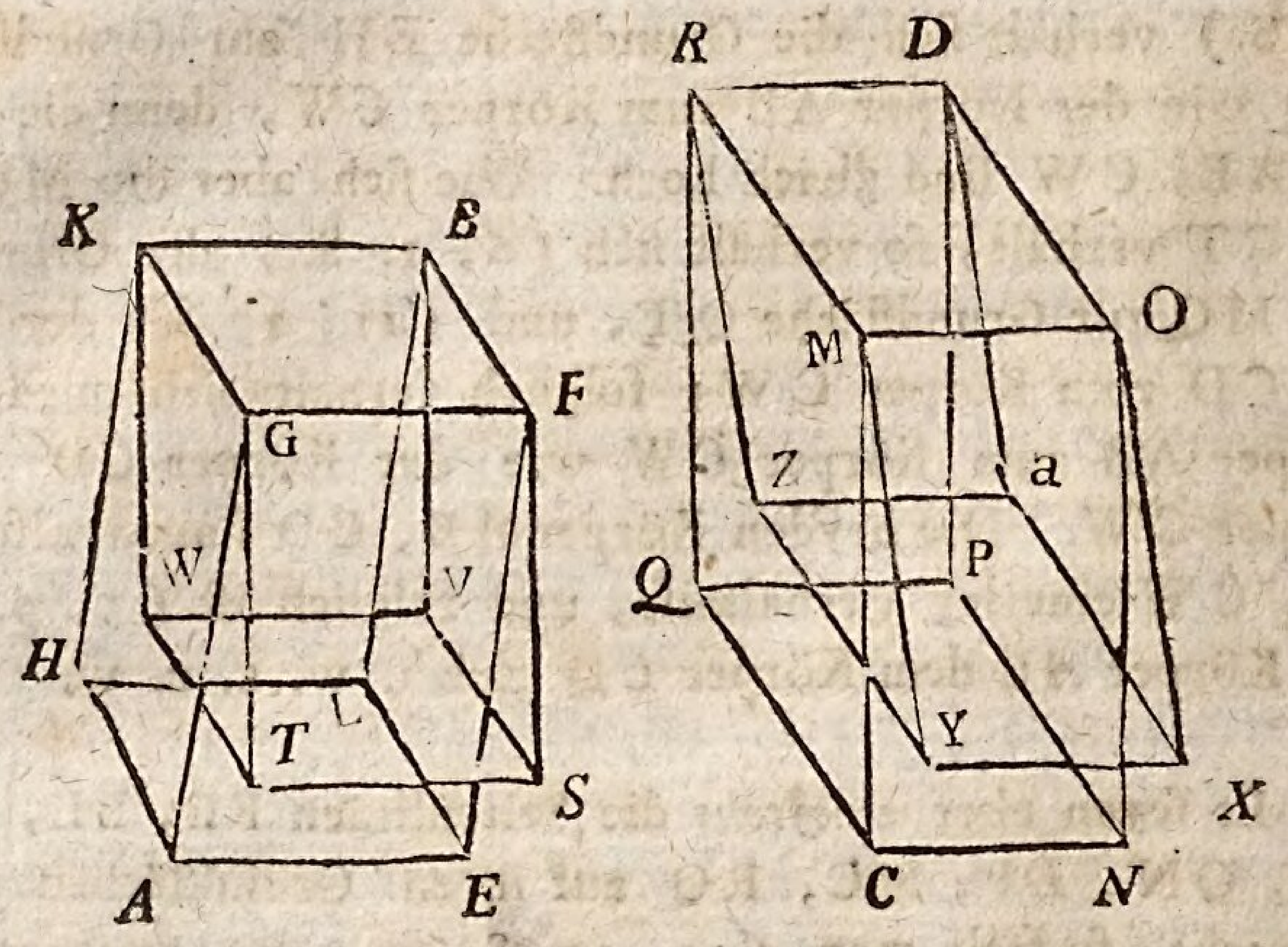
32. S.) verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie der Körper AB zum Körper CW, denn die Körper AB, CW sind gleich hoch. Wie sich aber die MC zu der CT verhält, so verhält sich (6, 1. S.) die Grundfläche MQ zur Grundfläche QT, und (11, 25 S.) der Körper CD zum Körper CW; folglich verhält sich auch der Körper AB zum Körper CW wie der Körper CD zum Körper CW. Die beyden Körper AB, CD haben also zu dem CW einerley Verhältniss, und folglich ist (5, 9. S.) der Körper *A*B dem Körper *C*D gleich. w. z. e. w.

Es seyen aber *zweytens* die Seitenlinien FE, BL, G*A*, K*H*, ON, *D*P, MC, RQ auf ihren Grundflächen nicht lothrecht, so fälle man (11, 11. S.) von den Punkten F, G, B, K, O, M, *D*, R auf die Ebenen der Grundflächen





EH, NQ Lothe, welche den Ebenen in den Punkten S, T, V, W, X, Y, *a*, Z begegnen, und vollende die Körper FW, OZ, so behaupte ich, dass auch dann, wenn die Körper AB, *CD* einander gleich sind, ihre Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt seyen, und die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ sich verhalte wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB.



Da der Körper *AB* dem Körper CD, dem Körper *AB* aber (11, 30. S.) der Körper BT gleich ist, denn sie sind auf einerley Grundfläche FK, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden geraden Linien, da ferner auch der Kö rper D C dem Körper D Y gleich ist, denn sie sind auf einerley Grundfläche O R und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden Linien, so ist auch der Körper BT dem Körper *D*Y gleich. Wenn aber zwey Parallelepipeda einander gleich sind, und ihre Höhen auf den Grundflächen belothrecht stehen, so sind, nach dem ersten Theile dieses Beweises, die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt; es verhält sich also die Grundfläche FK zur Grundflache OR wie die Höhe des Körpers *D*Y zur Höhe des Körpers *B*T. Und (11, 24. S.) ist die Grundfläche FK der Grundfläche EH, die Grundfläche OR aber der Grundfläche NQ gleich; folglich verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe des Körpers DY zur Höhe des Körpers BT. Die Körper *D*Y, BT aber haben mit den Körpern *D*C, B*A* einerley Höhe; folglich verhält sich die Grunfläche *E*H zur Grundfläche NQ wie die Höhe des Körpers DC zur Höhe des Körpers BA. Demnach sind die

die Grundflächen der Körper A B, *D* C ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Es seyen nun aber die Grundflächen der Körper A *B*, CD den Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche E H zur Grundfläche N Q wie die Höhe des Körpers C D zur Höhe des Körpers A B, so behaupte ich, daſs der Körper *A B* dem Körper CD gleich sey.

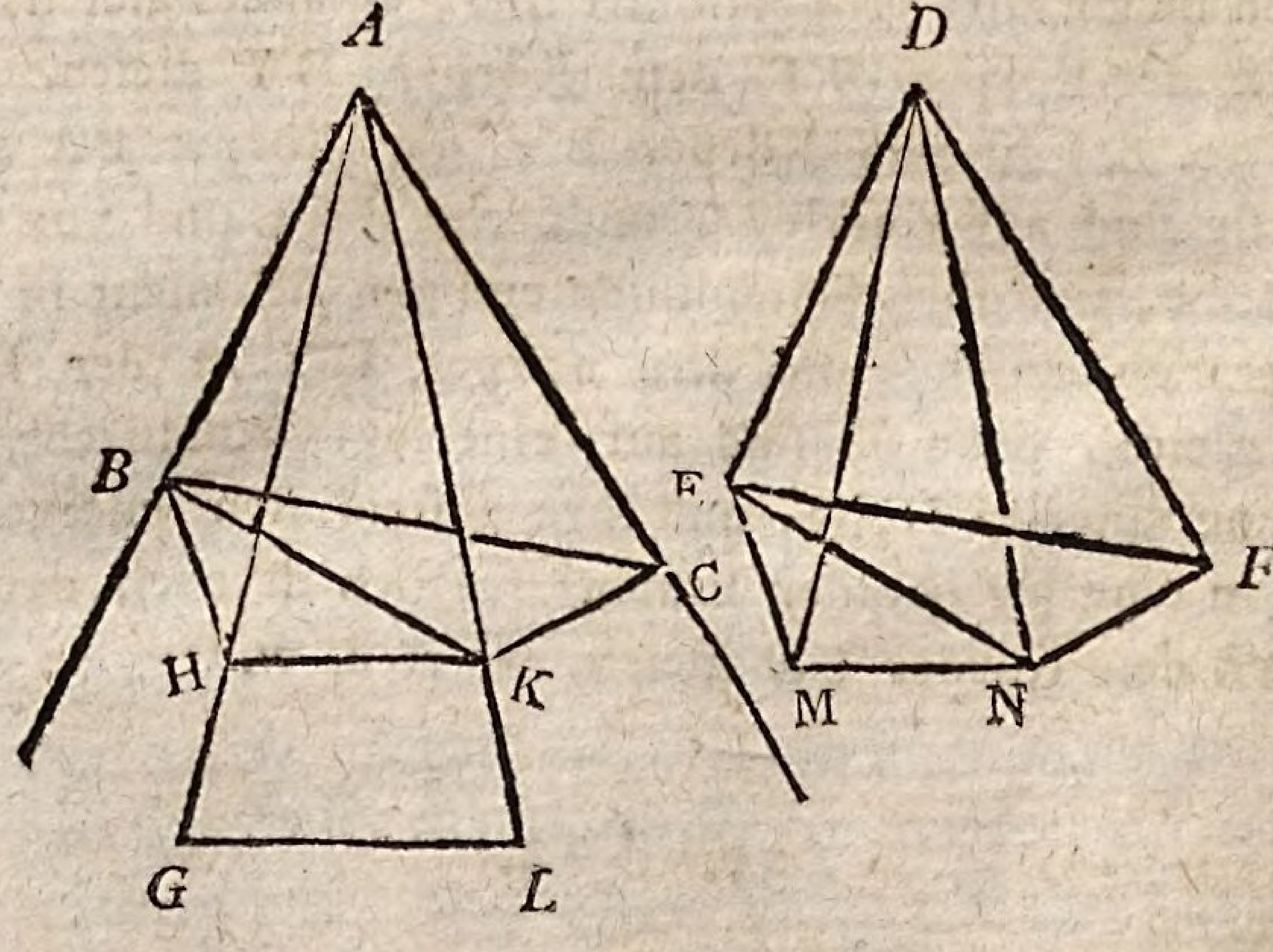
*D*a, nach der vorigen Construction, die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ sich verhält wie die Höhe des Körpers A B, die Grundfläche E H aber der F K, und die NQ der O R gleich ist, so verhält sich auch die Grundfläche F K zur Grundfläche O R wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers A *B*. die Körper AB, CD aber haben mit den Körpern B T, D Y einerley Höhen, es verhält sich also die Grundfläche FK zur Grundfläche O R wie die Höhe des Körpers DY zur Höhe des Körpers B T. Demnach sind die Grundflächen der Körper B T, *D* Y ihren Höhen umgekehrt proportionirt. Nach dem ersten Theile dieses Beweises aber sind Parallelepipeda, deren Höhen auf den Grundflächen lothrecht stehen, und deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt sind, einander gleich; folglich ist der Körper *B*T dem Körper DY gleich. *A*ber (11, 30. S.) ist dem Körper BT der Körper BA gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche FK, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden Linien, und dem Körper DY ist der Körper *D* C gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche OR, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden Linien; folglich ist auch der Körper AB dem Körper *CD* gleich, w. z. e. w.

35. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man zwey ebene Winkel hat, und in ihren Scheitelpunkten gera-

de Linien aufstellt, die mit den zuerst gesezten Linien Winkel machen, die einander stückweise gleich sind, in den aufgestellten Linien aber willkührliche Punkte annimmt, und von diesen auf die Ebenen, in welchen die zuerst angenommenen Winkel liegen, Lothe fällt, von den Punkten aber, in welchen diese Lothe die Ebenen treffen, nach den zuerst angenommenen Winkeln gerade Linien zieht, so schliessen diese mit den aufgestellten Linien gleiche Winkel ein.

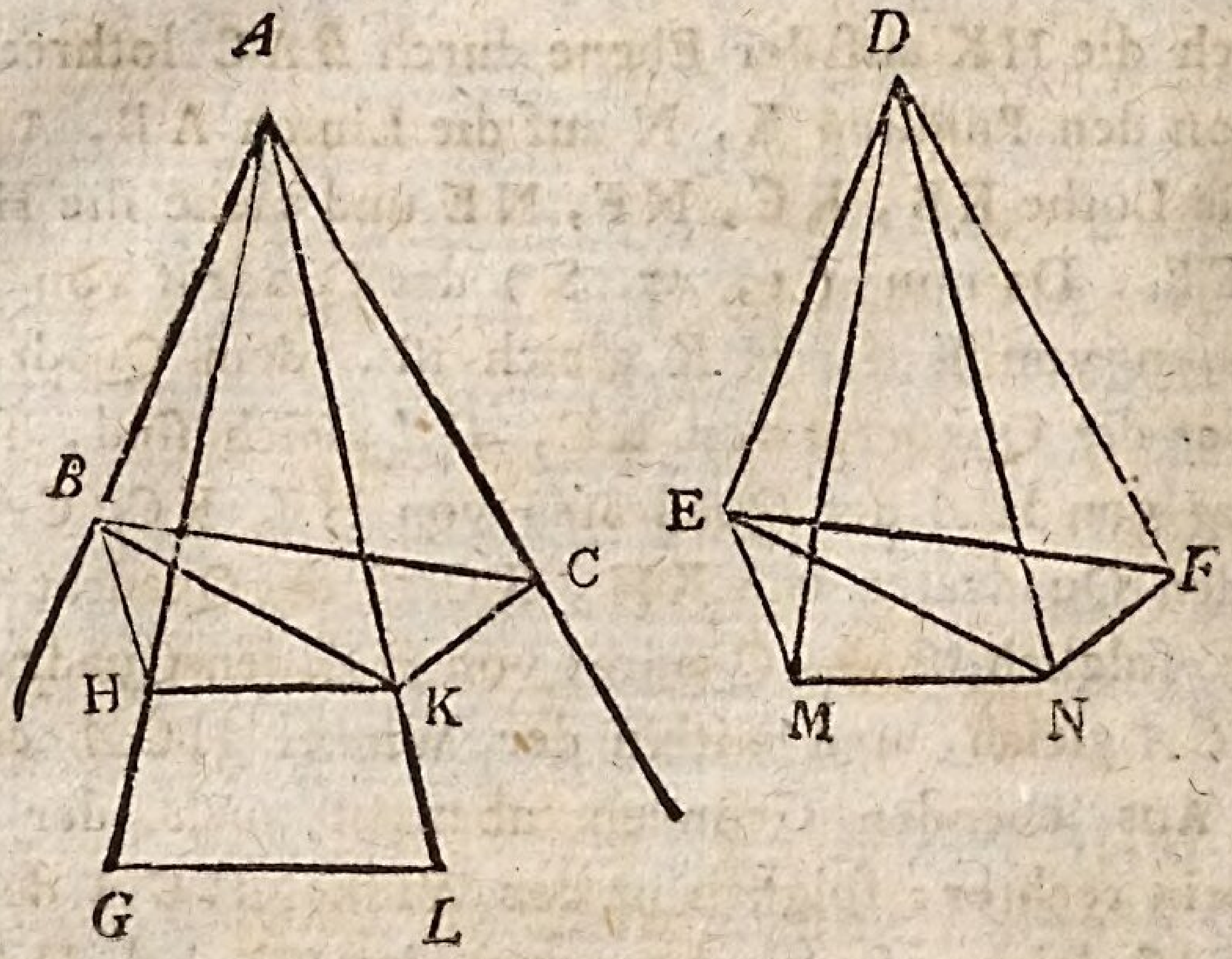
Es seyen die zwey geradlinigten Winkel B A C, E *D* F und in den Punkten A, *D* stelle man die Linien A G, *D* M auf, die mit den Anfangs gesezten geraden Linien Winkel machen, die einander stückweise gleich seyen, nämlich den Winkel M D E, der dem Winkel G A B, und den Winkel M D F, der dem Winkel G A C gleich sey, hierauf nehme man in den Linien A G, *D* M nach Belieben die Punkte G, M an, und fälle von diesen auf die Ebenen durch B *A* C, E D F die Lothe G L, M N, die den Ebenen in den Punkten L, N begegnen, und ziehe die L A, N D, so behaupte ich, dass der Winkel G *A* L dem Winkel M D N gleich sey.



Beweis. Man mache der D M die A H gleich, und ziehe durch H der G L die H K parallel. Es ist aber die G L auf der Ebene durch B A C lothrecht, folglich ist (11, 8.

S.)

S.) auch die HK auf der Ebene durch *B*AC lothrecht. Man fälle von den Punkten K, N auf die Linien AB, AC, DF, DE die Lothe KB, K*C*, NF, NE und ziehe die HC, CB, MF, FE. Da nun (1, 47. S.) das Quadrat von *A*H den Quadraten von K*A*, H*K* gleich ist, dem Quadrate von KA aber die Quadrate von KC, *CA* gleich sind, so ist das Quadrat von H*A* den Quadraten von HK, KC, CA gleich. Aber den Quadraten von KH, KC ist das Quadrat von HC gleich; folglich ist das Quadrat von H*A* den Quadraten von HC, *CA* gleich, und mithin der Winkel HC*A* ein rechter. Aus ebenden Gründen aber ist auch der Winkel DFM ein rechter; folglich ist der Winkel HC*A* dem Winkel DFM gleich. Es ist aber auch der Winkel HAC dem Winkel MDF gleich; folglich sind M*D*F, HAC zwey *D*reyecke, in welchen zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist, und zwar die, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt, die AH nämlich der DM; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten einander stückweise gleich, die AC also ist der DF gleich. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die AB der *D*E gleich sey. Man ziehe die HB, ME. *D*a nun das Quadrat von AH den Quadraten von *A*L, KH gleich ist, dem Quadrate von AK aber die Quadrate von A*B*, BK gleich sind, so sind die Quadrate von AB, *B*K, KH dem Quadrate von AH gleich. Aber den Quadraten von BK, KH ist das Quadrat von BH gleich, denn der Winkel HKB ist ein rechter, weil die HK auf der angenommenen Ebene lothrecht ist; das Quadrat von AH also ist den Quadraten von A*B*, BH gleich; folglich ist der Winkel H*B*A ein rechter. Aus ähnlichen Gründen ist auch der Winkel DEM ein rechter. Nach der Voraussezung aber ist der Winkel BAH dem Winkel EDM gleich; nun ist aber auch die AH der DM gleich; folglich ist auch die A*B* der *D*E gleich. Da nun die A*C* der *D*F, die AB aber der DE gleich ist, und mithin die beyden CA, A*B* den beyden F*D*, DE gleich sind, aber auch der Winkel CAB dem Winkel FDE gleich ist, so ist (1, 4. S.) die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich, die beyden Dreyecke sind einander



der gleich, und die übrigen Winkel in beyden ſind einander ſtückweiſe gleich; Der Winkel A C B alſo iſt dem Winkel DFE gleich. Es iſt aber, nach der Conſtruction, der rechte Winkel ACK dem rechten Winkel DFN, folglich auch der übrige Winkel BCK dem übrigen Winkel EFN gleich. Aus ähnlichen Gründen iſt auch der Winkel CBK dem Winkel FEN gleich. Demnach ſind BCK, EFN zwey Dreyecke, in welchen zwey und zwey Winkel einander ſtückweiſe gleich ſind, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich iſt, diejenige nämlich, welche an den gleichen Winkeln liegt, das heiſst die BC der EF; folglich ſind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten in beyden einander ſtückweiſe gleich; die CK alſo iſt der FN gleich. Es iſt aber auch die AC der DF gleich, mithin ſind die beyden AC, CK den beyden DF, FN gleich, und ſchlieſſen rechte Winkel ein, folglich iſt (1, 4. S.) die Grundlinie AK der Grundlinie DN gleich. Da nun auch die AH der DM gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von AH dem Quadrate von DM gleich. Aber (1, 47. S.) ſind dem Quadrate von AH die Quadrate von AK, KH gleich, denn der Winkel AKH iſt ein rechter, dem Quadrate von DM aber ſind die Quadrate von DN, NM gleich, weil der Winkel DNM ein rechter iſt; folglich ſind die Quadrate von AK, KH den Quadraten von DN, NM gleich. Unter dieſen iſt aber das Quadrat

drat von *A*K dem Quadrate von DN gleich; folglich ist auch der Rest, das Quadrat von KH, dem andern Reste, dem Quadrate von NM, mithin die HK der NM selbst gleich. *D*a nun die beyden HA, AK den beyden MD, *D*N stückweise gleich sind, und von der Grundlinie HK gezeigt worden ist, dass sie der Grundlinie NM gleich sey, so ist (1, 8. S.) auch der Winkel HAK dem Winkel MDN gleich, w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass wenn man zwey gleiche ebene geradlinigte Winkel hat, und auf denselben gleiche gerade Linien aufstellt, die mit den zuerst gesezten geraden Linien Winkel machen, die einander stückweise gleich sind, die Lothe, die von ihnen nach den Ebenen, in welchen die zuerst angenommenen Winkel liegen, gefällt werden, einander gleich seyen.

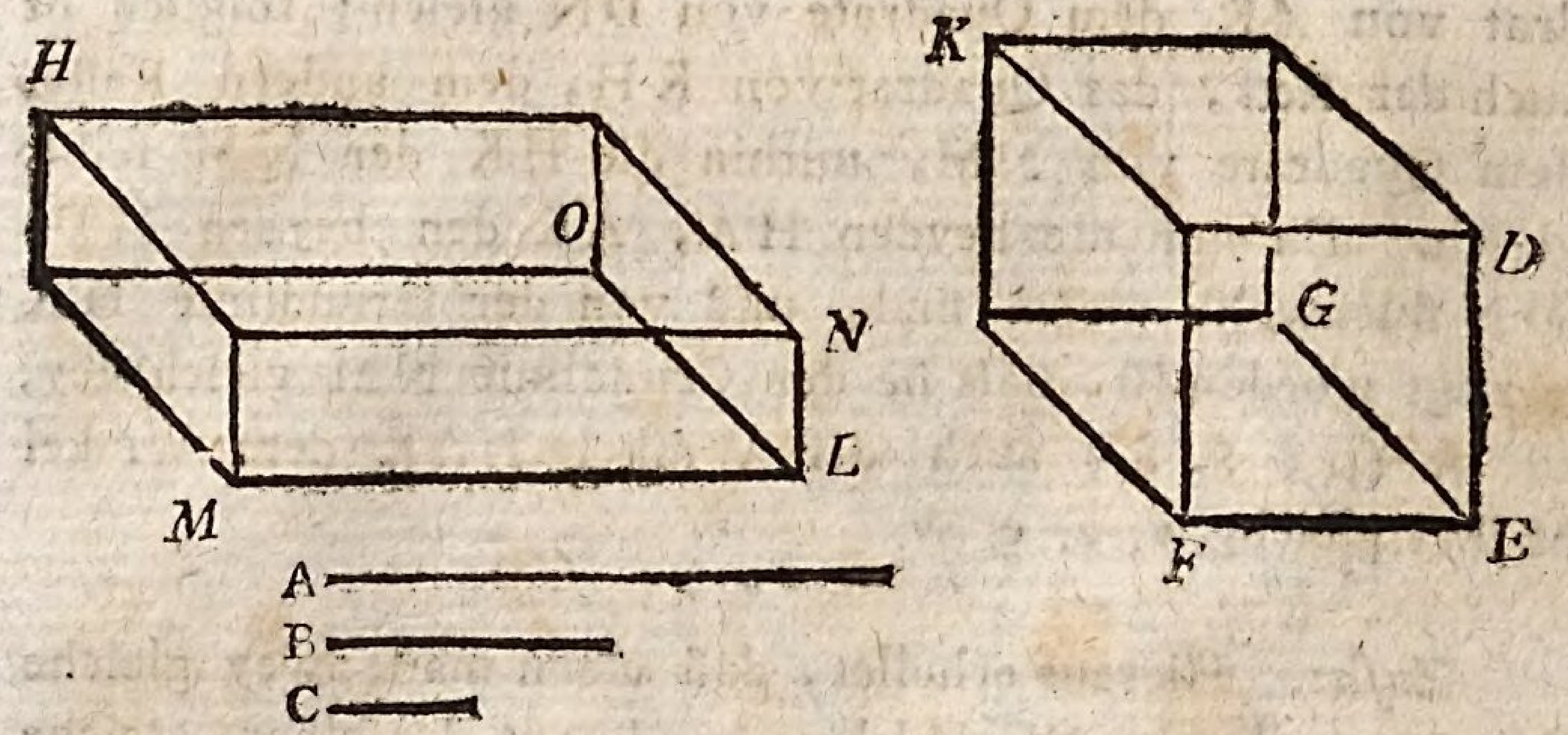
36. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey gerade Linien proportionirt sind, so ist das aus denselben errichtete Parallelepipedon dem aus der mittleren errichteten gleichseitigen und mit dem erstern gleichwinklichten gleich.

Es seyen die drey gerade Linien A, *B*, *C* proportionirt und es verhalte sich die A zu der B wie die B zu der C, so behaupte ich, dass das aus den drey Linien A, B, C errichtete Parallelepipedon dem aus der *B* errichteten gleichseitigen und mit dem erstern gleichwinklichten gleich sey.

Beweis. Es sey an E ein körperlicher Winkel, von den drey ebenen Winkeln DEG, GEF, FED eingeschlossen; man mache der B jede der Linien DE, GE, EF gleich, und vollende das Parallelepipedon EK, hierauf mache man der A die LM gleich, und seze (11, 26. S.) an den Punkt L der Linie LM einen körperlichen Winkel, der dem bey

E



E gleich sey, und von den Winkeln NLO, OLM, MLN eingeschlossen werde. Endlich mache man der B die LO, der C die LN gleich.

Da nun die *A* zu der B sich verhält wie die B zu der C, die A aber der LM, und die B einer jeden der Linien LO, EF, EG, ED, die *C* endlich der LN gleich ist, so verhält sich die LM zu der EF wie die DE zu der LN, auch sind die um die gleichen Winkel MLN, DEF liegenden Seiten umgekehrt proportionirt; folglich ist (6, 14. S.) das Parallelogramm MN dem Parallelogramme *D*F gleich. Und da die zwey ebenen geradlinigten Winkel DEF, NLM gleich, und auf ihnen die geraden Linien LO, EG aufgestellt sind, die einander selbst gleich sind, und mit den Anfangs gesezten Linien Winkel einschliessen, die einander stückweise gleich sind, so sind (11, 35. Zus.) die Lothe, die von den Punkten G, O auf die Ebenen durch NLM, *D*EF gefällt werden, einander gleich, und mithin die Körper LH, EK von gleicher Höhe. Parallelepipeda aber auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe sind (11, 31. S.) einander gleich; folglich ist der Körper HL dem Körper EK gleich. Es ist aber HL der von den dreyen *A*, B, *C*, und EK der von der Linie B errichtete Körper; und mithin ist der von den dreyen A, *B*, *C* errichtete Körper dem von der *B* errichteten gleichseitigen und mit dem vorgenannten gleichwinklichten gleich.

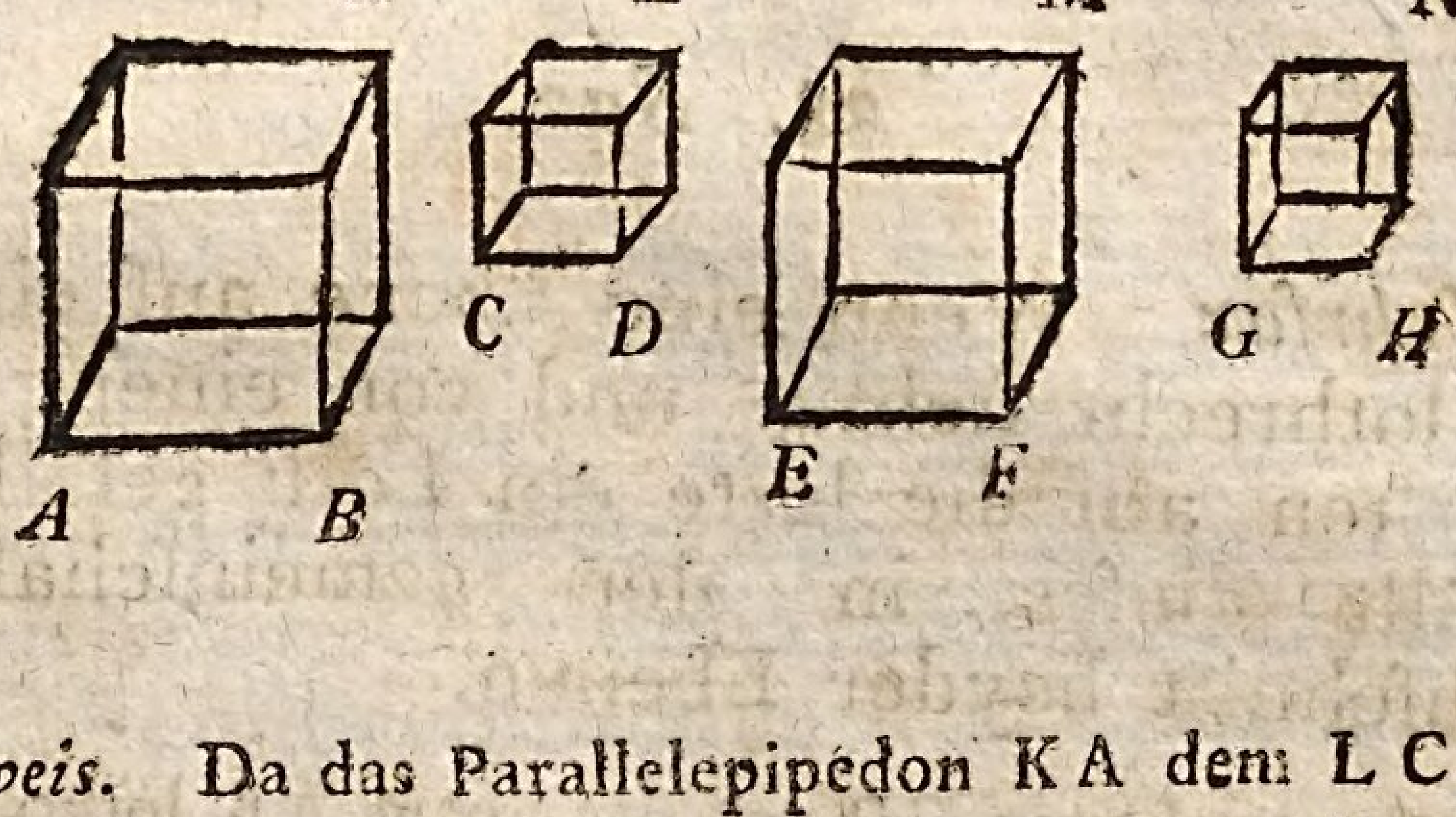
Wenn

Wenn demnach drey gerade Linien proportionirt ſind u. ſ. w. w. z. e. w.

37. *Saz.*

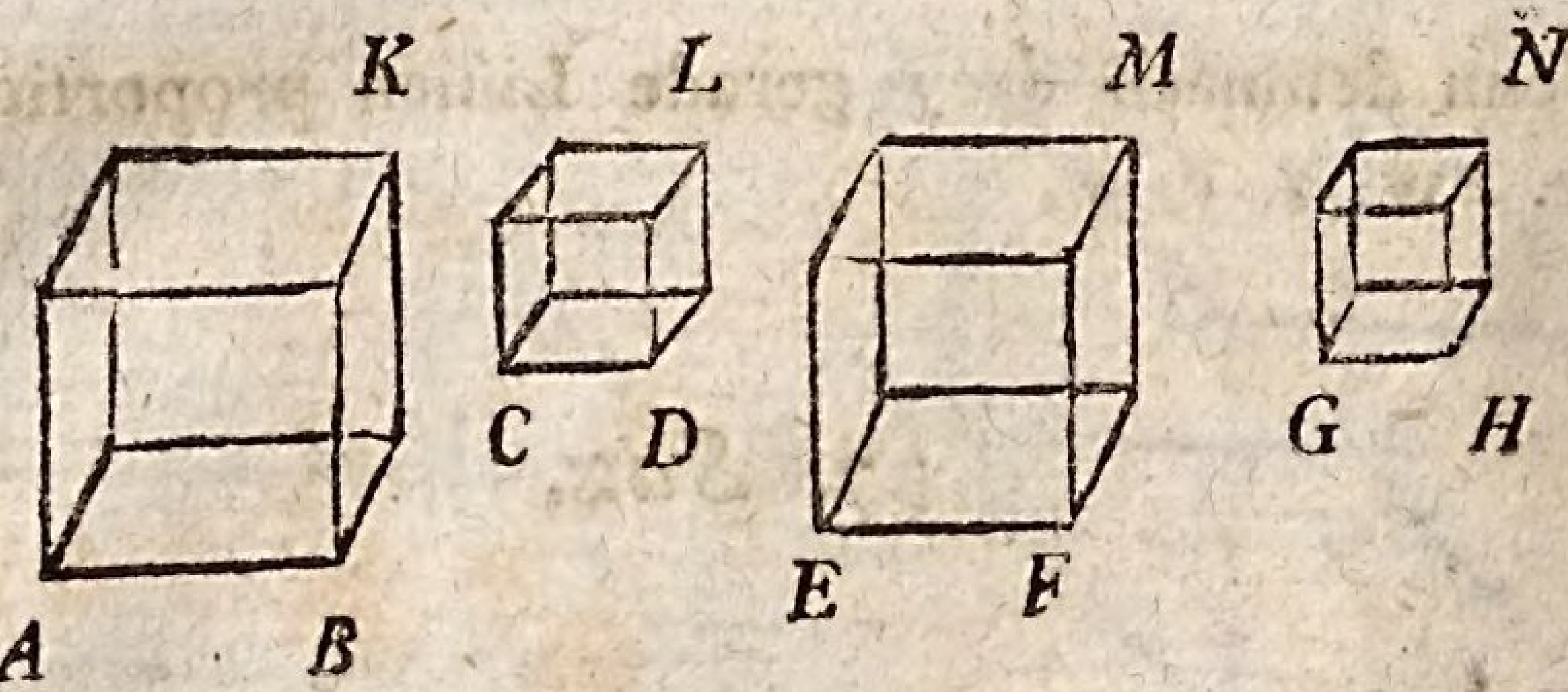
Lehrſaz. Wenn vier gerade Linien proportionirt ſind, ſo ſind auch die von denſelben beſchriebenen ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda proportionirt; und wenn die von vier geraden Linien beſchriebenen ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda proportionirt ſind, ſo ſind auch die geraden Linien proportionirt.

Es ſeyen die vier geraden Linien A*B*, *CD*, EF, GH proportionirt, ſo daſs die AB zu der *C*D ſich verhalte wie die EF zu der GH, und man beſchreibe von den Linien *AB*, CD, EF, GH die ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepida K*A*, LC, ME, NG, ſo behaupte ich, daſs der Körper KA zu dem LC ſich verhalte wie der ME zu dem NG.



Beweis. Da das Parallelepipedon KA dem LC ähnlich iſt, ſo hat (11, 33. S.) K*A* zu dem LC ein dreymal höheres Verhältniſs, als die AB zu der C*D*. Aus eben den Gründen hat auch der Körper ME zu dem NG ein dreymal höheres Verhältniſs, als die EF zu der GH. Nach der Vorausſezung aber verhält ſich die *A*B zu der CD wie die

EF



EF zu der GH; folglich verhält ſich die Figur AK zu der LC wie die ME zu der NG.

Es verhalte ſich nun der Körper AK zu dem LC wie der ME zu dem NG, ſo behaupte ich, daſs die Linie AB zu der CD ſich verhalte wie die EF zu der GH.

Da wiederum der Körper AK zu dem LC ein dreymal höheres Verhältniſs hat, als die AB zu der CD, der Körper ME aber zu dem NG ein dreymal höheres Verhältniſs hat, als die EF zu der HG, und da der Körper AK zu dem Körper LC ſich verhält wie der Körper ME zu dem Körper NG; ſo verhält ſich auch die AB zu der CD wie die EF zu der GH.

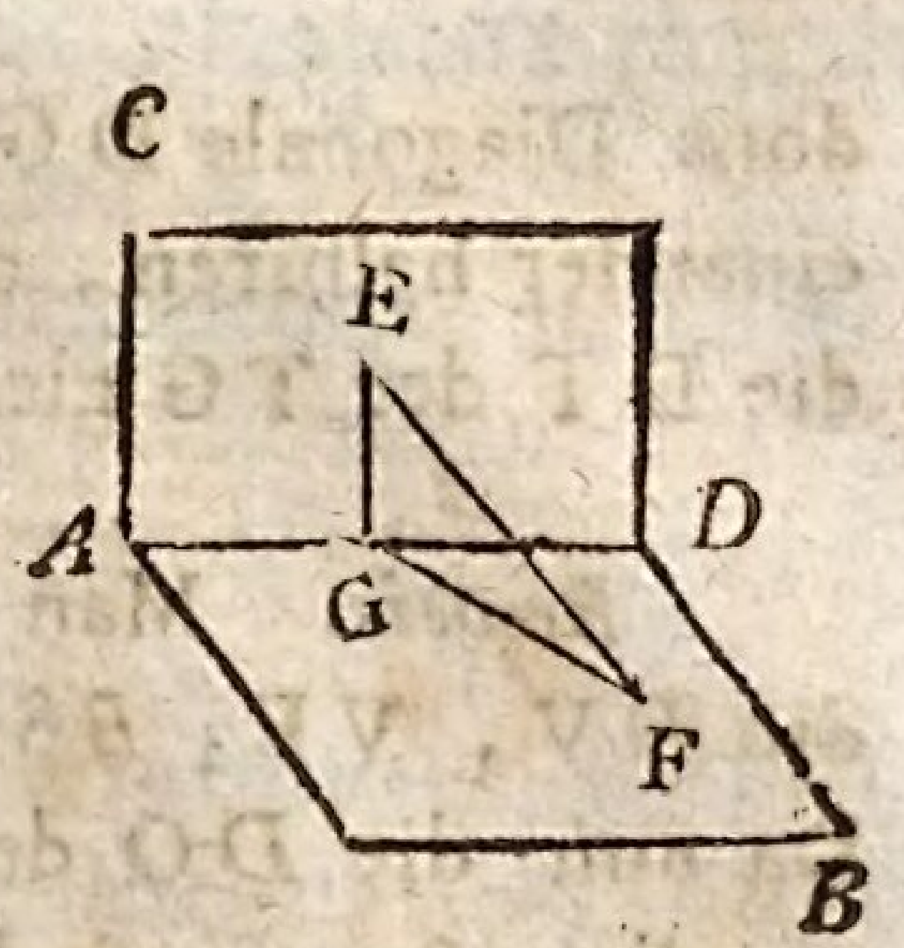
Wenn demnach vier gerade Linien proportionirt ſind, u. ſ. w. w. z. e. w.

38. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine Ebene auf einer andern lothrecht ſteht, und von einem Punkte der erſten auf die lezte ein Loth gefällt wird, ſo fällt dieſes in den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt beyder Ebenen.

Es ſey die Ebene CD auf der Ebene AB lothrecht, der gemeinſchaftliche Durchſchnitt beyder ſey AD, und man nehme in der Ebene CD nach Belieben einen Punkt E an, ſo behaupte ich, daſs das Loth, das von dem Punkte E nach der Ebene AB gefällt wird, in die Linie AD falle.

Be-



Beweis. Gesezt, dies wäre nicht, sondern es fiele, die Möglichkeit angenommen, ausserhalb derselben, wie die E F, und begegnete der Ebene A B in dem Punkte F, so fälle man von dem Punkte F (1, 10. S.) auf die D A in der Ebene A *B* das Loth F G welches (11, 4. Erkl.) auch auf der Ebene C D lothrecht seyn wird, hierauf ziehe man die E G.

Da die F G auf der Ebene C D lothrecht ist, die E G aber, die mit ihr in der nämlichen Ebene liegt, sie berührt, so ist (11, 3. Erkl.) der Winkel F G E ein rechter. Aber auch die E F ist auf der Ebene A B lothrecht, folglich ist der Winkel E F G ein rechter, und mithin sind in dem Dreyecke E F G zwey Winkel zwey rechten gleich, was (1, 17. S.) ungereimt ist; folglich fällt das von dem Punkte E auf die Ebene A B gefällte Loth nicht ausserhalb der Linie D A; es fällt also in die D *A*.

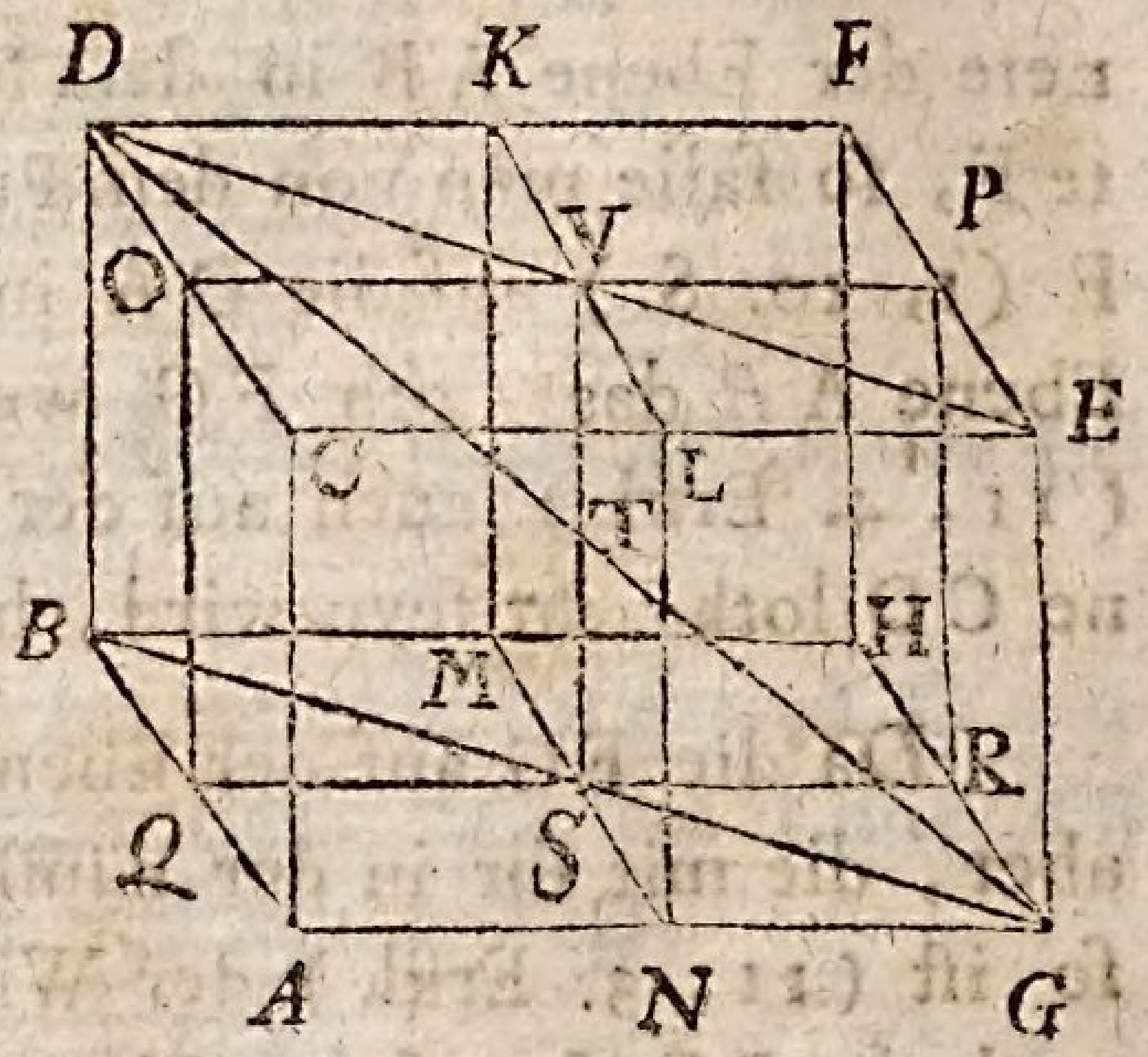
Wenn demnach eine Ebene auf einer andern lothrecht ist, u. s. w. w. z. e. w.

39. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man die Seiten der gegenüberliegenden Seitenflächen eines Parallelepipedons halbirt, und durch die Durchschnittspunkte Ebenen legt, so halbiren der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebenen und des Parallelepipedons Diagonale einander.

Man halbire die Seiten der gegenüberliegenden Seitenflächen C F, A H des Parallelepipedons *A* F in den Punkten K, L, M, N, O, P, Q, R, und lege durch diese Durchschnittspunkte die Ebenen K N, O R, der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebenen sey V S, und des Parallelepipedons

dons Diagonale D G, so behaupte ich, daſs die V S, D G einander halbiren, das heiſst, daſs die V T der T S, und die D T der T G gleich sey.



Beweis. Man ziehe die *D* V, V E, *B* S, S G. Da nun die *D* O der P E parallel iſt, ſo ſind (1, 29. S.) die Wechſelwinkel D O V, V P E einander gleich, und da die D O der P E, die O V aber der V P gleich iſt, und beyde gleiche Winkel einſchlieſſen, ſo iſt (1, 4. S.) die Grundlinie D V der Grundlinie V E, und das *Dreyeck* D O V dem Dreyecke V P E gleich, auch ſind in beyden die übrigen Winkel einander gleich, der Winkel O V D iſt alſo dem Winkel P V E gleich, und deſswegen (1, 14. S.) die D V E eine gerade Linie. Aus gleichen Gründen iſt auch die B S G eine gerade Linie, und die *B* S der S G gleich. Da nun (1, 34. S.) die C *A* der *D* B ſowohl, als der E G, gleich und parallel iſt, ſo iſt auch die *D* B der E G gleich und (1, 30. S.) parallel, und dieſe beyden werden von den Linien D E, *B* G verbunden, folglich iſt (1, 33. S.) auch die D E der *B* G parallel, auch hat man auf jeder von beyden nach Belieben die Punkte D, V, G, S angenommen, und die Linien D G, V S gezogen; folglich ſind (11, 7. S.) die D G, V S in *einer* Ebene. Da nun die D E der B G parallel iſt, ſo iſt (1, 29. S.) auch der Winkel E D T dem Winkel B G T gleich, denn ſie ſind Wechſelwinkel. Es iſt aber auch (1, 15. S.) der Winkel D T V dem Winkel G T S gleich; man hat alſo hier zwey Dreyecke D T V, G T S, in welchen zwey und zwey Winkel einander ſtückweiſe gleich ſind, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich iſt, die einem der gleichen Winkel gegenüberliegt, die D V nämlich der G S, denn ſie ſind die Hälften der D E, B G; folglich ſind (1, 26. S.)

auch

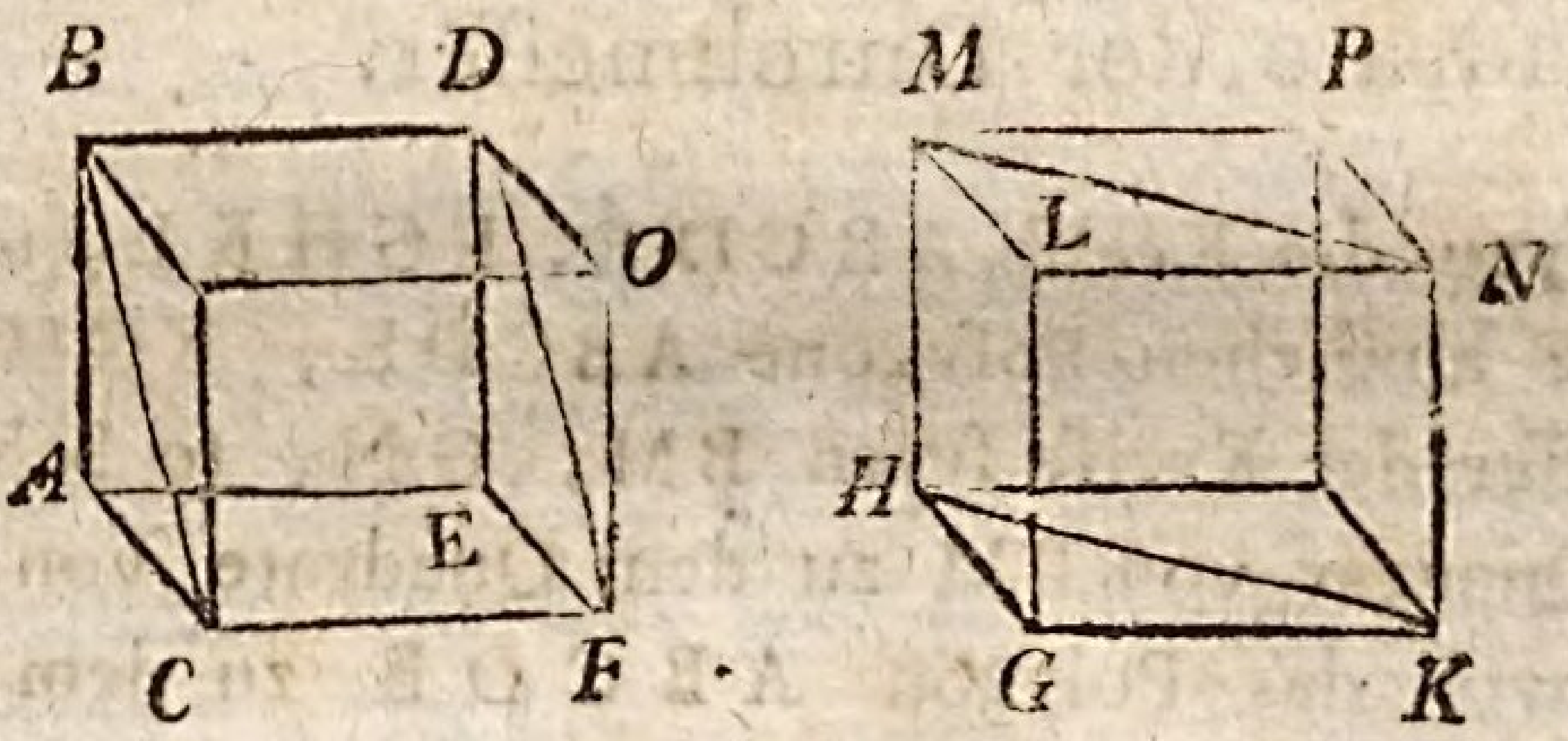
auch die übrigen Seiten beyder einander stückweise gleich, die D T also ist der T G, und die V T der T S gleich.

Wenn demnach in einem Parallelepipedon u. s. w. w. z. e. w.

40. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Prismen gleich hoch sind, und das eine von ihnen ein Parallelogramm, das andere aber ein Dreyeck zur Grundfläche hat, und das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks ist, so sind die Prismen einander gleich.

Es seyen die gleich hohen Prismen ABCDEF, GHKLMN, und das eine von ihnen habe zur Grundfläche das Parallelogramm *A* F, das andere aber das Dreyeck G H K, und das Parallelogramm A F sey das Doppelte des Dreyecks G H K, so behaupte ich, daſs das Prisma A B C *D* E F dem Prisma G H K L M N gleich sey.



Beweis. Man vollende die Körper A O, G P. Da nun das Parallelogramm A F das Doppelte des Dreyecks G H K ist, aber auch (1, 34. S.) das Parallelogramm H K das Doppelte des Dreyecks GHK ist, so ist das Parallelogramm A F dem Parallelogramme HK gleich. Nun sind aber Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe (11, 31. S.) einander gleich; folglich ist der Körper A O dem Körper GP gleich, auch ist von dem Körper *A* O das Prisma ABC*D*EF, und von dem Körper G P das Prisma G H K L M N die Hälfte; folglich ist das Prisma *A*BCDEF dem Prisma GHKLMN gleich.

Wenn demnach zwey Prismen gleich hoch sind u. s. w. w. z. e. w.

Euklids

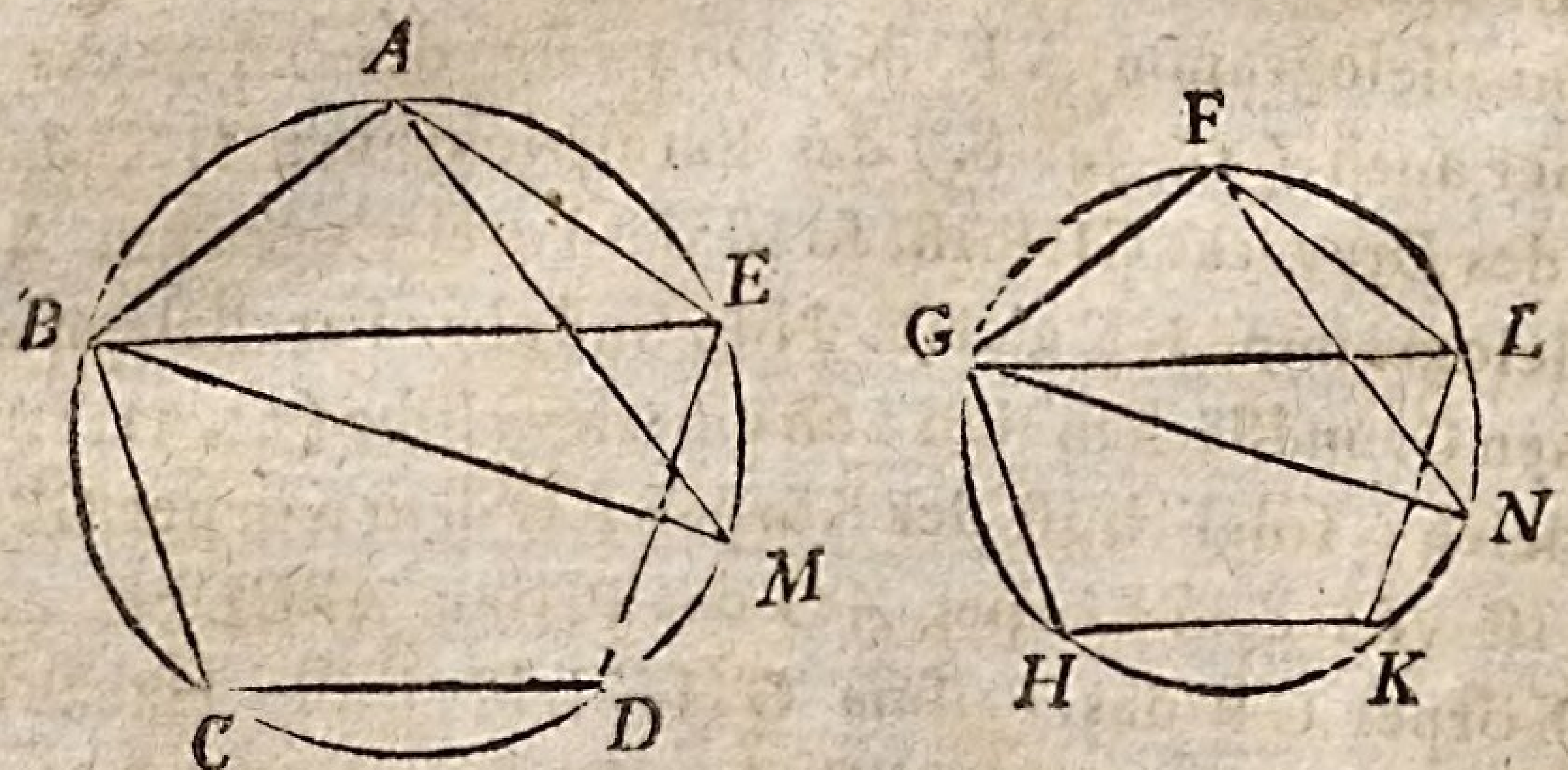
EUKLIDS ELEMENTE.

ZWOELFTES BUCH.

1. *Saz.*

Lehrsaz. Aehnliche Polygone, die in Kreise einbeschrieben sind, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser.

Es seyen die Kreise ABCDE, FGHKL, und in denselben die ähnlichen Polygone ABCDE, FGHKL, die Durchmesser der Kreise seyen BM, GN, so behaupte ich, dass das Quadrat von BM zu dem Quadrate von GN sich verhalte wie das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL.



Beweis. Man ziehe die Linien BE, AM, GL, FN. Da nun das Polygon ABCDE dem Polygone FGHKL ähnlich

lich ist, so ist (6, 1. Erkl.) der Winkel BAE dem Winkel GFL gleich, und es verhält sich die BA zu der AE wie die GF zu der FL. Demnach sind *BA*E, GFE zwey Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, nämlich den Winkel BAE dem Winkel GFL, und worin die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind; folglich ist (11, 29. S.) das Dreyeck ABE dem *D*reyecke FGL gleichwinklicht, und mithin der Winkel *AE B* dem Winkel FLG gleich. Aber (3, 21. S.) ist der Winkel *A*EB dem Winkel AMB gleich, denn sie sind auf einerley Bogen, der Winkel FLG aber ist dem Winkel FNG gleich; folglich ist auch der Winkel *A*MB dem Winkel FNG gleich. Es ist aber auch (3, 31. S.) der rechte Winkel *B*AM dem rechten Winkel GFN gleich, folglich ist auch der übrige Winkel dem übrigen gleich, und mithin das Dreyeck *A*BM dem Dreyecke FGN gleichwinklicht; folglich verhält sich (6, 4. S.) die BM zu der GN wie die B*A* zu der GF. Aber (6, 20 S.) ist das Verhältniſs des Quadrats von BM zu dem Quadrate von GN das zweymal höhere von dem Verhältniſſe der BM zu der GN, und das Verhältniſs des Polygons ABC*D*E zu dem Polygone FGHKL ist das zweymal höhere von dem Verhältniſſe der *B*A zu der GF; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) das Quadrat von *B*M zu dem Quadrate von GN wie das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL.

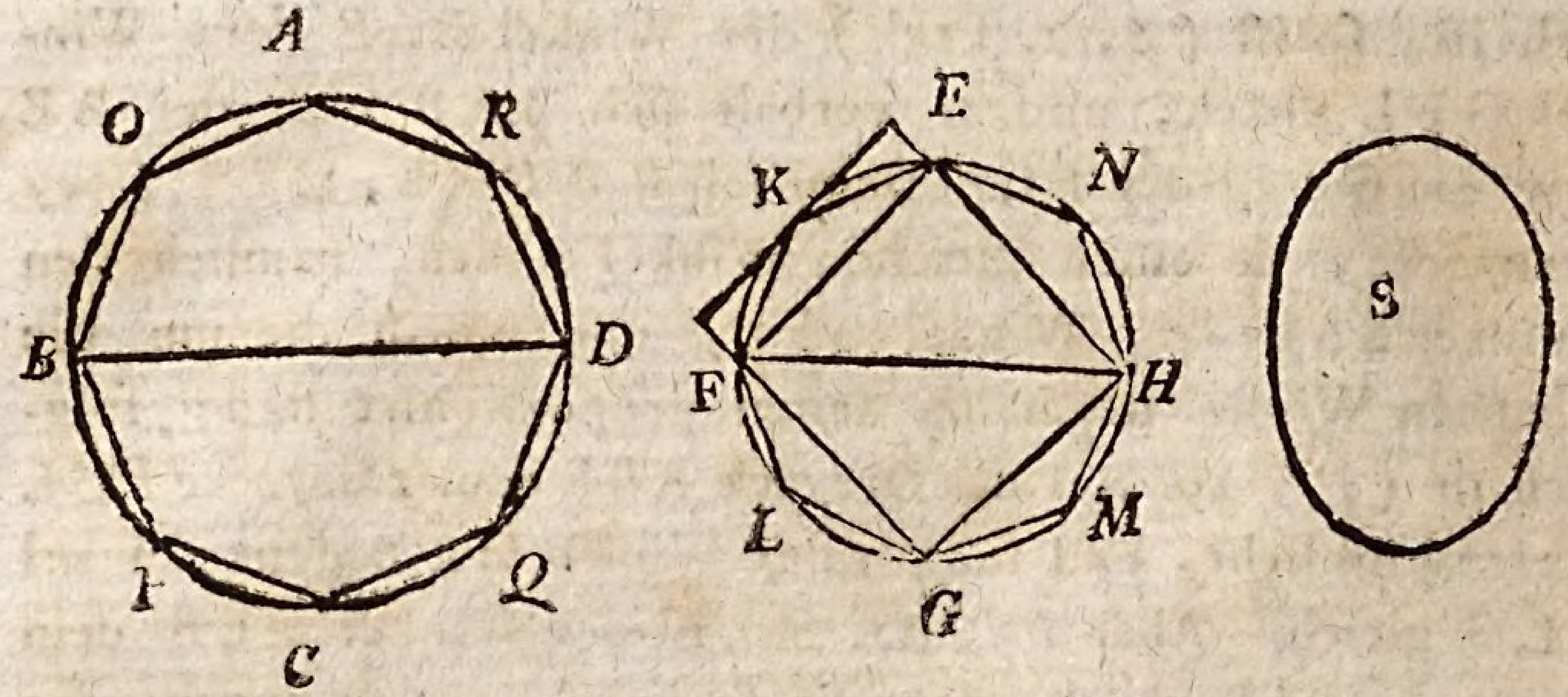
Demnach verhalten sich ähnliche Polygone u. s. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrſaz. Kreiſe verhalten ſich zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer.

Es ſeyen die Kreiſe ABCD, EFGH ihre Durchmeſſer ſeyen BD, FH, ſo behaupte ich, daſs das Quadrat von BD zu dem Qaudrate von FH ſich verhalte wie der Kreis *AB*CD zu dem Kreiſe EFGH,

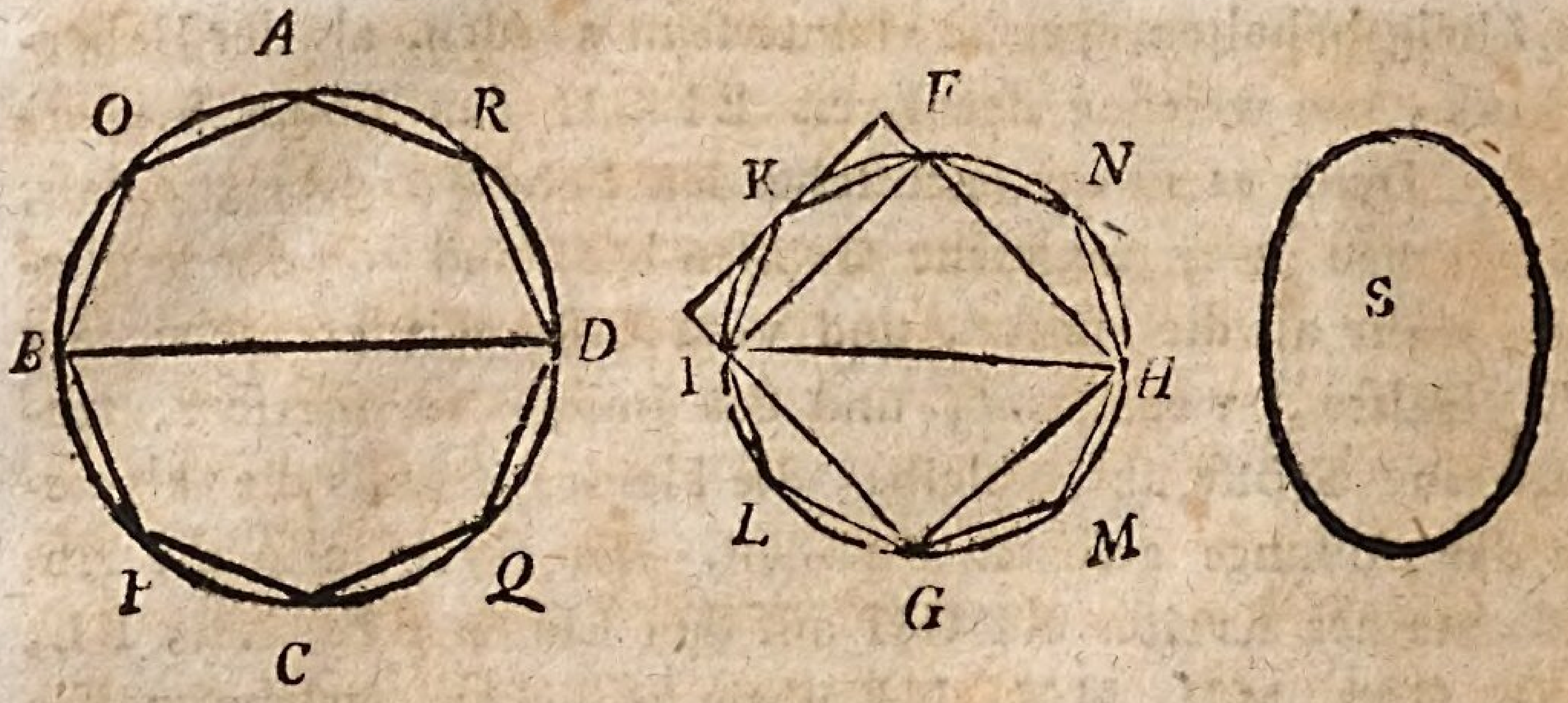
Be-



Beweis. Wäre dies nicht, so verhielte sich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der Kreis ABCD zu einem Raume, der entweder kleiner, oder grösser, als der Kreis EFGH, wäre. Er sey *zuerst* kleiner, und heisse S. In dem Kreise EFGH beschreibe man das Quadrat EFGH. Nun ist das in den Kreis beschriebene Quadrat grösser, als die Hälfte des Kreises EFGH, weil, wenn man durch die Punkte E, F, G, H die Berührungslinien zieht, (1, 47. S. u. 3, 31. S.) das Quadrat EFGH die Hälfte des um den Kreis beschriebenen Quadrats ist. Der Kreis aber ist kleiner, als das um ihn beschriebene Quadrat, folglich ist das Quadrat EFGH grösser, als die Hälfte des Kreises EFGH. Man halbire die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten K, L, M, N, und ziehe die EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, so ist jedes der Dreyecke EKF, FLG, HMG, HNE grösser, als der halbe Kreisabschnitt, in welchem es liegt. Wenn man daher durch die Punkte K, L, M, N die Berührungslinien des Kreises ziehet, und die Parallelogramme über den Linien EF, FG, GH, HE, vollendet, so ist (1, 41. S.) jedes der Dreyecke EKF, FLG, GMH, HNE die Hälfte des zu ihm gehörigen Parallelogramms. Aber der Abschnitt ist kleiner, als das Parallelogramm; folglich ist jedes der Dreyecke EKF, FLG, GMH, HNE grösser, als der halbe Kreisabschnitt, in welchem es liegt. Halbirt man also die übrigbleibenden Bogen aufs neue, und zieht die geraden Linien, und sezt dies so fort, so wird man zulezt Kreisabschnit-

te

te übrig behalten, welche kleiner seyn werden, als der Ueberschuss, um welchen der Kreis EFGH den Raum S übertrift. Denn es ist im nachstehenden Lehnsaze gezeigt, dass, wenn man zwey ungleiche Grössen hat, und von der grösseren mehr als die Hälfte, und vom Reste wieder mehr, als die Hälfte, wegnimmt, und das immer so fortsezt, zulezt eine Grösse übrig bleibe, die kleiner ist, als die kleinere der Anfangs gesezten Grössen. Es seyen also die *Ab*schnitte des Kreises EFGH auf den Linien EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE übrig geblieben, welche grösser seyen, als der Ueberschuss, um welchen der Kreis EFGH den Raum S übertrift, so ist folglich das übrige Polygon EKFLGMHN grösser, als der Raum S. Man beschreibe nun auch in dem Kreise ABCD ein dem Polygone EKFLGMHN ähnliches Polygon AOBPCQ*D*R, so verhält sich (12, 1. S.) das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie das Polygon AOBPCQ*D*R zu dem Polygone EKFLGMHN. Aber, nach der Voraussezung, verhält sich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der Kreis ABCD zu dem Raume S; folglich verhält sich auch der Kreis ABCD zu dem Raume S wie das Polygon AOBPCQ*D*R zu dem Polygone EKFLGMHN, und *verwechselt*, der Kreis ABCD zu dem darein beschriebenen Polygone wie der Raum S zu dem Polygone EKFLGMHN. Es ist aber der Kreis ABC*D* grösser, als das darein beschriebene Polygon; folglich ist auch der Raum S grösser, als das Polygon EKFLGMHN. Aber nach der Voraussezung ist er auch kleiner, welches unmöglich ist. Es verhält sich also nicht das Quadrat von B*D* zu dem Quadrate von FH wie der Kreis A*B*C*D* zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis EFGH. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dass auch das Quadrat von FH zu dem Quadrate von BD sich nicht so verhalte, wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABC*D*. Ich behaupte aber, dass auch das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH sich nicht so verhalte, wie der Kreis ABCD zu einem Raume, der grösser ist, als der Kreis EFGH. Gesezt, dies wäre möglich, so sey dieser grösse-



re Raum S, und es verhält sich *umgekehrt* das Quadrat von FH zu dem Quadrate von BD wie der Raum S zu dem Kreise ABCD. Aber der Raum S verhält sich, wie nachher gezeigt werden soll, zum Kreise ABCD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABCD, folglich verhält sich auch das Quadrat von FH zu dem Quadrate von CD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABCD, wovon gezeigt worden ist, dass es unmöglich sey; folglich verhält sich das Quadrat von AB zu dem Quadrate von FH nicht so, wie der Kreis ABCD zu einem Raume, der grösser ist, als der Kreis EFGH. Es ist aber gezeigt worden, dass dieser Raum auch nicht kleiner seyn könne. Folglich verhält sich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der Kreis ABCD zu dem Kreise EFGH.

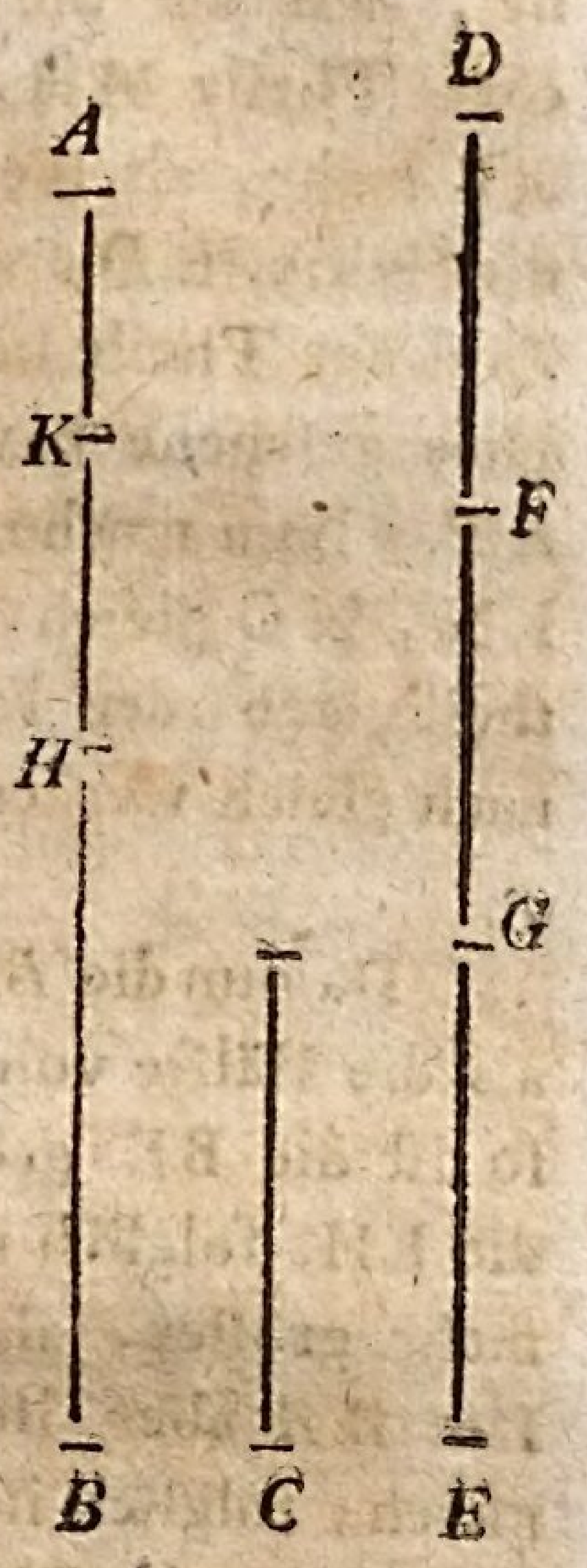
Demnach verhalten sich Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser w. z. e. w.

Lehnsaz. 1. Wenn man zwey ungleiche Grössen hat, und von der grösseren mehr, als die Hälfte, und vom Reste wieder mehr, als die Hälfte, wegnimmt, und dies immer so fortsezt, so bleibt zulezt eine Grösse übrig die kleiner ist, als die kleinere der Anfangs gesezten Grössen.

Es

Es seyen zwey ungleiche Grössen A B, C, die grössere von ihnen sey *A* B, so behaupte ich, dass, wenn man von der A B mehr, als die Hälfte, und vom Reste wieder mehr als die Hälfte wegnimmt, und dies immer so fortsezt, zulezt eine Grösse übrig bleibe, die kleiner sey, als die Grösse C.

Beweis. Die Grösse C wird, vervielfältigt, einmal grösser werden, als die Grösse A B. Man vervielfaltige sie also, und es sey D E ein Vielfaches der C, was grösser sey, als die A B; man theile die D E in die der C gleichen Theile DF, FG, GE, und nehme von der *A B* mehr, als die Hälfte *B* H, von der A H aber wieder mehr, als die Hälfte, H K weg, und seze dies immer so fort, bis die Zahl der Theile in der *A*B der Zahl der Theile in der D E gleich wird. Es seyen also die *A*btheilungen A K, K H, H B den Abtheilungen *D* F, F G, G E der Zahl nach gleich.

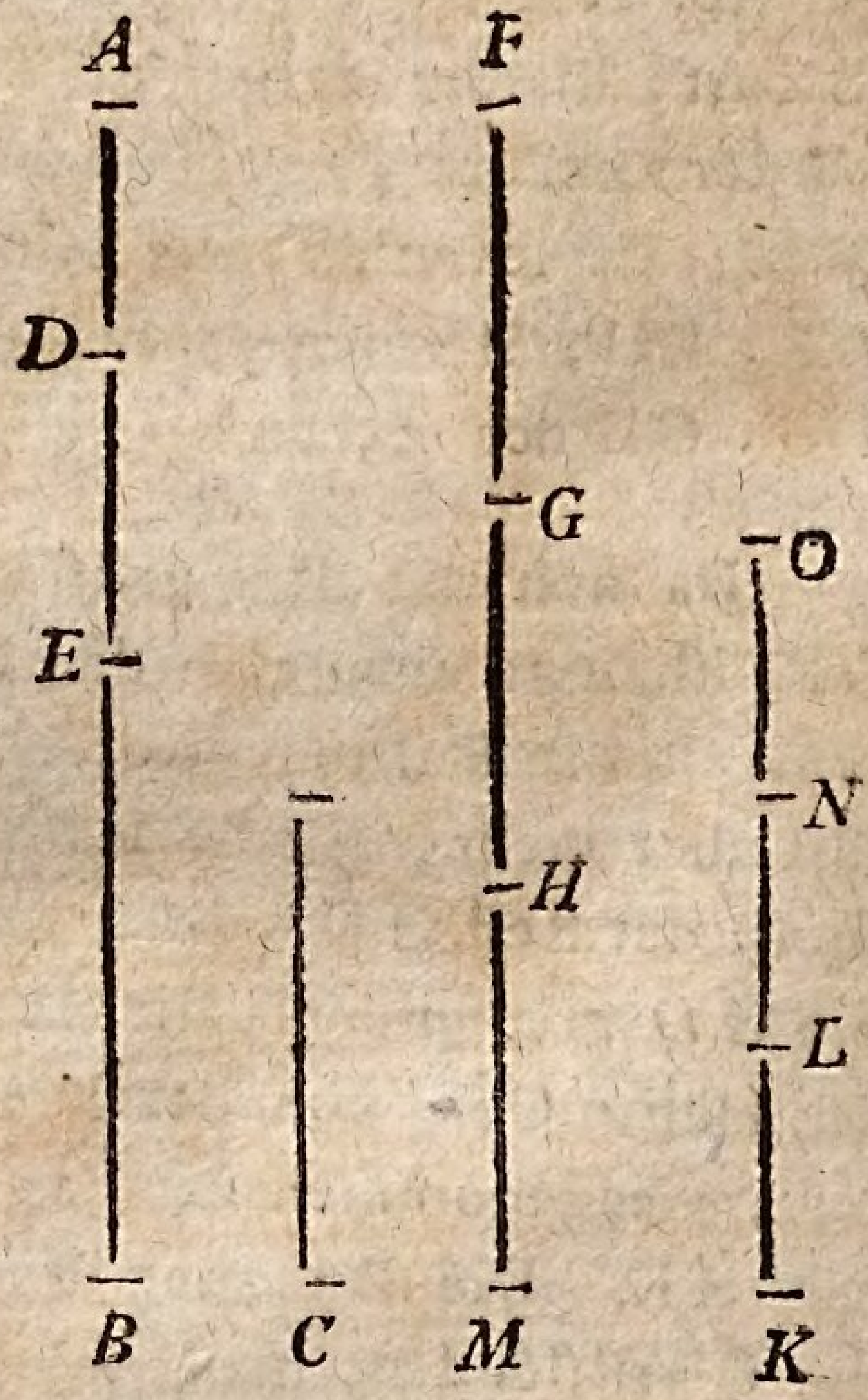


Da nun die D E grösser, als die A B, ist, und man von der *D* E weniger, als die Hälfte, die E G, von der A B aber mehr, als die Hälfte, die B H, weggenommen hat, so ist der Rest G D grösser, als der Rest H *A*. Ferner, da die G *D* grösser, als die H A ist, und man von der G D die Hälfte G F, von der H A aber mehr, als die Hälfte, die H K, weggenommen hat, so ist der Rest D F grösser, als der Rest A K. Die D F aber ist der C gleich, folglich ist auch die C grösser, als die A K, und mithin die A K kleiner, als die C. *D*emnach ist von der Grösse A *B* die Grösse *A* K übrig geblieben, welche kleiner ist, als die Anfangs gesezte kleinere Grösse C, w. z. e. .w

Eben so kann der Beweis geführt werden, wenn man jedesmal die Hälfte wegnimmt.

Anderer Beweis.

Es seyen zwey ungleiche Grössen A*B*, C, und es sey C die kleinere. Da die C die kleinere ist, so wird sie, vervielfältiget, einmal grösser werden, als die Grösse AB. Dies werde sie, wie die die FM, so theile man sie in die der C gleichen Theile MH, HG, GF. Hierauf nehme man von der *A*B mehr, als die Hälfte, BE, und von der EA mehr, als die Hälfte, E*D*, weg, und seze dies immer so fort, bis die Zahl der Theile in AB der Zahl der Theile in FM gleich wird. Dies geschehe bey den Theilen BE, ED, DA von der A*B*. Nun mache man noch der *DA* jede der Grössen KL, LN, NO gleich, und seze dies so lange fort, bis die Abtheilungen der KO den Abtheilungen der FM der Zahl nach gleich werden.

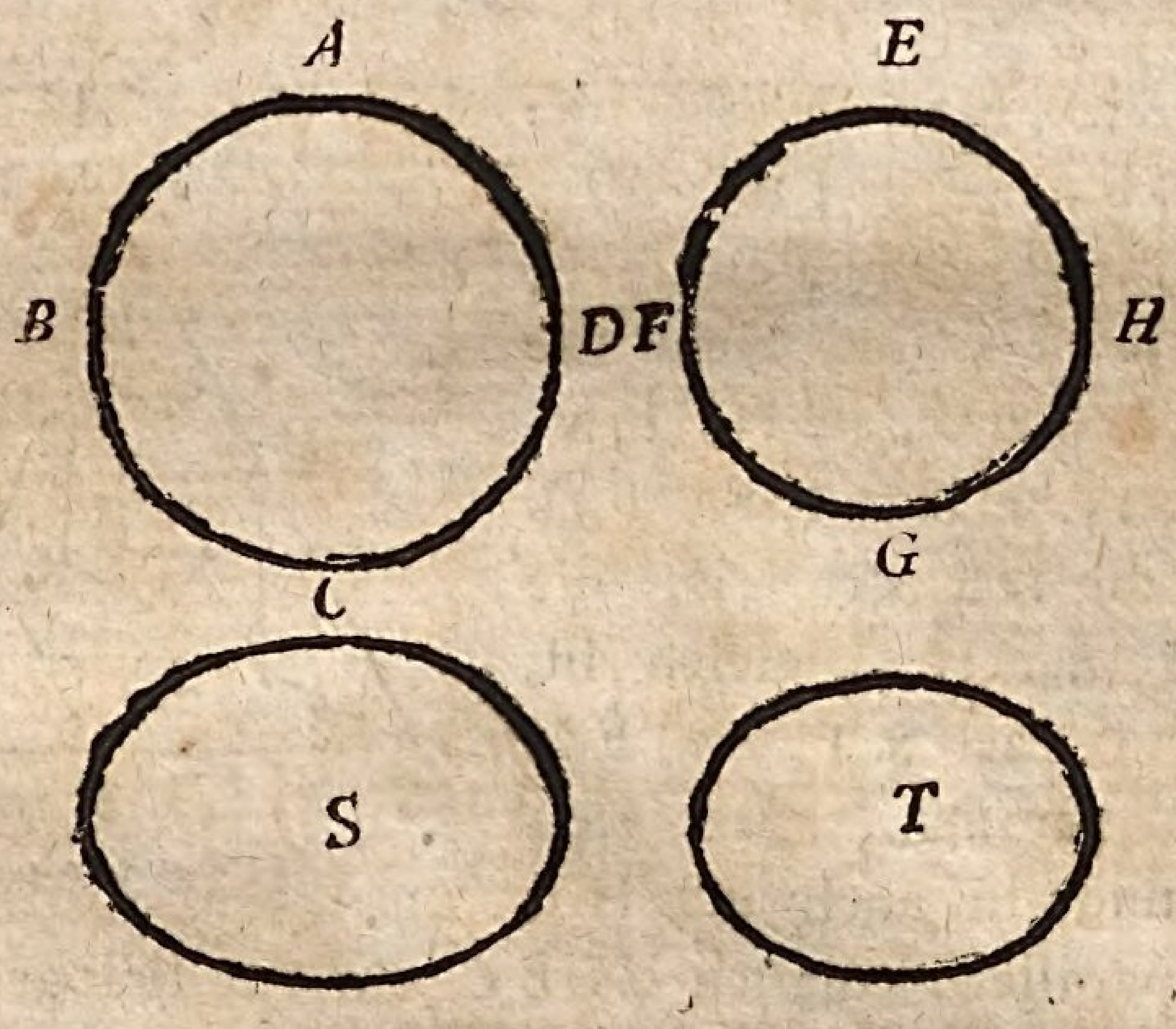


Da nun die *B*E grösser, als die Hälfte von *A*B, ist, so ist die BE grösser, als die EH, folglich noch vielmehr grösser, als die D*A*. Der D*A* aber ist die ON gleich; folglich ist die BE grösser, als die ON. Ferner, da die ED grösser, als die Hälfte von EA ist, so ist sie grösser, als die D*A*. Der DA aber ist die NL gleich; folglich ist die E*D* grösser, als die NL, und mithin das Ganze DB grösser, als das Ganze OL. Die D*A* aber ist auch der LK gleich; folglich ist das Ganze *A*B grösser, als das Ganze OK. Nun ist die MF grösser, als die BA; folglich ist noch vielmehr die MF grösser, als die OK. Da nun die ON, NL, LK, so wie die MH, HG, GF, einander stückweise gleich sind, und die Zahl der Theile in MF der Zahl der Theile in OK gleich ist, so ver-

verhält sich die KL zu der FG wie die OK zu der FM. Es ist aber die FM grösser, als die OK; folglich ist auch die FG grösser, als die LK. Es ist aber die FG der C und die KL der *A*D gleich; folglich ist die C grösser, als die A*D*; w. z. e. w.

Lehnsaz. 2. Ich behaupte ferner, wenn der Raum S grösser ist, als der Kreis EFGH, so verhalte sich der Raum S zu dem Kreise ABCD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABCD.

Man mache, dass der Raum S zum Kreise A*B*CD sich verhält, wie der Kreis EFGH zu dem Raume T, so behaupte ich, dass der Raum T kleiner sey, als der Kreis ABCD.



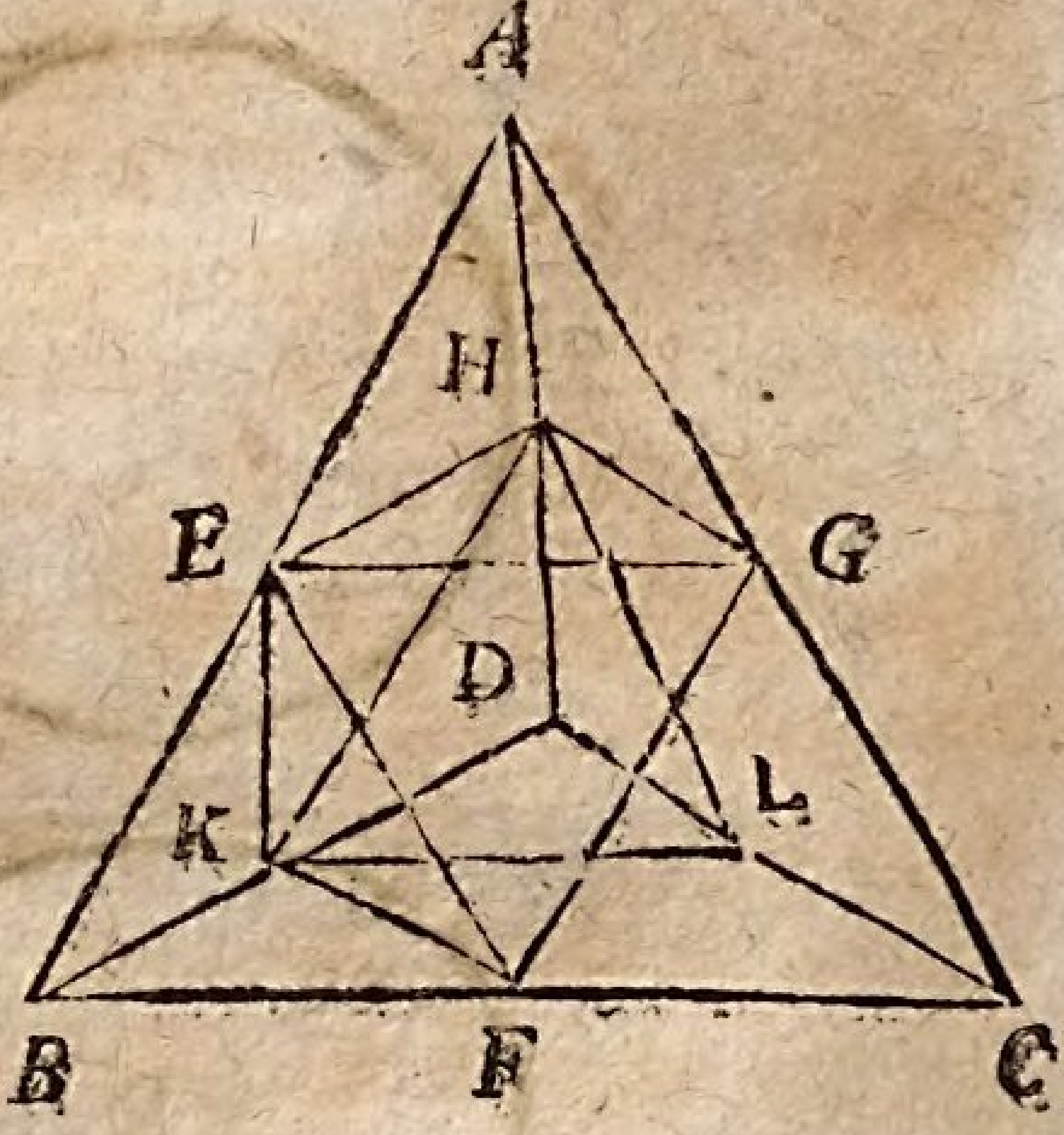
Beweis. Da der Raum S zum Kreise *A*BCD sich verhält, wie der Kreis EFGH zum Raume T, so verhält sich auch *verwechselt* (5, 16. S.) der Raum S zum Kreise EFGH wie der Kreis *A*BCD zum Raume T. Es ist aber nach der Voraussezung der Raum S grösser, als der Kreis EFGH; folglich ist auch der Kreis *AB*CD grösser, als der Raum T, und mithin verhält sich der Raum S zum Kreise *A*B*CD* wie der Kreis EF*G*H zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABCD.

3. *Saz.*

3. *Saz.*

Lehrsaz. Jede dreyseitige Pyramide läſst sich in zwey gleiche, einander selbst sowohl, als der ganzen, ähnliche dreyseitige Pyramiden und in zwey gleiche Prismen theilen, welche grösser sind, als die Hälfte der ganzen Pyramide.

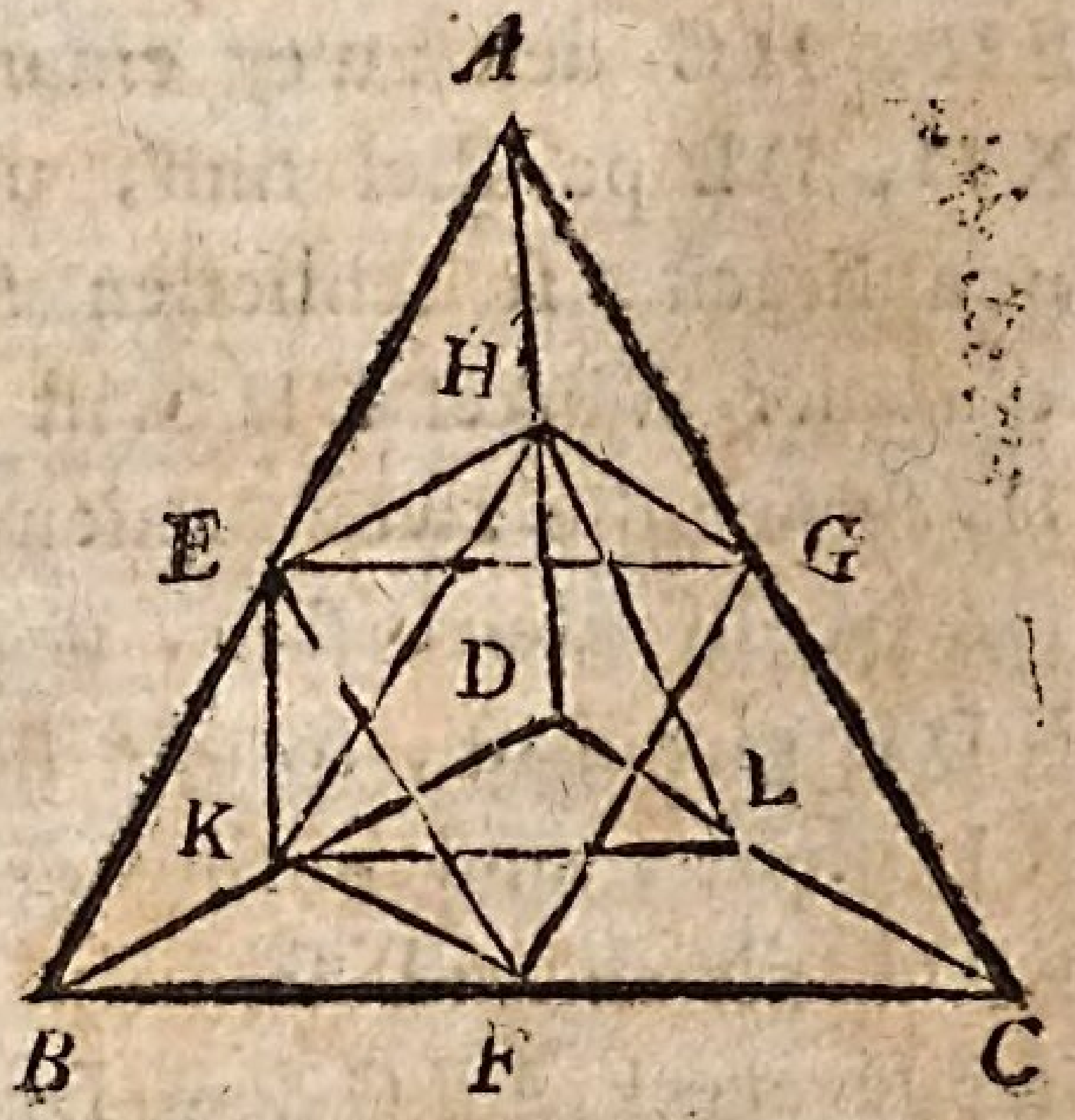
Es sey eine Pyramide, die zur Grundfläche das Dreyeck ABC und zur Spize den Punt *D* habe, so behaupte ich, die Pyramide ABCD lasse sich in zwey gleiche einander selbst sowohl, als der ganzen, ähnliche dreyseitige Pyramiden und in zwey gleiche Prismen theilen, welche leztere grösser, als die Hälfte der ganzen Pyramide, seyen.



Beweis. Man halbire die Linien *A*B, *B*C, CA, AD, *D*B, DC in den Punkten E, F, G, H, K, L, und ziehe die Linien EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. Da nun die *A*E der EB, die AH aber der H*D* gleich ist, so ist (6, 2, S.) die EH der DB parallel. Aus gleichem Grunde ist auch die HK der *AB* parallel, folglich HEBK ein Parallelogramm und mithin (1, 34, S.) die HK der EB gleich. Aber die EB ist der AE gleich; folglich ist auch die AE der HK gleich. Es ist aber auch die AH der HD gleich. Demnach sind die beyden AE, AH den beyden KH, H*D* stückweise gleich, und (1, 29. S.) ist der Winkel EAH dem Winkel KHD gleich; folglich ist (1, 4. S.) die Grundlinie EH der Grundlinie K*D* gleich, und mithin das Dreyeck *A*EH dem Dreyecke HKD gleich und ähnlich. *Aus* ebenden Gründen ist auch das Dreyeck AHG dem Dreyecke HL*D* gleich und ähn-

ähnlich. Und da die zwey einander berührenden geraden Linien EH, HG den zwey einander berührenden geraden Linien KD, DL parallel sind, und nicht in *einer* Ebene mit ihnen liegen, so schliessen sie (11, 10. S.) gleiche Winkel ein; der Winkel EHG ist also dem Winkel KDL gleich. Da ferner die zwey Linien EH, HG den zweyen KD, DL stückweise gleich sind, und der Winkel EHG dem Winkel KDL gleich ist, so ist die Grundlinie EG der Grundlinie KL gleich, und mithin das Dreyeck EHG dem Dreyecke KDL gleich und ähnlich. Aus ebenden Gründen ist auch das Dreyeck AEG dem Dreyecke HKL gleich und ähnlich; folglich ist die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H, der Pyramide die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL, und zur Spize den Punkt D, gleich und ähnlich. Und weil mit der Seite AB des Dreyecks ADB die HK parallel gezogen worden, so ist (1, 29. S.) das Dreyeck ADB dem Dreyecke DHK gleichwinklicht, und beyde haben (6, 4. S.) proportionirte Seiten, folglich ist das Dreyeck ADB dem Dreyecke DHK ähnlich. Aus ebenden Gründen ist auch das Dreyeck DBC dem Dreyecke DKL, und das Dreyeck ADC dem Dreyecke DHL ähnlich. Und da die zwey einander berührenden geraden Linien BA, AC den zwey einander berührenden geraden Linien KH, HL parallel sind, und nicht in *einer* Ebene mit ihnen liegen, so schliessen sie (11, 10. S.) gleiche Winkel ein; es ist also der Winkel BAC dem Winkel KHL gleich, und es verhält sich die BA zu der AC wie die KH zu der HL; folglich ist (6, 6. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke HKL ähnlich, und mithin ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABC, und zur Spize den Punkt D, der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL, und zur Spize den Punkt D, ähnlich. Aber von der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL, und zur Spize den Punkt D, ist gezeigt worden, dass sie der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H, ähnlich sey, folglich ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABC und zur Spize den

Punkt



Punkt D, ähnlich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG und zur Spize den Punkt H; mithin sind die beyden Pyramiden AEGH, HKLD der ganzen Pyramide ABCD ähnlich. Und da die BF der FC gleich ist, so ist (1, 41. S.) das Parallelogramm EBFG das Doppelte des Dreyecks GFC. Da aber, wenn zwey Prismen gleich hoch sind, deren eines ein Parallelogramm, das andere aber ein Dreyeck zur Grundfläche hat, so, daſs das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks ist, (11, 40. S.) die Prismen einander gleich sind, so ist das von den zwey Dreyecken BKF, EHG, und den drey Parallelogrammen EBFG, EBKH, KHGF eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken GFC, HKL und den drey Parallelogrammen KFCL; LCGH, HKFG eingeschlossenen gleich. Auch ist es offenbar, daſs jedes der beyden Prismen, das, welches zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG, und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, und das, welches zur Grundfläche hat das Dreyeck GFC, und zur gegenüberliegenden Seitenfläche das Dreyeck KLH, gröſser sey, als jede der beyden Pyramiden, deren Grundflächen die Dreyecke AEG, HKL, und deren Spizen die Punkte H, D sind. Wenn man daher die Linien EF, EK ziehet, so ist das Prisma, das zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG, und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, gröſser, als die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EBF, und zur Spize den Punkt K. Aber die Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck EBF, und deren Spize der Punkt K ist, ist (11, 10. Erkl.) gleich der Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck AEG, und deren Spize der Punkt H ist, denn sie werden von gleichen und ähnlichen Flächen eingeschlossen; folglich ist auch das Prisma, das zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG und

und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, grösser, als die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H. Aber das Prisma, das zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG, und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, ist gleich dem Prisma, das zur Grundfläche hat das Dreyeck GFC, und zur gegenüberliegenden Seitenfläche das Dreyeck HKL; und die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H, ist gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL und zur Spize den Punkt D; folglich sind die zwey genannten Prismen grösser, als die zwey genannten Pyramiden, deren Grundflächen sind die Dreyecke AEG, HKL, die Spizen aber die Punkte H, D.

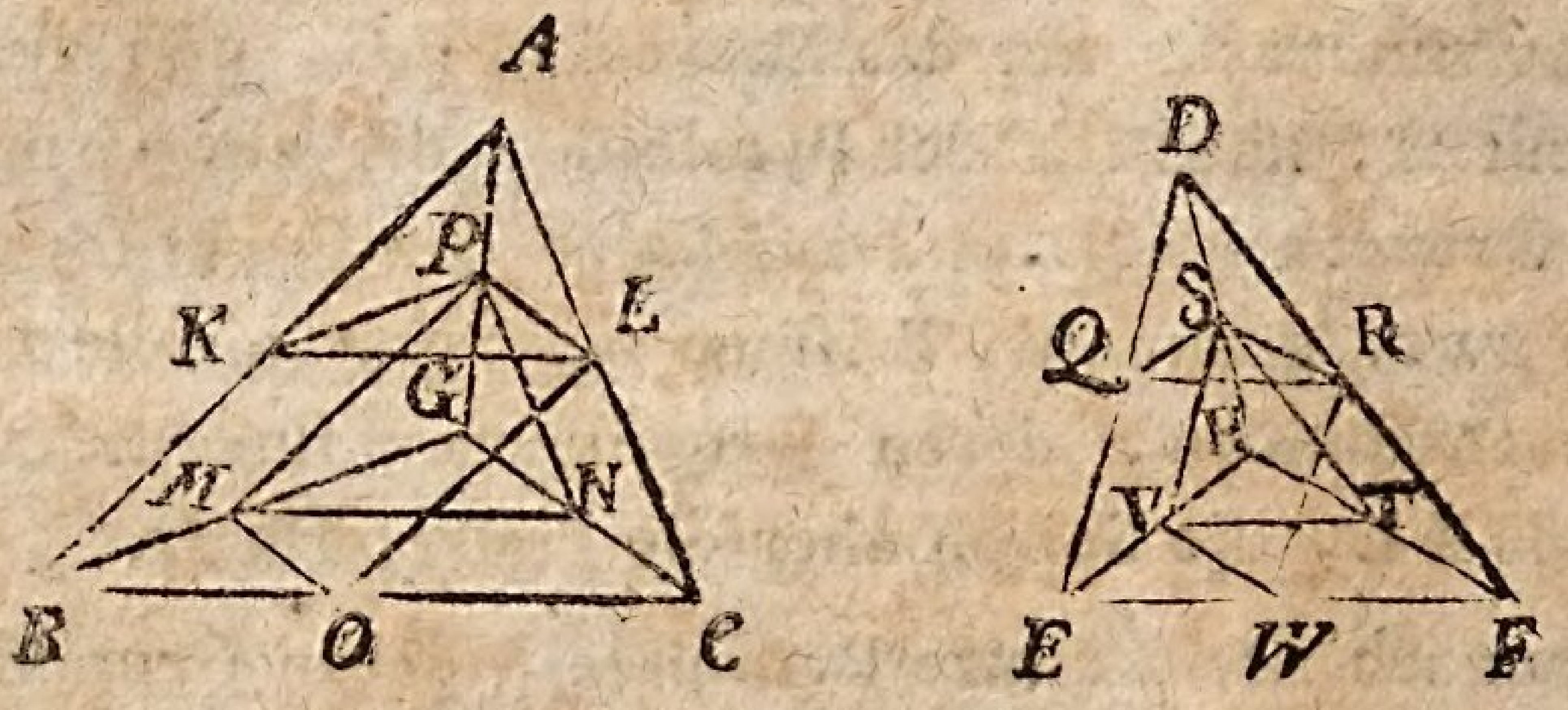
Demnach ist die ganze Pyramide, deren Grundfläche ist das Dreyeck ABC, und die Spize der Punkt D, in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, Pyramiden und in zwey gleiche Prismen, welche grösser sind, als die Hälfte der ganzen Pyramide, getheilt worden, w. z. v. w.

4. *Saz.*

Lehrsaz Wenn zwey dreyseitige Pyramiden gleich hoch sind, und man jede derselben in zwey gleiche und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwey gleiche Prismen, und jede der solchergestalt enstandenen Pyramiden wiederum ebenso theilt, und dies immer so fortsezt, so verhält sich die Grundfläche der einen Pyramide zur Grundfläche der andern wie die Summe aller Prismen in der einen Pyramide zu der gleichgrossen Summe aller Prismen in der andern.

Es seyen die zwey gleichhohen Pyramiden, die zu Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF, ihre Spizen aber in den Punkten G, H haben, und man theile jede derselben in zwey einander gleiche und der ganzen ähnliche Pyramiden, und in zwey gleiche Prismen, und jede der so entstandenen Py-

Pyramiden gedenke man sich wiederum ebenso getheilt, und dies seze man immer so fort, so behaupte ich, daſs die Grundfläche *A* B C zu der Grundfläche D E F sich verhalte wie die Summe aller Prismen in der Pyramide A *B* C G zur der gleich groſſen Summe aller Prismen in der Pyramide D E F H.

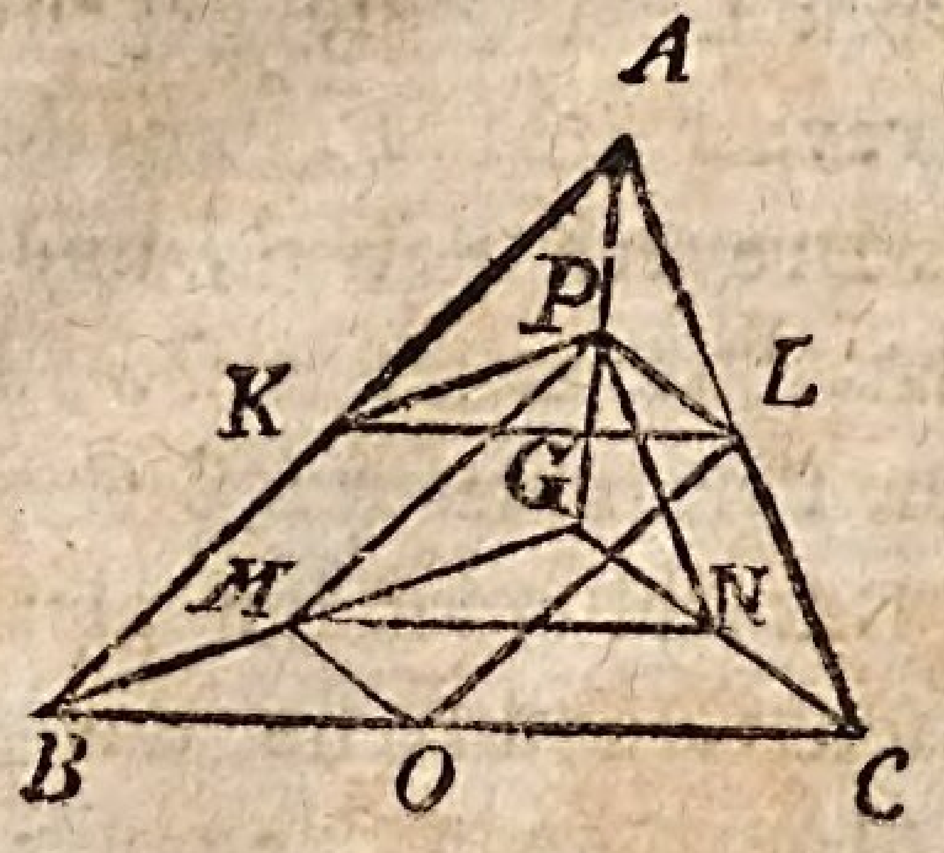


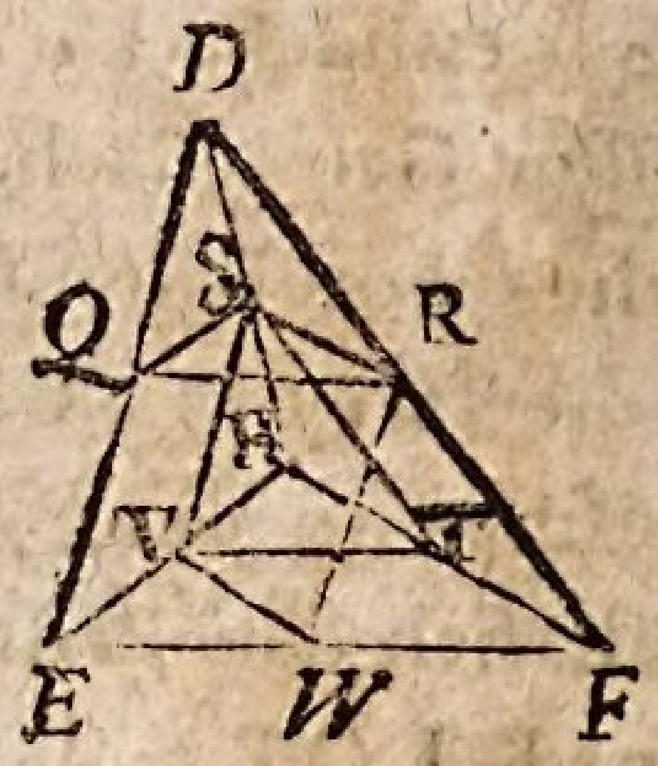
Beweis. Da die B O der O C, die *A* L aber der L C gleich ist, so ist (6, 2. S.) die O L der A B parallel, und (6, 4. S.) das Dreyeck *A* B C dem Dreyecke L O C ähnlich. Aus gleichen Gründen ist auch das Dreyeck D E F dem Dreyecke R W F ähnlich. Und weil die B C das Doppelte von der C O, und die *E* F das Doppelte von der F W ist, so verhält sich die B C zu der C O wie die E F zu der F W. Auch sind von den beyden *B C*, C O die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren A B C, L O *C*, von den beyden E F, F W aber die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigten Figuren *D* E F, R W F beschrieben worden; folglich verhält sich (6, 22. S.) das Dreyeck *B A C* zum Dreyecke L O C wie das Dreyeck D E F zum Dreyecke RWF, und *verwechselt*, das Dreyeck A B C zum Dreyecke D E F wie das Dreyeck L O *C* zum Dreyecke R W F. Aber, wie nachher gezeigt werden soll, verhält sich das Dreyeck LOC zum Dreyecke R W F wie das Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck L O C, die gegenüberliegende Seitenfläche aber das Dreyeck P M N, zu dem Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck R W F, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck S T V; folglich verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck A *B* C zum Dreyecke *D* E F wie das Prisma,

dessen

dessen Grundfläche ist das Dreyeck LOC, die gegenüberliegenden Seitenfläche aber das Dreyeck PMN, zu dem Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck STV. Und da sowohl die zwey Prismen in der Pyramide ABCG, als die zwey Prismen in der Pyramide DEFH einander gleich sind, so verhält sich das Prisma, dessen Grundfläche das Parallelogramm KLOB, die gegenüberliegende Seitenlinie aber die MP ist, zu dem Prisma, dessen Grundfläche das Dreyeck LOC, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck PMN ist, wie das Prisma, dessen Grundfläche das Parallelogramm EQRW, und die gegenüberliegende Seitenlinie die SV ist, zu dem Prisma, dessen Grundfläche das Dreyeck RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck STV ist. Demnach verhält sich *verbunden* (5, 18. S.) die Summe der Prismen KBOLMP, LOCMNP zu dem Prisma LOCMNP wie die Summe der Prismen QEWRSV, RWFSTV zu dem Prisma RWFSTV, und *verwechselt*, die Summe der Prismen KBOLMP, LOCPMN zu der Summe der Prismen QEWRSV, RWFSTV, wie das Prisma LOCPMN zu dem Prisma RWFSTV. Es ist aber gezeigt worden, dass das Prisma LOCPMN zu dem Prisma RWFSTV sich verhalte wie die Grundfläche LOC zu der Grundfläche RWF, und wie die Grundfläche ABC zu der Grundfläche DEF; folglich verhält sich auch das Dreyeck ABC zum Dreyecke DEF wie die zwey Prismen in der Pyramide ABCG zu den zwey Prismen in der Pyramide DEFH. Auf eben die Art nun verhält sich, wenn man die so entstandenen Pyramiden, dergleichen die PMNG, STVH sind, wiederum ebenso theilt, die Grundfläche PMN zur Grundfläche STV wie die zwey Prismen in der Pyramide PMNG zu den zwey Prismen in der Pyramide STVH. Aber die Grundfläche PMN verhält sich zur Grundfläche STV wie Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF; folglich verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die zwey Prismen in der Pyramide ABCG zu den zwey Prismen in der Pyramide DEFH, und wie die zwey Prismen in der Pyramide PMNG zu den zwey Prismen in der Pyramide STVH,

und





und wie viere zu vieren. Eben dies kann aber auch von den übrigen Prismen gezeigt werden, welche durch die Theilung der Pyramiden AKLP, DQRS und aller übrigen, der Zahl nach gleichen, entstehen, w. z. e. w.

Lehnsaz. Dass das Dreyeck LOC zum Dreyecke RWF sich verhalte wie das Prisma, dessen Grundfläche das Dreyeck LOC, die gegenüberliegende Seitenfläche aber das Dreyeck PMN ist, zu dem Prisma dessen Grundfläche RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche STV ist, kann auf folgende Art gezeigt werden:

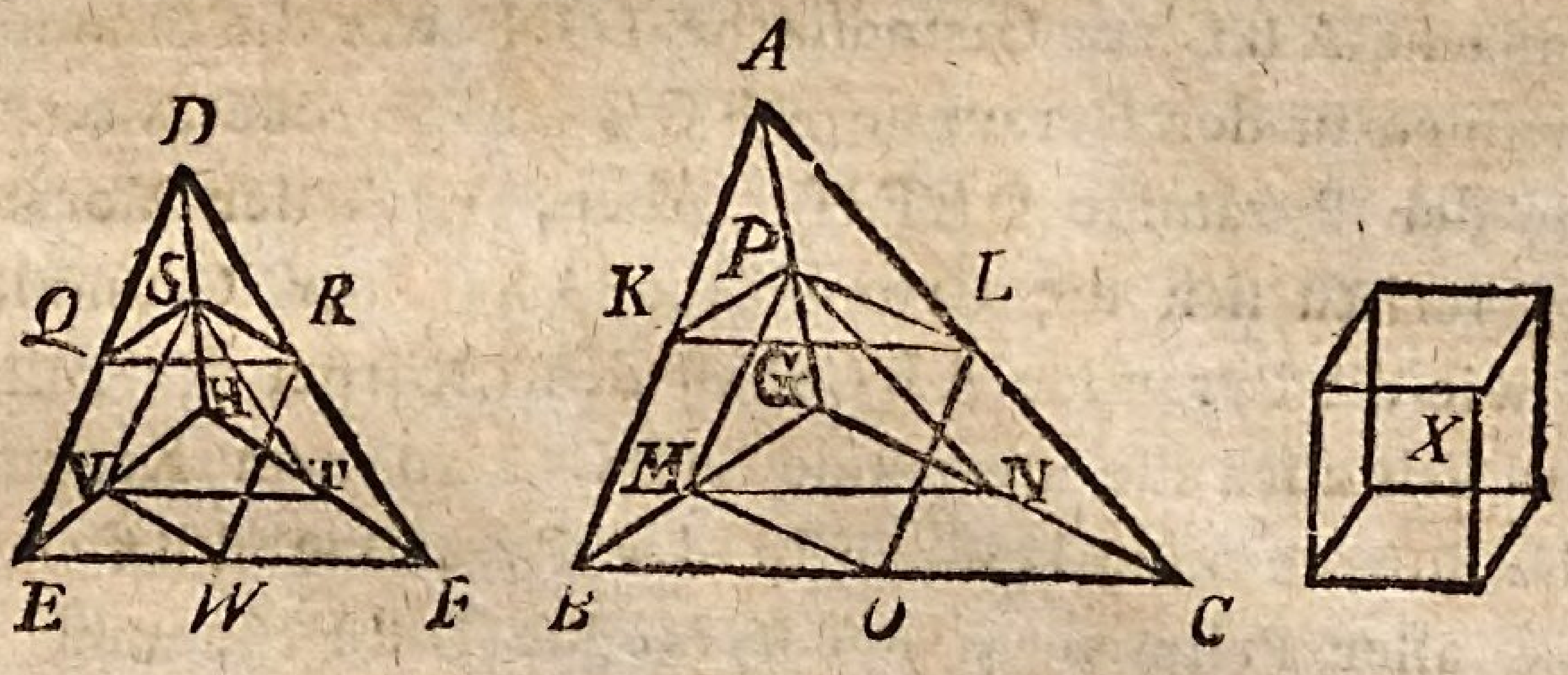
Man gedenke in der nämlichen Figur von den Punkten G, H Lothe nach den Ebenen der Dreyecke ABC, DEF gefällt, welche einander gleich seyn werden, weil die Pyramiden, nach der Voraussezung, gleich hoch sind. Und weil zwey gerade Linien die GC, und das von dem Punkte G aus gefällte Loth von den parallelen Ebenen ABC, PMN geschnitten werden, so werden sie (11, 17. S.) nach einerley Verhältnisse geschnitten. Es wird aber die GC von der Ebene PMN in dem Punkte N halbirt; folglich wird auch das von dem Punkte G nach der Ebene ABC gefällte Loth von der Ebene PMN halbirt. Aus ebendem Grunde wird auch das von dem Punkte H nach der Ebene DEF gefällte Loth von der Ebene STV halbirt. Es sind aber die von den Punkten G, H nach den Ebenen ABC, DEF gefällten Lothe einander gleich; folglich sind auch die von den Dreyecken PMN, STV nach den Dreyecken ABC, DEF gehenden Lothe einander gleich, und mithin sind die Prismen gleich hoch,

hoch, die zu Grundflächen die Dreyecke LOC, RWF haben, und deren gegenüberliegende Seitenflächen die Dreyecke PMN, STV sind; demnach verhalten sich (11, 33. S.) die gleich hohen Parallelepipeda, die von den genannten Prismen beschrieben werden, zu einander wie ihre Grundflächen. Ebenso verhalten sich auch ihre Hälften; die Grundfläche LOC also verhält sich zur Grundfläche RWF wie die genannten Prismen sich zu einander verhalten, w. z. e. w.

5. *Saz.*

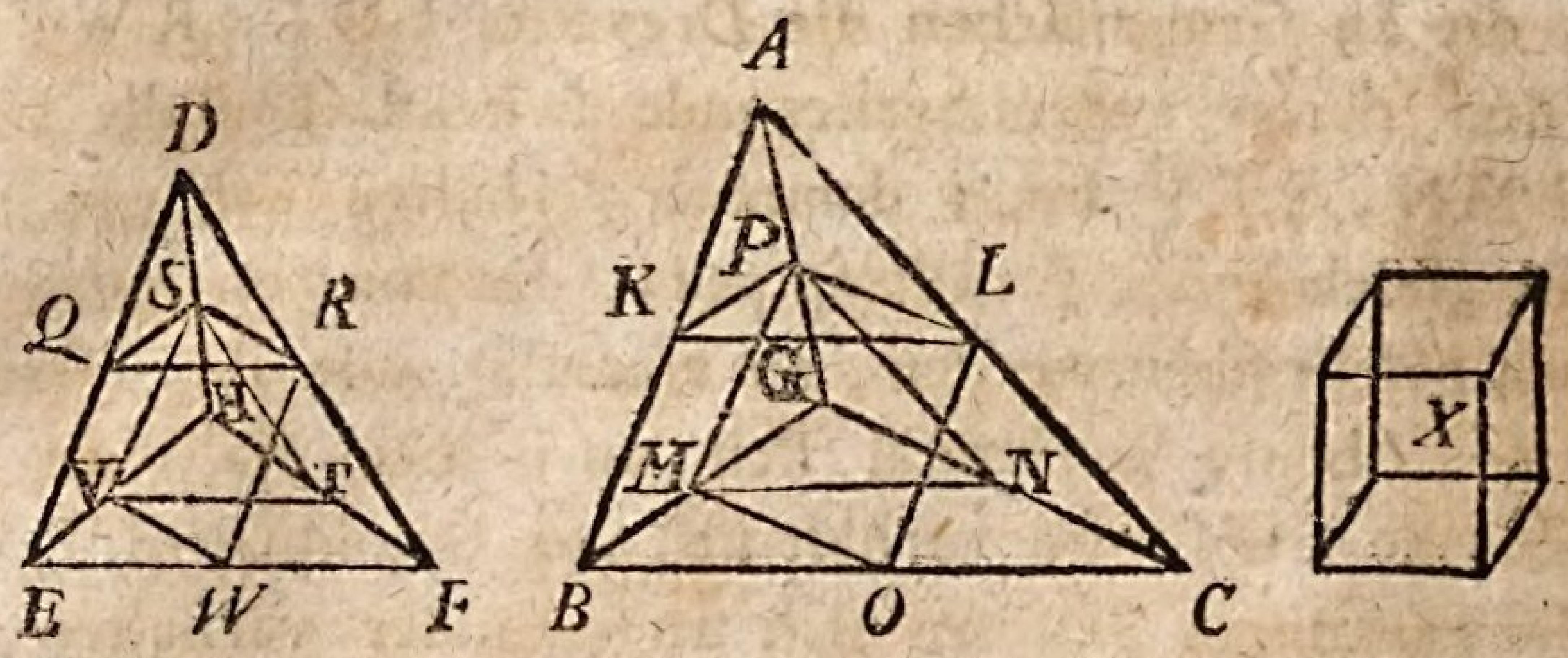
Lehrsaz. Dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich zusammen wie ihre Grundflächen.

Es seyen zwey Pyramiden von gleicher Höhe, deren Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF und deren Spizen die Punkte G, H seyen, so behaupte ich, dass die Grundfläche *A* B C zur Grundfläche DEF sich verhalte, wie die Pyramide ABCG zur Pyramide *D*EFH.



Beweis. Wäre dies nicht, so müsste die Grundfläche ABC zur Grundfläche *D*EF sich verhalten wie die Pyramide ABCG zu einem Körper der kleiner oder größer wäre, als die Pyramide DEFH. Es sey dieser Körper *zuerst* kleiner, und heisse X. Man theile die Pyramide *D*EFH in zwey einander gleiche und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwey gleiche Prismen, so

sind



ſind (12, 3. S.) die zwey Priſmen zuſammen gröſſer, als die Hälfte der ganzen Pyramide. Die durch dieſe Theilung erhaltenen Pyramiden theile man wiederum auf ähnliche Art, und ſeze dies ſo fort, bis man von der Pyramide DEFH eine Anzahl von Pyramiden genommen hat, die zuſammen kleiner ſind, als der Ueberſchuſs, um welchen die Pyramide *D*EFH den Körper X übertrift. Man nehme ſie alſo, und ſie ſeyen zum Beyſpiele die Pyramiden DQRS, STVH, ſo ſind mithin die in der Pyramide DEFH übrigbleibenden Priſmen gröſſer, als der Körper X. Man theile auch die Pyramide *A*BCG auf ähnliche Art, und in ebenſoviele Theile, als die Pyramide DEFH, ſo verhält ſich (12, 4. S.) die Grundfläche ABC zur Grundfläche *D*EF wie die Summe aller Priſmen in der Pyramide *A*BCG zur Summe aller Priſmen in der Pyramide DEFH. Aber, nach der Vorausſezung, verhält ſich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Pyramide AB*CG* zu dem Körper X; folglich verhält ſich auch die Pyramide *A*BCG zu dem Körper X wie die Summe aller Priſmen in der Pyramide ABCG zur Summe aller Priſmen in der Pyramide DEFH, und *verwechſelt*, die Pyramide ABCG zur Summe der in ihr befindlichen Priſmen, wie der Körper X zur Summe der in der Pyramide DEFH befindlichen Priſmen. Es iſt aber die Pyramide *A*BCG gröſſer, als die Summe der in ihr befindlichen Priſmen, folglich iſt auch der Körper X gröſſer, als die Summe der in der Pyramide DEFH befindlichen Priſmen. Er iſt aber auch kleiner, welches unmöglich iſt; folglich verhält ſich nicht die Grundfläche A*B*C zur Grund-

fläche

fläche DEF wie die Pyramide ABCG zu einem Körper der kleiner wäre, als die Pyramide DEFH. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dafs auch die Grstndfläche DEF fich nicht fo zu der Grundfläche ABC verhalte, wie die Pyramide DEFH zu einem Körper der kleiner wäre, als die Pyramide ABCG.

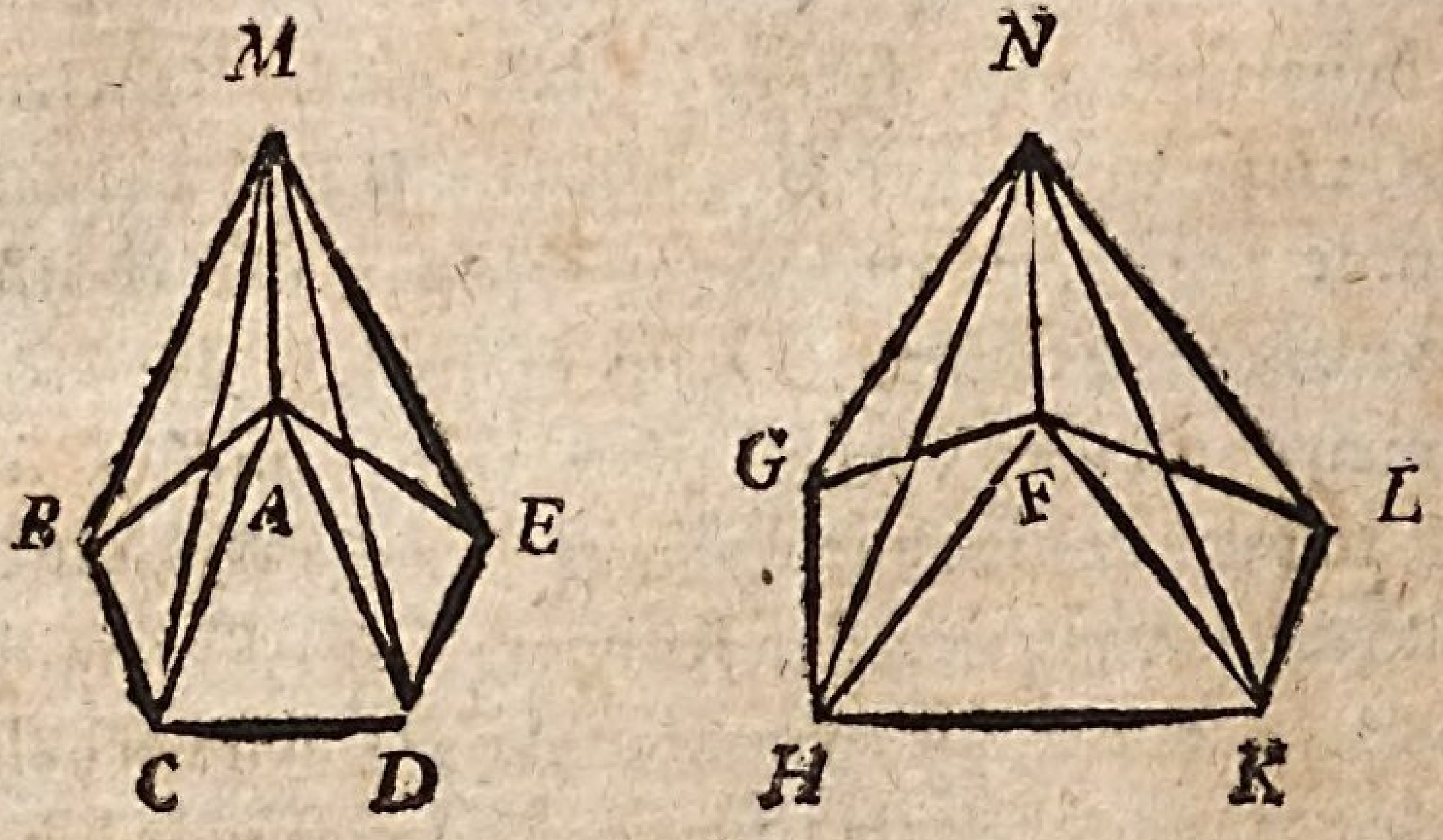
Ich behaupte aber ferner, dafs auch die Grundfläche ABC fich nicht fo zu der Grundfläche DEF verhalte, wie die Pyramide ABCG zu einem Körper der gröffer wäre, als die Pyramide DEFH. Denn es finde, die Möglichkeit angenommen, diefes Verhältnifs Statt, und es fey diefer Körper X, fo verhält fich auch *umgekehrt* die Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC wie der Körper X zur Pyramide ABCG. Aber wie der Körpe X zur Pyramide ABCG fich verhält, fo verhält fich die Pyramide DEFH, wie eben gezeigt worden ift, zu einem Körper der kleiner ift, als die Pyramide ABCG; folglich verhält fich auch die Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC wie die Pyramide DEFH zu einem Körper, der kleiner ift, als die Pyramide ABCG, welches ungereimt ift; folglich verhält fich die Grundfläche ABC nicht fo zu der Grundfläche DEF, wie die Pyramide ABCG zu einem Körper, der gröffer ift, als die Pyramide DEFH. Es ift aber gezeigt worden, dafs fie fich auch nicht zu einem kleinern Körper fo verhalte; folglich verhält fich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH.

Demnach verhalten fich dreyfeitige Pyramiden von gleicher Höhe u. f. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrfaz. Vielfeitige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten fich zufammen wie ihre Grundflächen.

Es seyen zwey Pyramiden von gleicher Höhe, welche zu Grundflächen die Polygone *AB* C D E, F G H K L haben, und deren Spizen in den Punkten M, N seyen, so behaupte ich, dafs die Grundfläche A B C *D* E zu der Grundfläche F G H K L sich verhalte wie die Pyramide AB C D E M zu der Pyramide F G H K L N.



Beweis. Man theile die Grundfläche A B C D E in die Dreyecke *A* B C, A C D, *A* D E, und die Grnndfläche F G H K L in die Dreyecke F G H, F H K, F K L und über jedem dieser Dreyecke gedenke man sich eine Pyramide von gleicher Höhe mit den Anfangs gesezten. Da nun (1 . 5. S.) das Dreyeck A B C zum Dreyecke A C D sich verhält wie die Pyramide A B C M zur Pyramide A C D M, und *verbunden*, (5, 18. S.) das Trapezion *A* B C D zum Dreyecke A C D wie die Pyramide A B C D M zur Pyramide A B *C* M, aber auch das Dreyeck A C D zum Dreyecke A D E wie die Pyramide A C D M zur Pyramide A *D* E M, so verhält sich auch *gleichförmig* (5, 22. S.) die Grundfläche A B C D zur Grundfläche A D E wie die Pyramide A B C *D* M zur Pyramide *A*DEM, und wiederum *verbunden* die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche A D E wie die Pyramide *A* B C D E M zur Pyramide A *D* E M. Aus ebenden Gründen verhält sich auch die Grundfläche F G H K L zur Grundfläche F K L wie die Pyramide FGHKLN zur Pyramide FKLN. Und da *ADEM*, FKLN zwey dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe sind, so verhält sich die Grundfläche A D E zur Grundfläche F K L wie die Pyramide A D E M zur Pyramide F K L N. Da nun die

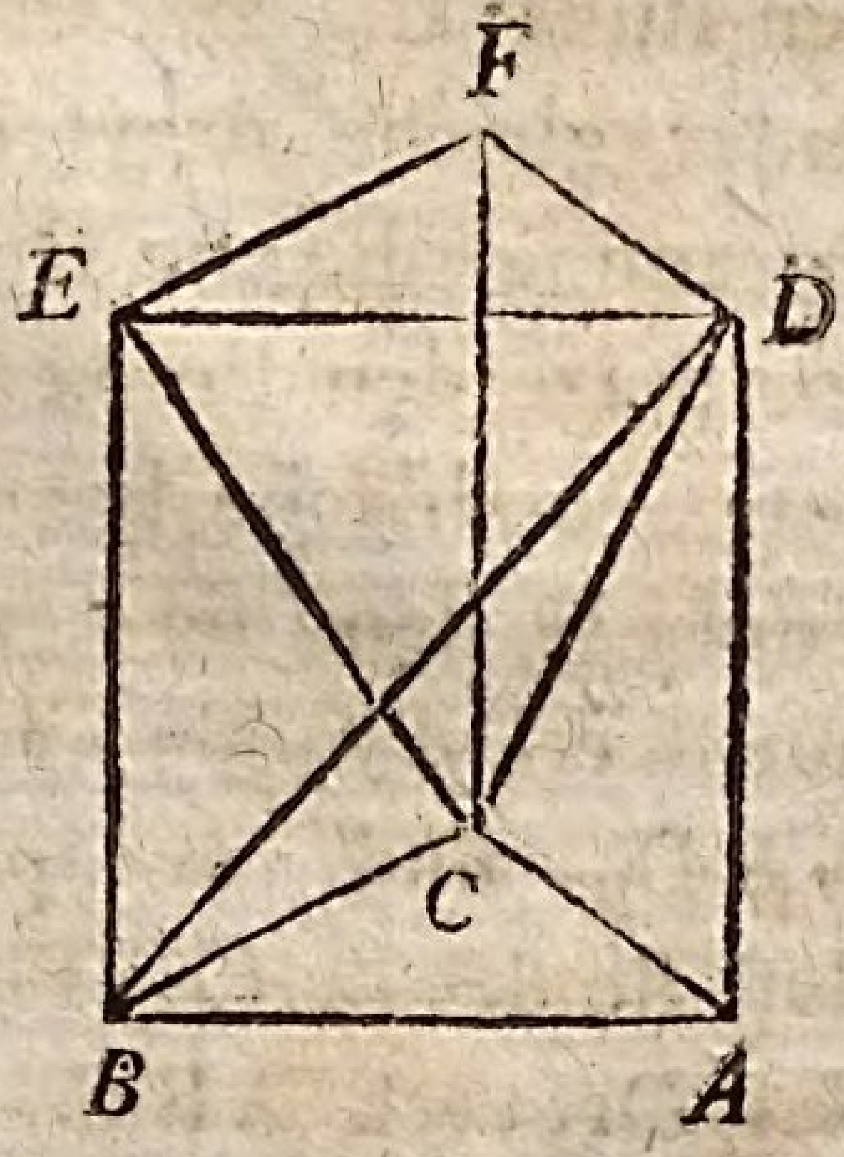
die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche ADE sich verhält wie die Pyramide *A*BCDEM zur Pyramide ADEM, und die Grundfläche ADE zur Grundfläche FKL wie die Pyramide A*D*EM zur Pyramide FKLN; so verhält sich auch *gleichförmig* die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche FKL wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide FKLN. Aber wie die Grundfläche FKL zur Grundfläche FGHKL, so verhält sich die Pyramide FKLN zur Pyramide FGHKLN; folglich verhält sich wiederum *gleichförmig* die Grundfläche ABC*D*E zur Grundfläche F*G*HKL wie die Pyramide ABC*D*EM zur Pyramide FGHKL*N*.

Demnach verhalten sich auch vielseitige Pyramiden von gleicher Höhe u. s. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

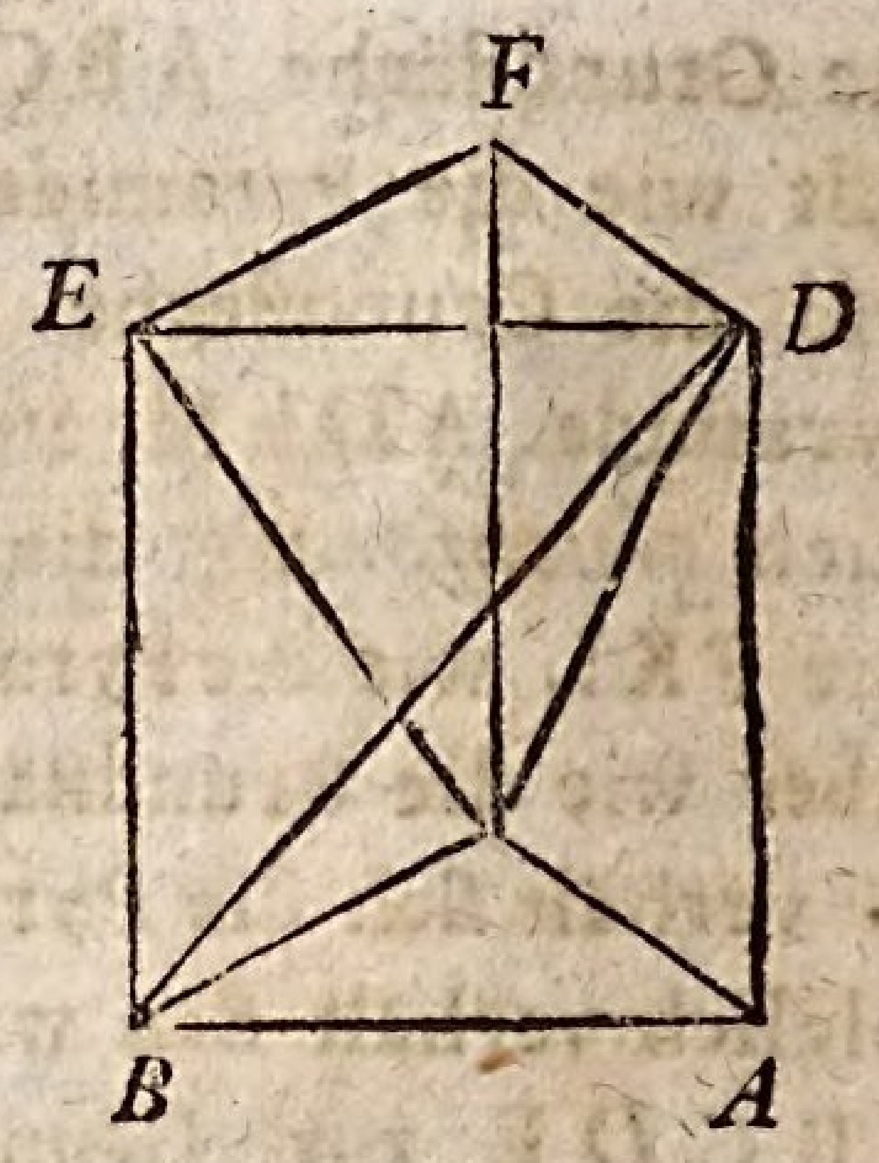
Lehrsaz. Jedes dreyseitige Prisma läßt sich in drey einander gleiche dreyseitige Pyramiden theilen.

Es sey ein Prisma dessen Grundfläche das Dreyeck ABC, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck DEF sey, so behaupte ich, daß das Prisma ABC*D*EF sich in drey einander gleiche dreyseitige Pyramiden theilen lasse.



Beweis. Man ziehe die Linien BD, EC, C*D*. Da nun *A*BED ein Parallelogramm und B*D* dessen Diagonale ist, so ist (1, 31. S.) das Dreyeck *A B* D dem Dreyecke E*D*B gleich; folglich ist (12, 5. S.) die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck A*B*D, und zur Spize den Punkt C, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das *D*reyeck *E*DB und zur Spize den Punkt D. Aber die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EDB, und zur

Spize den Punkt *C*, ist einerley mit der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EBC, und zur Spize den Punkt D. Denn sie werden von einerley Ebenen eingeschlossen; folglich ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ADB und zur Spize den Punkt C, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EBC und zur Spize den Punkt D.



Ferner da FCBE ein Parallelogramm, und CE dessen Diagonale ist, so ist (1, 34. S.) das Dreyeck ECF dem Dreyecke CBE gleich; folglich ist (11, 5. S.) auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck BEC, und zur Spize den Punkt D, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ECF, und zur Spize den Punkt D. Aber von der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck BCE, und zur Spize den Punkt D, ist gezeigt worden, daſs sie der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABD, und zur Spize den Punkt C, gleich sey; folglich ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck CEF, und zur Spize den Punkt *D*, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck *ABD*, und zur Spize den Punkt C. Das Prisma A*B*CDEF wird also in drey einander gleiche dreyseitige Pyramiden getheilt. Und da die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck A*BD*, und zur Spize den Punkt *C*, einerley ist mit der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck CAB, und zur Spize den Punkt D, denn sie werden von einerley Flächen eingeschlossen, von der Pyramide aber, die zur Grundfläche hat das Dreyeck A*BD*, und zur Spize den Punkt C, gezeigt worden ist, daſs sie der dritte Theil des Prisma sey, dessen Grundfläche das Dreyeck AB*C*, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck DEF ist; so ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck A*B*C, und zur Spize den Punkt *D*, der dritte Theil eines Prisma, das einerley Grund-

fläche

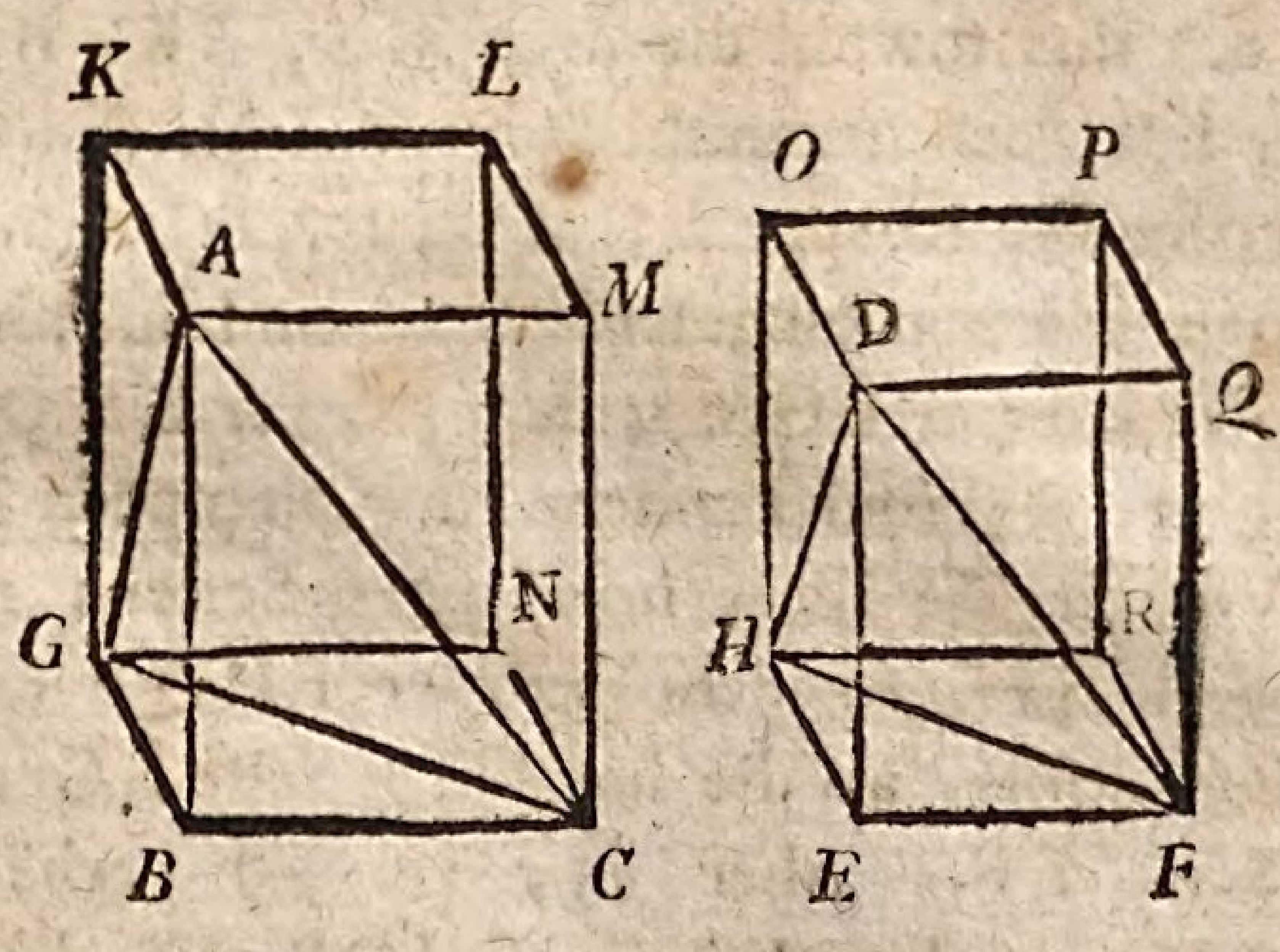
fläche mit *ihr* hat, nämlich das Dreyeck *ABC*, und dessen gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck DEF ist, w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma sey, das mit ihr einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat, weil, wenn die Grundfläche des Prisma eine andere geradlinigte Figur, und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche die nämliche ist, es sich in Prismen theilen lässt, deren Grundflächen sowohl, als die gegenüberliegenden Seitenflächen, Dreyecke sind.

8. *Saz.*

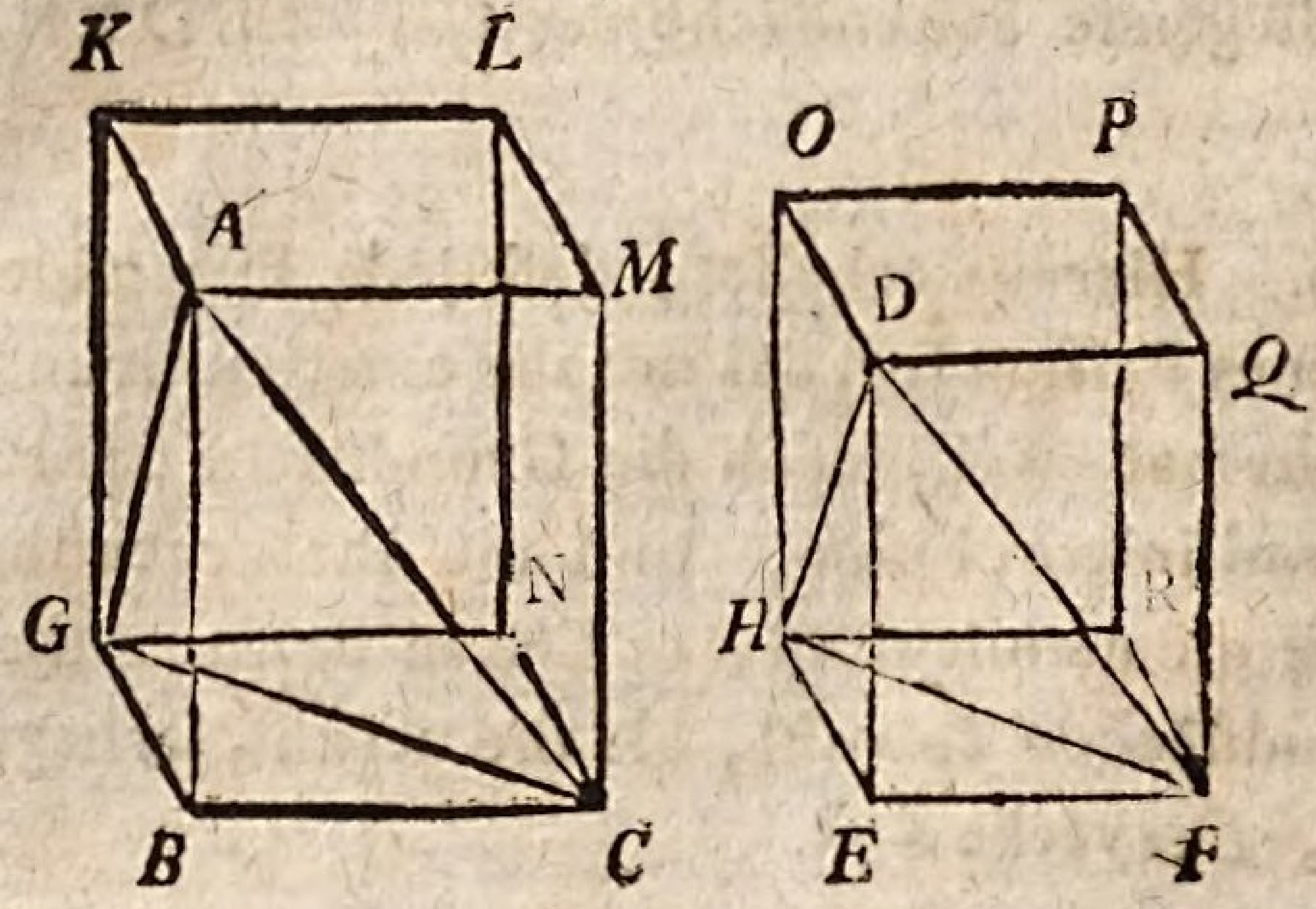
Lehrsaz. Aehnliche dreyseitige Pyramiden sind in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seyen zwey ähnliche und ähnlichliegende Pyramiden, deren Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF, und deren Spizen die Punkte G, H, so behaupte ich, dass die Pyramide A*BC*G zur Pyramide DEFH ein dreymal höheres Verhältniss habe, als die *BC* zu der EF.



Beweis. Man vollende die Parallelepipeda BGML, EHQP. Da nun die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH ähnlich ist, so ist (1, 9. Erkl.) der Winkel ABC

 dem



dem Winkel DEF, der Winkel GBC dem Winkel HEF und der Winkel ABG dem Winkel DEH gleich, und es verhält ſich die AB zu der DE wie die BC zu der EF, und die BG zu der EH. Da nun die AB zu der DE wie die BC zu der EF ſich verhält, alſo die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt ſind, ſo iſt das Parallelogramm BM dem Parallelogramme EQ ähnlich. Aus ebenden Gründen iſt das Parallelogramm BN dem Parallelogramme ER, und das Parallelogramm BK dem Parallelogramme EO ähnlich; die drey Parallelogramme BM, KB, BN ſind alſo den dreyen EQ, EO, ER ähnlich. Aber (11, 24. S.) ſind ſowohl die drey MB, BK, BN, als die EQ, EO, ER, den gegenüberliegenden gleich und ähnlich; folglich werden die Körper BGML, EHQP von gleichvielen ähnlichen Flächen eingeſchloſſen, und mithin iſt (11, 9. Erkl.) der Körper BGML dem Körper EHQP ähnlich. Aber (11, 33. S.) ſind ähnliche Parallelepipeda in dreymal höherem Verhältniſſe ihrer homologen Seiten; folglich hat der Körper BGML zu dem Körper EHQP ein dreymal höheres Verhältniſs, als die homologe Seite BC zu der homologen Seite EF. Aber (5, 15. S.) verhält ſich der Körper BGML zu dem Körper EHQP wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH, denn die Pyramide iſt der ſechſte Theil des ganzen Körpers, da das Priſma, als die Hälfte des Parallelepipedons, das Dreyfache der Pyramide iſt; folglich hat auch die Pyramide ABCG zu der Pyramide

DEFH

DEFH ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF w. z. e. w.

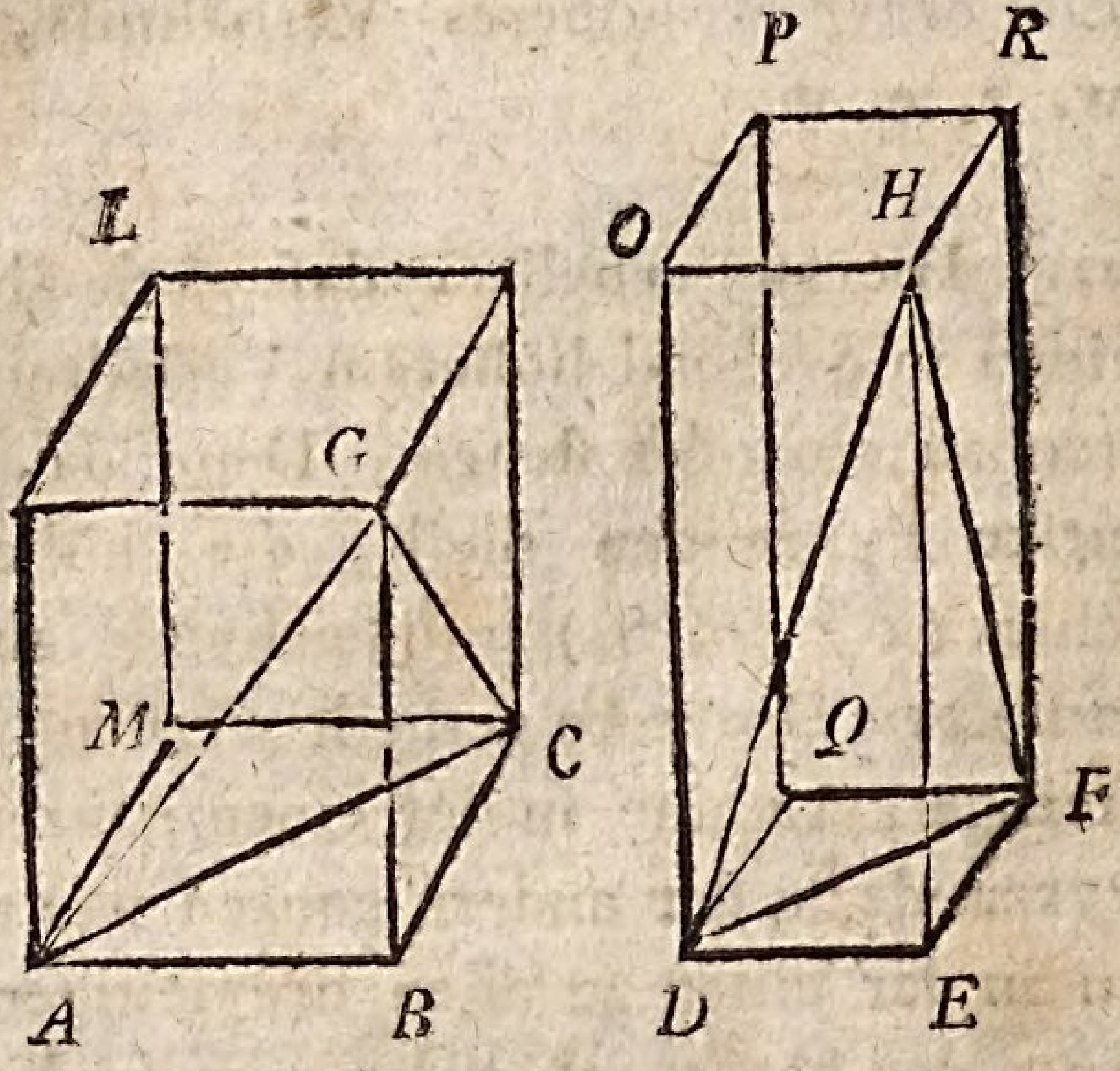
Zuſaz. Hieraus erhellet, daſs auch ähnliche vielſeitige Pyramiden in dreymal höherem Verhältniſſe ihrer homologen Seiten zu einander ſtehen. Denn da, wenn man ſie in dreyſeitige Pyramiden theilt, die ähnlichen vielſeitigen Grundflächen (6, 20. S.) in gleichviele ähnliche und den ganzen homologe Dreyecke getheilt werden, ſo verhält ſich eine dreyſeitige Pyramide in der einen ganzen zu einer dreyſeitigen Pyramide in der andern ganzen wie alle dreyſeitigen Pyramiden in der einen zu allen dreyſeitigen Pyramiden in der andern, das heiſst, wie die eine vielſeitige Pyramide zur andern vielſeitigen Pyramide. Aber eine dreyſeitige Pyramide zu einer andern dreyſeitigen Pyramide iſt in dreymal höherem Verhältniſſe der homologen Seiten; folglich hat auch eine vielſeitige Pyramide zu einer andern von ähnlicher Grundfläche ein dreymal höheres Verhältniſs, als eine homologe Seite der einen zu einer homologen Seite der andern.

9. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichen dreyſeitigen Pyramiden verhalten ſich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und dreyſeitige Pyramiden deren Grundflächen ſich umgekehrt wie die Höhen verhalten, ſind einander gleich.

Es ſeyen zwey gleiche Pyramiden, die zu Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF und ihre Spizen in den Punkten G, H haben, ſo behaupte ich, daſs die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH den Höhen umgekehrt proportionirt ſeyen, das heiſst, daſs die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF ſich verhalte wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG.

Be-



Beweis. Man vollende die Parallepideda *B*GML; EHQP. Da nun die Pyramide *A*BCG der Pyramide DEFH gleich, und von der Pyramide *AB*CG der Körper BGML, von der Pyramide DEFH aber der Körper EHQP das sechsfache ist, so ist (5, 15. S.) der Körper BGML dem Körper EHQP gleich. Gleiche Parallelepipeda aber haben (11, 34. S.) Grundflächen die den Höhen umgekehrt proportionirt sind; es verhält sich also die Grundfläche *B*M zur Grundfläche EQ wie die Höhe des Körpers EHQP zur Höhe des Körpers BGML. *A*ber die Grundfläche BM verhält sich zur Grundfläche EQ wie das Dreyeck ABC zum *D*reyecke DEF; folglich verhält sich auch das Dreyeck A*BC* zum *D*reyecke *D*EF wie die Höhe des Körpers EHPQ zur Höhe desKörpers BGML. Aber die Höhe des Körpers EHQP ist einerley mit der Höhe der Pyramide DEFH, und die Höhe des Körpers BGML ist einerley mit der Höhe der Pyramide *A*BCG; es verhält sich also die Grundfläche A*BC* zur Grundfläche *D*EF wie die Höhe der Pyramide *D*EFH zur Höhe der Pyramide ABCG; folglich sind die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH den Höhen umgekehrt proportionirt.

Es seyen nun *zweytens* die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH den Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG,

ABCG, so behaupte ich, daſs die Pyramide *A*BCG der Pyramide *D*EFH gleich sey.

Da, nach der vorigen Conſtruction, die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF ſich verhält wie die Höhe der Pyramide *D*EFH zur Höhe der Pyramide ABC*G*, und die Grundfläche *A*B*C* zur Grundfläche *D*EF wie das Parallelogramm BM zu dem Parallelogramme EQ, ſo verhält ſich auch das Parallelogramm BM zu dem Parallelogramme EQ wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide A*B*CG. Aber die Höhe der Pyramide DEFH iſt einerley mit der Höhe des Parallelepipedons EHQP, und die Höhe der Pyramide *A*BCG iſt einerley mit der Höhe des Parallelepipedons BGML; es verhält ſich alſo die Grundfläche BM zur Grundfläche EQ wie die Höhe des Parallelepipedons EHQP zur Höhe des Parallelepipedons BGML. Parallelepipeda aber, deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt ſind, ſind (11, 34. S.) einander gleich; folglich iſt das Parallelepipedon BGML dem Parallelepipedon EHQP gleich. Nun iſt von dem Körper BGML die Pyramide ABCG, und von dem Körper EHQP die Pyramide DEFH der ſechſte Theil; folglich iſt die Pyramide *AB*CG der Pyramide DEFH gleich.

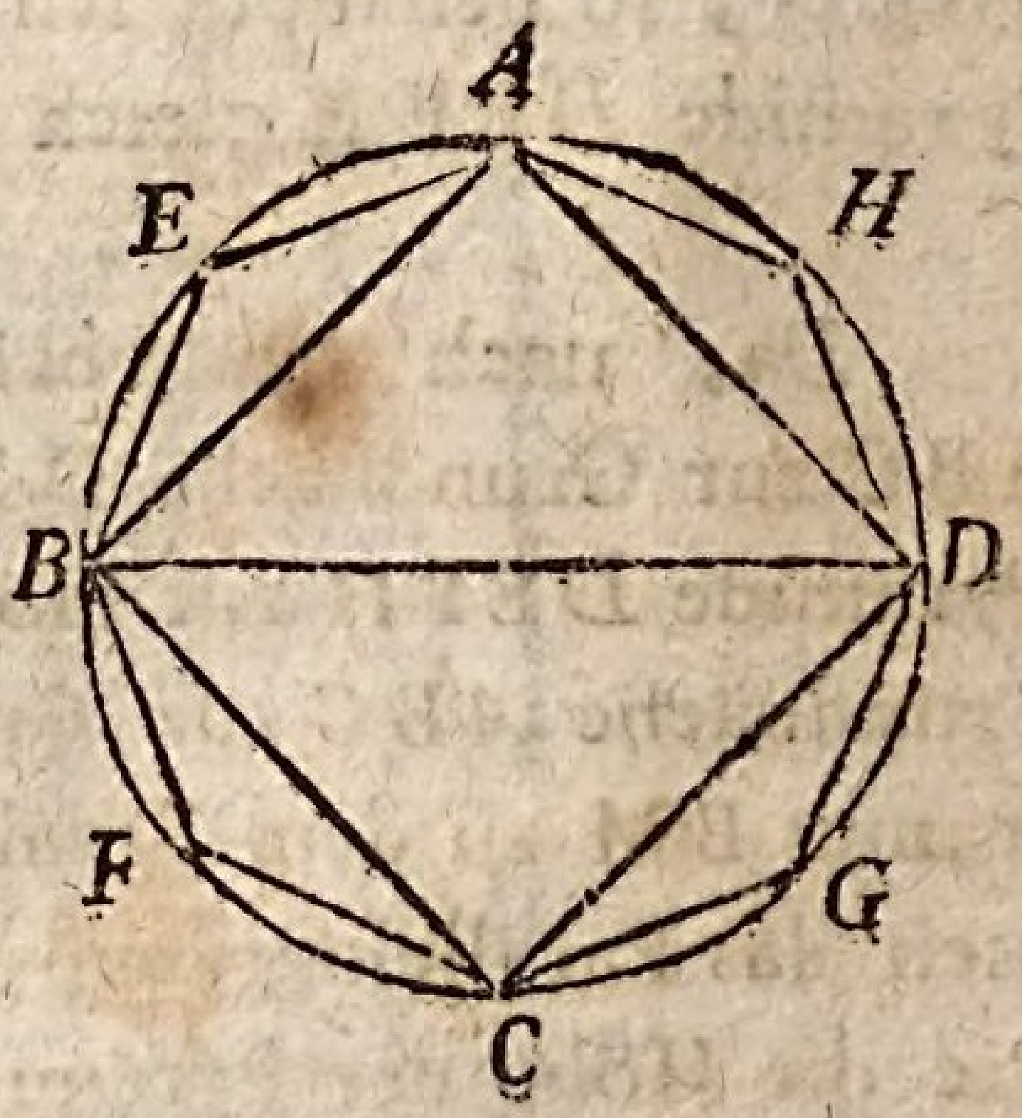
Demnach ſind in gleichen dreyſeitigen Pyramiden die Grundflächen u. ſ. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrſaz. Jeder Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders, der einerley Grundfläche und gleiche Höhe mit ihm hat.

Es habe ein Kegel einerley Grundfläche mit einem *Cy*linder nämlich den Kreis ABC*D*, und eine gleiche Höhe, ſo behaupte ich, daſs der Kegel der dritte Theil des Cylinders, das heiſst, daſs der Cylinder das Dreyfache des Kegels ſey.

Be-

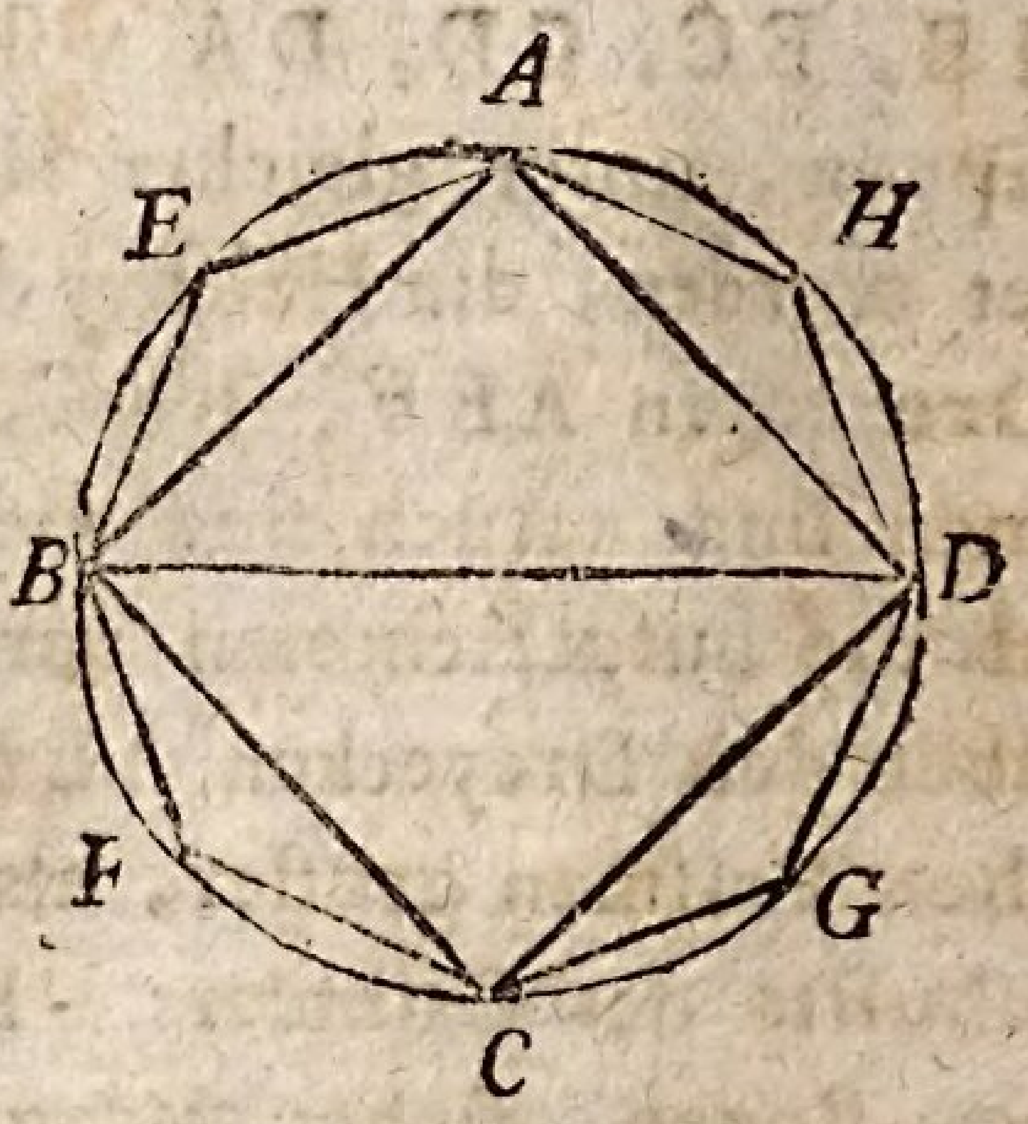


Beweis. Wenn der Cylinder nicht das Dreyfache des Kegels ist, so ist er entweder grösser, oder kleiner, als das Dreyfache. Er sey *zuerst* grösser, als das Dreyfache, so beschreibe man in den Kreis *ABCD* das Quadrat ABCD, und das Quadrat ABCD ist grösser, als die Hälfte des Kreises ABC*D*. Hierauf errichte man auf dem Quadrate ABC*D* ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma, welches grösser, als die Hälfte des Cylinders, seyn wird. *D*enn wenn man um den Kreis ABCD ein Quadrat beschreibt, so ist das darein beschriebene Quadrat die Hälfte des darum beschriebenen; auch sind die über diesen Grundflächen errichteten gleich hohen Parallelepipeda die Prismen selbst, folglich verhalten sich die Prismen wie die Grundflächen, und mithn ist das über dem Quadrate *A*BCD errichtete Prisma die Hälfte des über dem, um den Kreis *A*BCD beschriebenen, Quadrate errichteten Prismas; auch ist der Cylinder kleiner, als das über dem um den Kreis ABCD beschriebenen, Quadrate errichtete Prisma; folglich ist das über dem Quadrate ABCD in gleicher Höhe mit dem Cylinder errichtete Prisma grösser, als die Hälfte des Cylinders. Man halbire nun die Bogen *A*B, BC, C*D*, D*A* in den Punkten E, F, G, H, und ziehe die *A*E, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, so ist, wie oben (12, 2. S.) gezeigt worden, jedes der *D*reyecke AEB, BFC, CG*D*, DH*A* grösser, als der halbe Abschnitt des Kreises ABCD, in welchem es liegt. Man errichte nun über jedem der *D*reyecke AEB, BFC, CGD, *D*AH mit dem Cylinder gleichhohe Prismen, so ist auch jedes der so errichteten Prismen grösser, als die Hälfte des ihm zugehörigen Abschnitts in dem Cylinder, weil, wenn man durch die Punkte E, F, G, H Parallelen mit den Linien AB, BC, C*D*, DA zieht, und die Parallelogramme

AB,

AB, BC, CD, DA vollendet, über welchen die Parallelepipeda, unter gleicher Höhe mit dem Cylinder, aufgerichtet werden, die Hälften der so aufgerichteten die über den Dreyecken AEB, BFC, CGD, DHA befindlichen Prismen sind. Auch sind die Abschnitte des Cylinders kleiner, als die aufgerichteten Parallelepipeda; folglich sind auch die über den Dreyecken AEB, BFC, CGD, DHA befindlichen Prismen grösser, als die Hälften der zugehörigen Abschnitte des Cylinders. Halbirt man also die übriggebliebenen Bogen, ziehet alsdann die geraden Linien, und errichtet über jedem der erhaltenen Dreyecke wiederum mit dem Cylinder gleich hohe Prismen, und sezt dies immer so fort, so werden endlich (12, 2. *Lehns.* 1.) Abschnitte des Cylinders übrig bleiben, welche kleiner seyn werden, als der Ueberschuss, um welchen der Cylinder das Dreyfache des Kegels übertrift. Es bleiben also solche übrig, und sie seyen AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, so ist das übrigbleibende Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, die Höhe aber die des Cylinders ist, grösser, als das Dreyfache des Kegels. Aber (12, 7. Zus.) ist das Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und dessen Höhe die des Cylinders ist, das Dreyfache der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und deren Spize die des Kegels ist; folglich ist auch die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCDGH, und deren Spize die des Kegels ist, grösser, als der Kegel, der den Kreis ABCD zur Grundfläche hat. Sie ist aber auch kleiner, denn sie wird von ihm eingeschlossen, welches unmöglich ist. Folglich ist der Cylinder nicht grösser, als das Dreyfache des Kegels.

Ich behaupte aber ferner, dass der Cylinder auch nicht kleiner sey; als das Dreyfache des Kegels. Denn es sey, die Möglichkeit angenommen, der Cylinder kleiner, als das Dreyfache des Kegels, so ist umgekehrt der Kegel grösser, als der dritte Theil des Cylinders. Man beschreibe in den Kreis ABCD das Quadrat ABCD, so ist das Quadrat ABCD grösser, als die Hälfte des Kreises ABCD. Ueber dem



dem Quadrate A B C D errichte man eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize habe, so ist diese Pyramide grösser, als die Hälfte des Kegels, weil, wie vorhin gezeigt worden ist, wenn man um den Kreis ein Quadrat beschreibt, das Quadrat *A* B C D die Hälfte des um den Kreis beschriebenen Quadrats ist. Und wenn man über den Quadraten mit dem Kegel gleich hohe Parallelepipeda, die auch Prismen genannt werden, errichtet, so ist das über dem Quadrate A B C D errichtete die Hälfte des über dem um den Kreis beschriebenen errichteten, denn (11, 32. S.) verhalten sie sich wie ihre Grundflächen. Ebendies gilt auch von ihren Drittheilen, folglich ist die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Quadrat A B C D, die Hälfte der Pyramide, die über dem um den Kreis beschriebenen Quadrate errichtet wird. Aber die über dem um den Kreis beschriebenen Quadrate errichtete Pyramide ist grösser, als der Kegel, denn sie enthält ihn in sich; folglich ist die Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat A B C *D*, die Spize aber die des Kegels ist, grösser, als die Hälfte des Kegels. Man halbire die Bogen A *B*, B C, C *D*, *D A* in den Punkten E, F, G, H, und ziehe die Linien A E, E *B*, B F, F C, C G, G D, D H, H A, so ist jedes der Dreyecke A E *B*, B F C, C G *D*, D H *A* grösser, als die Hälfte des zu ihm gehörigen Abschnitts von dem Kreise A B C *D*. Man errichte über jedem der Dreyecke A E B, B F C, C G D, *D* H A Pyramiden, die einerley Spize mit dem Kegel haben, so ist jede der so errichteten Pyramiden grösser, als die Hälfte des ihr zugehörigen Abschnitts des Kegels. Halbirt man also die übrigbleibenden Bogen, zieht die geraden Linien, und errichtet über jedem der erhaltenen Dreyecke eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize hat, und sezt dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. *Lehns.* 1.)

Ke-

Kegelabschnitte übrig, die kleiner sind, als der Ueberschuss, um welchen der Kegel den dritten Theil des Cylinders übertrift. Sie bleiben also übrig, und seyen die über den AE, EB, BF; FC, CG, GD, DH, HA befindlichen; so ist die übrigbleibende Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und deren Spize die des Kegels ist, grösser, als der dritte Theil des Cylinders. Aber (12, 7. *Zus.*) ist die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon *A*E*B*FCGDH, und deren Spize die des Kegels ist, der dritte Theil eines Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und dessen Höhe mit der des Cylinders einerley ist; folglich ist das Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AE*B*FCGDH, und dessen Höhe mit der des Cylinders einerley ist, grösser, als der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis *A*BCD ist. Es ist aber auch kleiner, denn es ist in ihm enthalten, welches unmöglich ist. Folglich ist der Cylinder nicht kleiner, als das Dreyfache des Kegels. Es ist aber gezeigt worden, dass er auch nicht grösser sey, als das Dreyfache, folglich ist der Cylinder das Dreyfache des Kegels, und mithin der Kegel der dritte Theil des Cylinders.

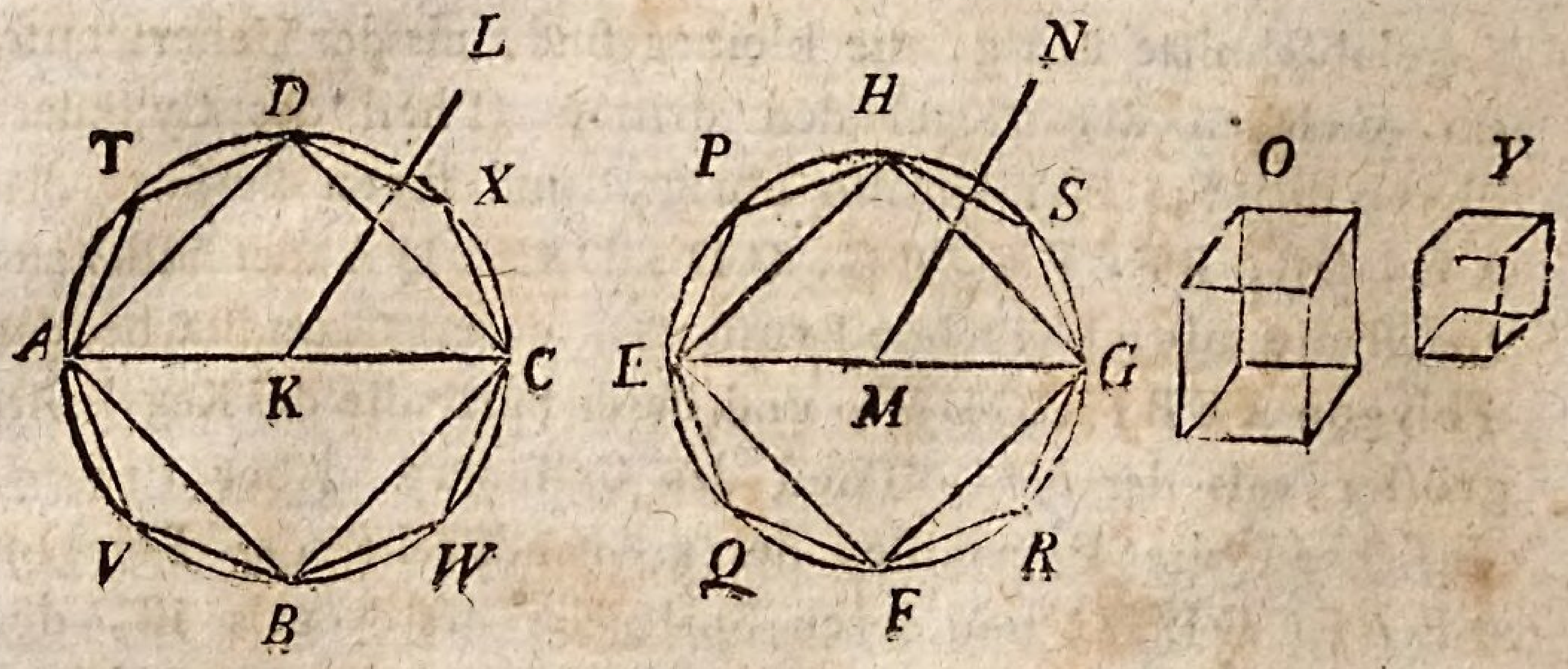
Demnach ist jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders u. s. w. w. z. e. w.

11. *Saz.*

Lehrsaz. Kegel und Cylinder von einerley Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Es seyen Kegel und Cylinder von einerley Höhe, deren Grundflächen die Kreise A*B*C*D*, EFGH, die *A*xen aber die KL, MN, und die Durchmesser der Grundflächen AC, EG seyen, so behaupte ich, dass der Kreis AB*CD* zum Kreise EFGH sich verhalte wie der Kegel AL zum Kegel EN.

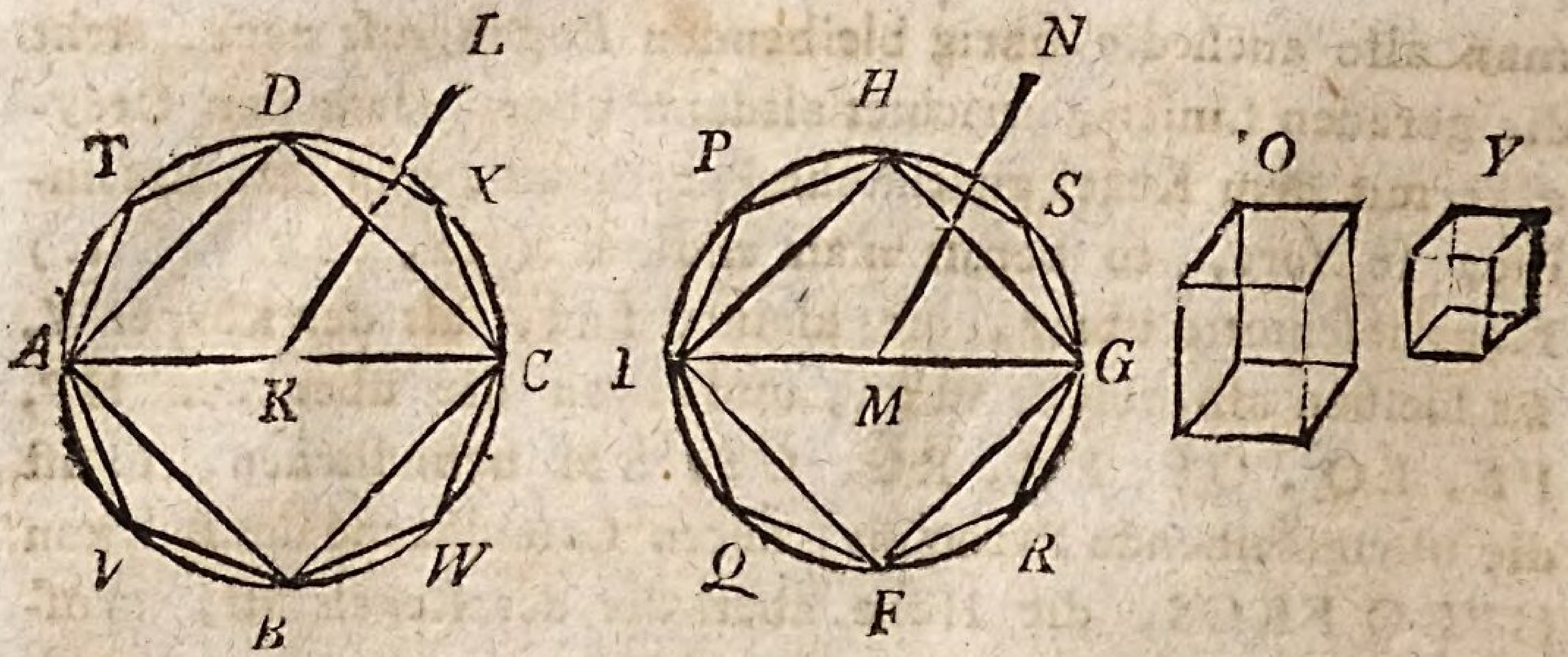
Be-



Beweis. Wäre dies nicht, so verhielte sich der Kreis *ABCD* zum Kreise EFGH wie der Kegel AL zu einem Körper, der kleiner, oder grösser wäre, als der Kegel EN. Er sey *zuerst* kleiner, und heisse O, auch sey der Körper Y dem Unterschiede gleich, um welchen der Körper O kleiner ist, als der Kegel EN, so ist also der Kegel EN den Körpern O, Y zusammen gleich. Man beschreibe in dem Kreise EFGH das Quadrat EFGH, so ist dieses Quadrat grösser, als die Hälfte des Kreises. Man errichte über dem Quadrate EFGH eine mit dem Kegel gleich hohe Pyramide, so ist die errichtete Pyramide grösser, als die Hälfte des Kegels. Denn wenn man um den Kreis ein Quadrat beschreibt, und über diesem eine mit dem Kegel gleichhohe Pyramide errichtet, so ist die darein beschriebene Pyramide die Hälfte der darum beschriebenen, denn (12, 6. S.) verhalten sie sich zu einander wie ihre Grundflächen. Der Kegel aber ist kleiner, als die um ihn beschriebene Pyramide; folglich ist die Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat EFGH, die Spize aber die des Kegels ist, grösser, als die Hälfte des Kegels. Man halbire die *B*ogen EF, FG, GH, HE in den Punkten Q, R, S, P, und ziehe die HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH, so ist jedes der Dreyecke HPE, EQF, FRG, GSH grösser, als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Man errichte über jedem der Dreyecke HPE, EQF, FRG, GSH eine mit dem Kegel gleichhohe Pyramide, so ist auch jede der so errichteten Pyramiden grösser, als die Hälfte des zugehörigen Kegelabschnitts. Halbirt man

man also auch die übrig bleibenden *Bogen* aufs neue, zieht die geraden Linien, errichtet alsdann über jedem der Dreyecke mit dem Kegel gleichhohe Pyramiden, und sezt dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. *Lehns.* 1.) Kegelabschnitte übrig, die kleiner sind, als der Körper Y. Es bleiben also solche übrig, und seyen die über den HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH befindlichen, so ist die übrigbleibende Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HPEQFRGS, die Höhe aber die des Kegels ist, grösser, als der Körper O. Man beschreibe in dem Kreise ABCD ein dem Polygone HPEQFRGS ähnliches und ähnlichliegendes Polygon DTAVBWCX, und errichte über demselben die mit dem Kegel gleichhohe Pyramide AL. *Da* nun (6, 20. S. und 12, 1. S.) das Quadrat von A*C* zu dem Quadrate von EG sich verhält wie das Polygon DTAVBWCX zu dem Polygone HPEQFRGS, das Quadrat von AC aber zu dem Quadrate von EG (12, 2. S.) wie der Kreis ABCD zum Kreise EFGH, so verhält sich (5, 11. S.) der Kreis AB*C*D zum Kreise EFGH wie das Polygon DT*A*V*B*WCX zu dem Polygone HPEQFRGS. Aber nach der Construction verhält sich der Kreis ABC*D* zum Kreise EFGH wie der Kegel *A*L zu dem Körper O, und (12, 6. S.) das Polygon DTAVBWCX zu dem Polygone HPEQFRGS wie die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon DT*A*V*B*WCX, und deren Spize der Punkt L, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HPEQFRG*S*, und deren Spize der Punkt N. Wie sich also der Kegel *A*L zu dem Körper O verhält, so verhält sich die Pyramide deren Grundfläche das Polygon *D*TAVBWCX, und deren Spize der Punkt L, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HPEQFRGS, und deren Spize der Punkt N; folglich auch *verwechselt*, der Kegel AL zu der in ihm befindlichen Pyramide wie der Körper O zu der in dem Kegel EN befindlichen Pyramide. *Der* Kegel AL aber ist grösser, als die in ihm befindliche Pyramide; folglich ist auch der *Körper* O grösser, als die in dem Kegel EN befindliche Pyramide. Er ist aber auch kleiner, welches ungereimt ist; folglich verhält sich der

Krei-



Kreis ABCD zum Kreiſe EFGH nicht ſo, wie der Kegel AL zu einem Körper der kleiner wäre, als der Kegel EN. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch der Kreis EFGH zum Kreiſe ABCD ſich nicht ſo verhalte, wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner wäre, als der Kegel AL.

Ich behaupte aber ferner, daſs der Kreis ABCD zum Kreiſe EFGH ſich auch nicht ſo verhalte, wie der Kegel AL zu einem Körper, der gröſſer iſt, als der Kegel EN. Denn es ſey, die Möglichkeit angenommen, dieſer Körper gröſſer, und heiſſe O, ſo verhält ſich *umgekehrt* der Kreis EFGH zum Kreiſe ABCD wie der Körper O zum Kegel AL. Aber der Körper O verhält ſich zum Kegel AL wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner iſt, als der Kegel AL; folglich verhält ſich auch der Kreis EFGH zum Kreiſe ABCD wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner iſt, als der Kegel AL, wovon die Unmöglichkeit gezeigt worden iſt; folglich verhält ſich der Kreis ABCD zum Kreiſe EFGH nicht ſo, wie der Kegel AL zu einem Körper der gröſſer iſt, als der Kegel EN. Es iſt aber gezeigt worden, daſs dieſer Körper auch nicht kleiner ſeyn könne; folglich verhält ſich der Kreis ABCD zum Kreiſe EFGH wie der Kegel AL zum Kegel EN. Aber wie der Kegel zum Kegel, ſo verhält ſich der Cylinder zum Cylinder, denn (12, 10. S.) iſt der eine das Dreyfache des andern; folglich verhält ſich auch der Kreis ABCD zum Kreiſe EFGH

wie

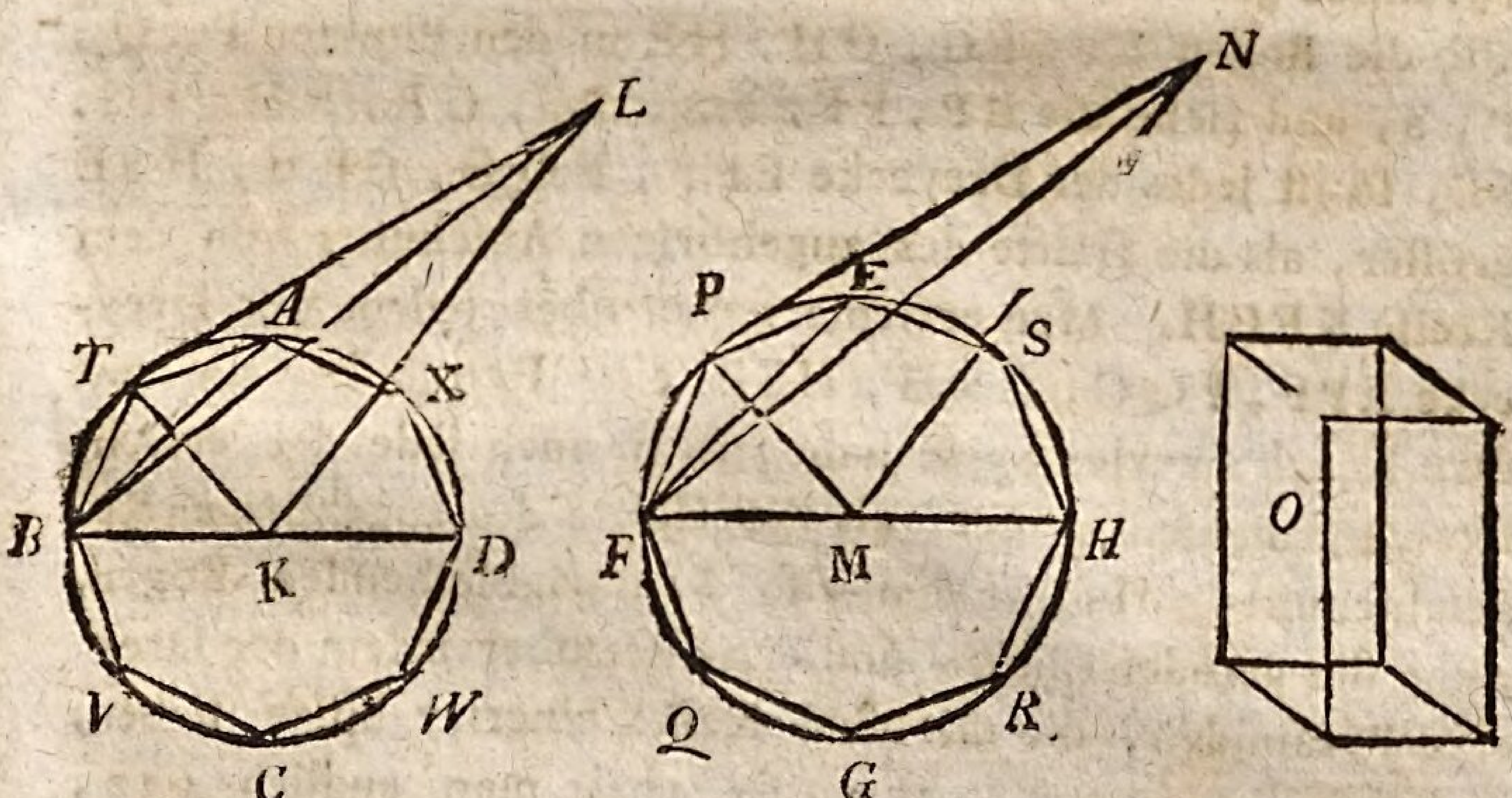
wie die über ihnen befindlichen mit den Kegeln gleichhohen Cylinder.

Demnach verhalten sich Kegel und Cylinder u. s. w. w. z. e. w.

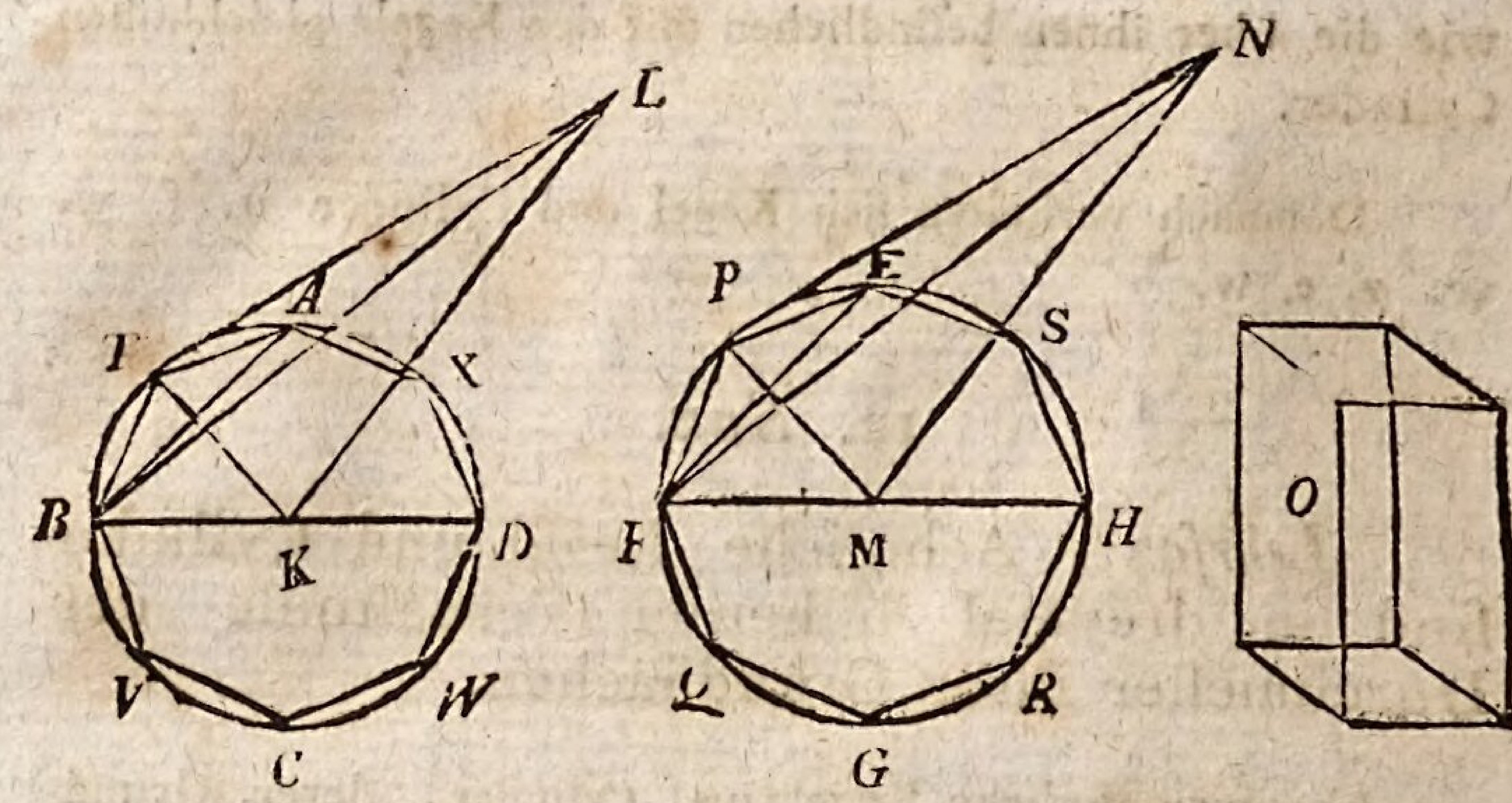
12. *Saz.*

Lehrsaz Aehnliche Kegel und Cylinder sind in dreymal höherem Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Es seyen ähnliche Kegel und Cylinder, deren Grundflächen die K-eise *ABCD*, EFGH, die Durchmesser aber BD, FH und die Axen der Kegel oder der Cylinder KL, MN seyen, so behaupte ich, dass der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD, und dessen Spize der Punkt L ist, zu dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis EFGH, und dessen Spize der Punkt N ist, ein dreymal höheres Verhältniss habe, als die BD zu der FH.



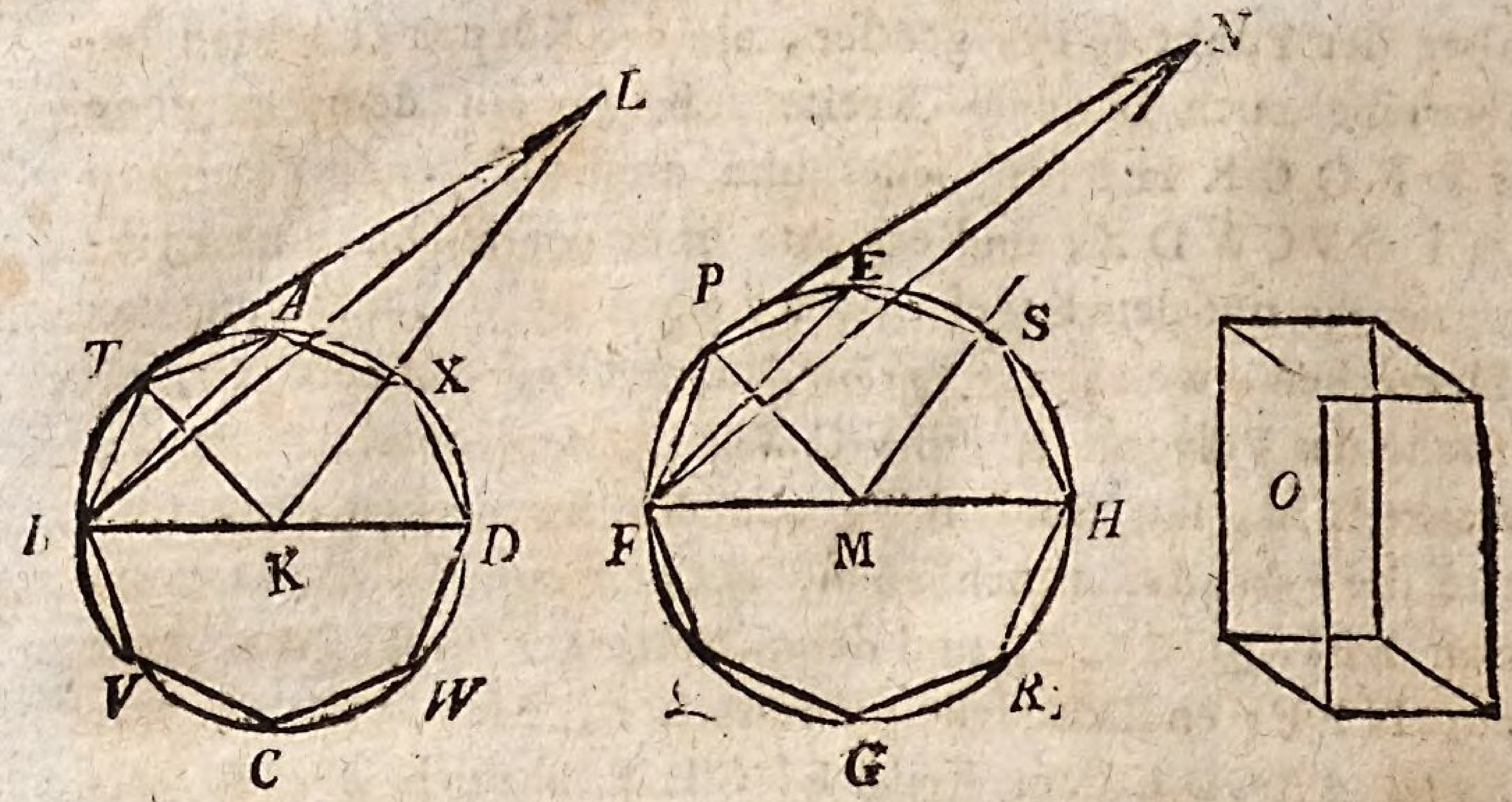
Beweis. Wenn der Kegel ABCDL zu dem Kegel EFGHN nicht ein dreymal höheres Verhältniss hat, als die BD zu der FH, so wird der Kegel *A*BCDL zu einem Körper der entweder kleiner, oder grösser ist, als der Kegel EFGHN ein dreymal höheres Verhältniss haben. Es sey die-



dieſer Körper *zuerſt* kleiner, und heiſſe O. Man beſchreibe in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH, ſo iſt das Quadrat EFGH gröſſer, als die Hälfte des Kreiſes EFGH. Hierauf errichte man über dem Quadrate EFGH eine mit dem Kegel gleichhohe Pyramide, ſo iſt auch die errichtete Pyramide gröſſer, als die Hälfte des Kegels. Man halbire alſo die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten P, Q, R, S, und ziehe die EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, ſo iſt jedes der Dreyecke EPF, FQG, GRH, HSE gröſſer, als die Hälfte des zugehörigen Abſchnitts von dem Kreiſe EFGH. Man errichte ferner über jedem der Dreyecke EPF, FQG, GRH, HSE eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize habe, ſo iſt auch jede der errichteten Pyramiden gröſſer, als die Hälfte des zugehörigen Kegelabſchnitts. Halbirt man alſo die übrigbleibenden Bogen, zieht die geraden Linien, und errichtet über jedem der Dreyecke Pyramiden, die mit dem Kegel einerley Spize haben, und ſezt dies immer ſo fort, ſo behält man endlich (12, 2. *Lehnſ.* 1.) Kegelabſchnitte übrig, welche kleiner ſind, als der Ueberſchuſs, um welchen der Kegel EFGHN den Körper O übertrift. Man behalte alſo ſolche übrig, und es ſeyen die über den Abſchnitten EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE befindlichen, ſo iſt die übrige Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, die Spize

aber

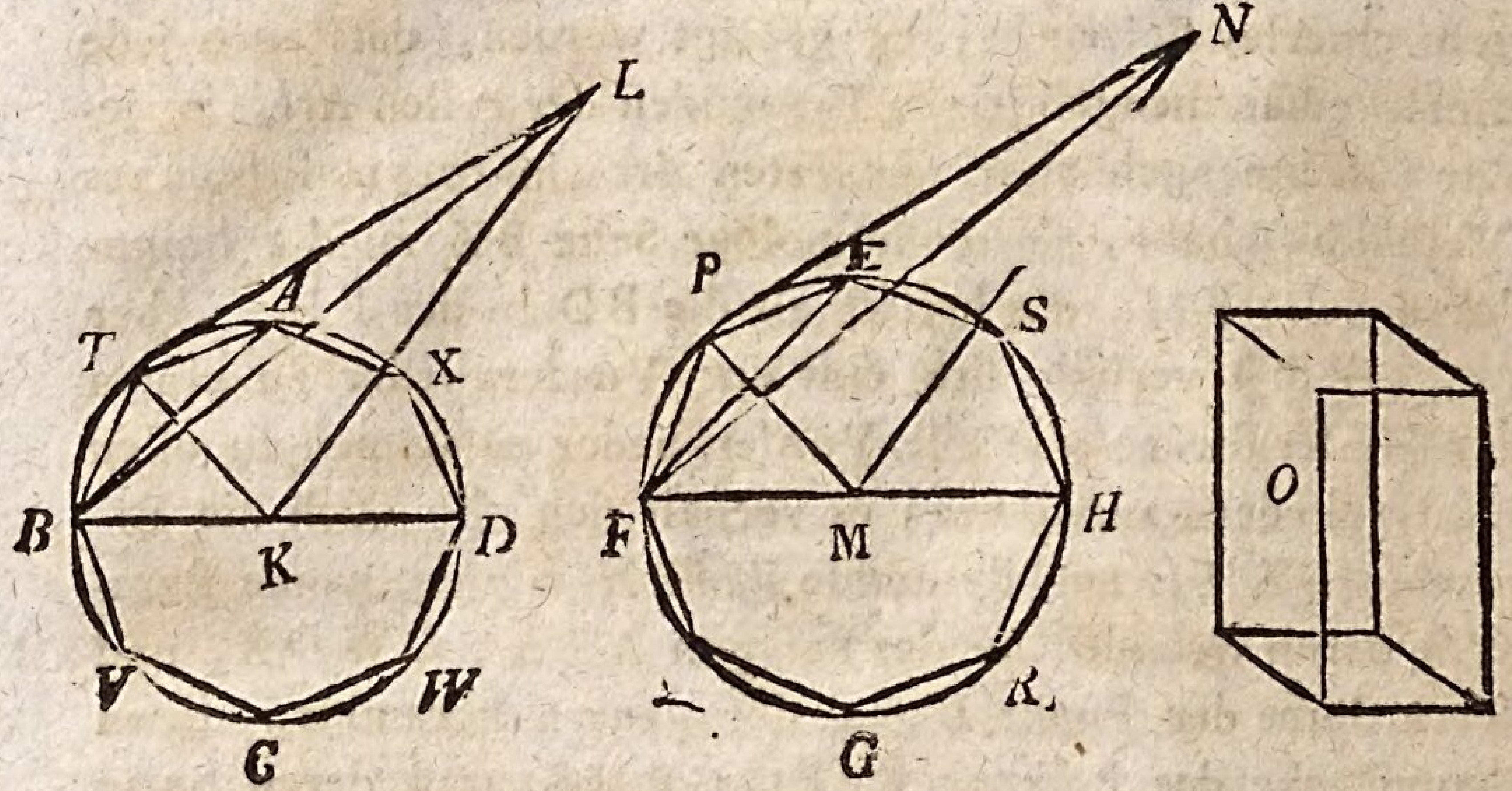
aber der Punkt N ist, grösser, als der Körper O. Man beschreibe auch in dem Kreise ABCD ein dem Polygone EPFQGRHS ähnliches und ähnlichliegendes Polygon *A*TBVCWDX, und errichte über demselben eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize habe, und von den Dreyecken, welche die Pyramide einschliessen, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L ist, sey eins LBT, von den Dreyecken aber, welche die Pyramide einschliessen, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N ist, sey eins NFP; endlich ziehe man die KT, MP. Da nun der Kegel *AB*CDL dem Kegel EFGHN ähnlich ist, so verhält sich (11, 24. Erkl.) die BD zu der FH wie die *A*xe KL zu der *A*xe MN. *A*ber wie die *B*D zu der FH sich verhält, so verhält sich die BK zu der FM; folglich verhält sich auch die *B*K zu der FM wie die KL zu der MN, und mithin *verwechselt*, die BK zu der KL wie die FM zu der MN. Nun sind auch die Winkel BKL, FMN, als rechte, einander gleich, und die um die gleichen Winkel *B*KL, FMN liegenden Seiten proportionirt; folglich ist (6, 6. S.) das Dreyeck BKL dem Dreyecke FMN ähnlich. Ferner, da die BK zu der KT sich verhält wie die FM zu der MP, und diese um die gleichen Winkel BKT, FMP liegen, (denn der Winkel FMP ist der nämliche Theil von den vier rechten Winkeln, die um den Mittelpunkt M liegen, wie der Winkel *B*KT von den vier rechten Winkeln, die um den Mittelpunkt K liegen) da also die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, so ist (6, 6. S.) das Dreyeck BKT dem Dreyecke FMP ähnlich. Ferner, da gezeigt worden ist, dass die BK zu der KL sich verhalte wie die FM zu der MN, die *B*K aber der KT, und die FM der MP gleich ist, so verhält sich die KT zu der KL wie die PM zu der MN, und es sind also die um die gleichen, nämlich rechten, Winkel TKL, PMN liegenden Seiten proportionirt; folglich ist das Dreyeck LKT dem Dreyecke MNP ähnlich. Da aber, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke BKL, FMN, die LB zu der BK sich verhält wie die NF zu der FM, und wegen der Aehnlichkeit der



ecke *B*KT, FMP, die KB zu der BT wie die MF zu der FP, so verhält sich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die LB zu der BT wie die NF zu der FP. Ferner, da wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke LTK, NPM, die LT zu der TK sich verhält wie die NP zu der PM, und wegen der *A*ehnlichkeit der *D*reyecke KBT, PMF, die KT zu der TB wie die MP zu der PF, so verhält sich auch *gleichförmig*, die LT zu der TB wie die NP zu der PF Es ist aber gezeigt worden, daſs auch die TB zu der BL sich verhalte, wie die PF zu der FN; folglich verhält sich wiederum *gleichförmig*, die TL zu der LB wie die PN zu der NF, folglich sind die Seiten der Dreyecke LT*B*, NPF proportionirt, und mithin (6, 5. S.) die *D*reyecke selbst gleichwinklicht, und einander ähnlich; folglich ist (11, 9. Erkl.) auch die Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck BKT und deren Spize der Punkt L ist, ähnlich der Pyramide, deren Grundfläche das *D*reyeck FMP, und deren Spize der Punkt N ist, denn sie werden von gleichvielen ähnlichen Flächen eingeschlossen. Aehnliche dreyseitige Pyramiden aber sind (12, 8. S.) in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten; folglich hat die Pyramide BKTL zu der Pyramide FMPN ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BK zu der FM. *Auf* ähnliche *A*rt kann nun, wenn man von den Punkten A, X, D, W, C, V an den Punkt K, und von den Punkten E, S, H, R, G, Q an den Punkt M gerade Linien zieht, und

über

über den *D*reyeecken Pyramiden errichtet, die mit den Kegeln einerley Spizen haben, gezeigt werden, dafs auch jede dieser zusammengehörigen Pyramiden der ersten Art, zu jeder zusammengehörigen der lezten *A*rt ein dreymal höheres Verhältnifs habe, als die homologe Seite BK zu der homologen Seite FM, das heifst, als die BD zu der FH. Aber (5, 12. S.) verhält sich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen; es verhält sich also auch die Pyramide BKTL zur Pyramide FMPN wie die ganze Pyramide deren Grundfläche das Polygon ATBVCW*D*X, und deren Spize der Punkt L, zu der ganzen Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N ist; folglich hat auch die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spize der Punkt N ist, ein dreymal höheres Verhältnifs, als die *B*D zu der FH. Es ist aber angenommen, der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis *A*BCD, und dessen Spize der Punkt L ist, habe zu dem Körper O ein dreymal höheres Verhältnifs, als die BD zu der FH; wie sich also der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis *A*BC*D*, und dessen Spize der Punkt L ist, zu dem Körper O verhält, so verhält sich die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L ist, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N ist, und *verwechselt*, (5, 16. S.) wie der Kegel dessen Grundfläche der Kreis ABC*D*, und dessen Spize der Punkt L ist, zu der in ihm befindlichen Pyramide, deren Grundfläche das Polygon *A*TBVCWDX, und deren Spize der Punkt L, so verhält sich der Körper O zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N ist. Der genannte Kegel aber ist gröffer, als die in ihm befindliche Pyramide, denn er enthält sie in sich, folglich ist auch der Körper O gröffer, als die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N ist. Er ist aber auch kleiner, welches un-



unmöglich ist; folglich hat der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD, und dessen Spize der Punkt L ist, nicht zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis EFGH und dessen Spize der Punkt N ist, ein dreymal höheres Verhältniss, als die *BD* zu der FH. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dass auch der Kegel EFGHN nicht zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel *A*BCDL ein dreymal höheres Verhältniss habe, als die FH zu der BD.

Ich behaupte aber ferner, dass auch der Kegel *A*BCDL nicht zu einem Körper, der grösser ist, als der Kegel EFGHN, ein dreymal höheres Verhältniss habe, als die BD zu der FH. Denn er habe, die Möglichkeit angenommen, ein solches zu einem grössern Körper, und dieser sey O, so hat *umgekehrt* der Körper O zu dem Kegel ABCDL ein dreymal höheres Verhältniss, als die FH zu der *BD*. Wie sich aber der Körper O zu dem Kegel ABC*D*L verhält, so verhält sich der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel ABC*D*L. Folglich hat auch der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel ABC*D*L, ein dreymal höheres Verhältniss, als die FH zu der B*D*, wovon die Unmöglichkeit gezeigt worden ist;

Folg-

Folglich hat der Kegel *A* B C *D* L nicht zu einem Körper, der grösser ist, als der Kegel E F G H N, ein dreymal höheres Verhältniss, als die B D zu der F H. Es ist aber gezeigt worden, dass er anch nicht zu einem kleinern Körper ein solches habe; folglich hat der Kegel A B C D L zu dem Kegel E F G H N ein dreymal höheres Verhältniss, als die B D zu der F H. Aber wie sich der Kegel zum Kegel verhält, so verhält sich der Cylinder zum Cylinder, denn ein Cylinder, der mit dem Kegel auf einerley Grundfläche stehet, und gleiche Höhe hat, ist das Dreyfache des Kegels, da (12, 10. S.) gezeigt worden ist, dass jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders sey, der mit ihm einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat; folglich hat auch der Cylinder zu dem Cylinder ein dreymal höheres Verhältniss, als die B D zu der F H.

Demnach sind ähnliche Kegel und Cylinder u. s. w. w. z. e. w.

13. *Saz.*

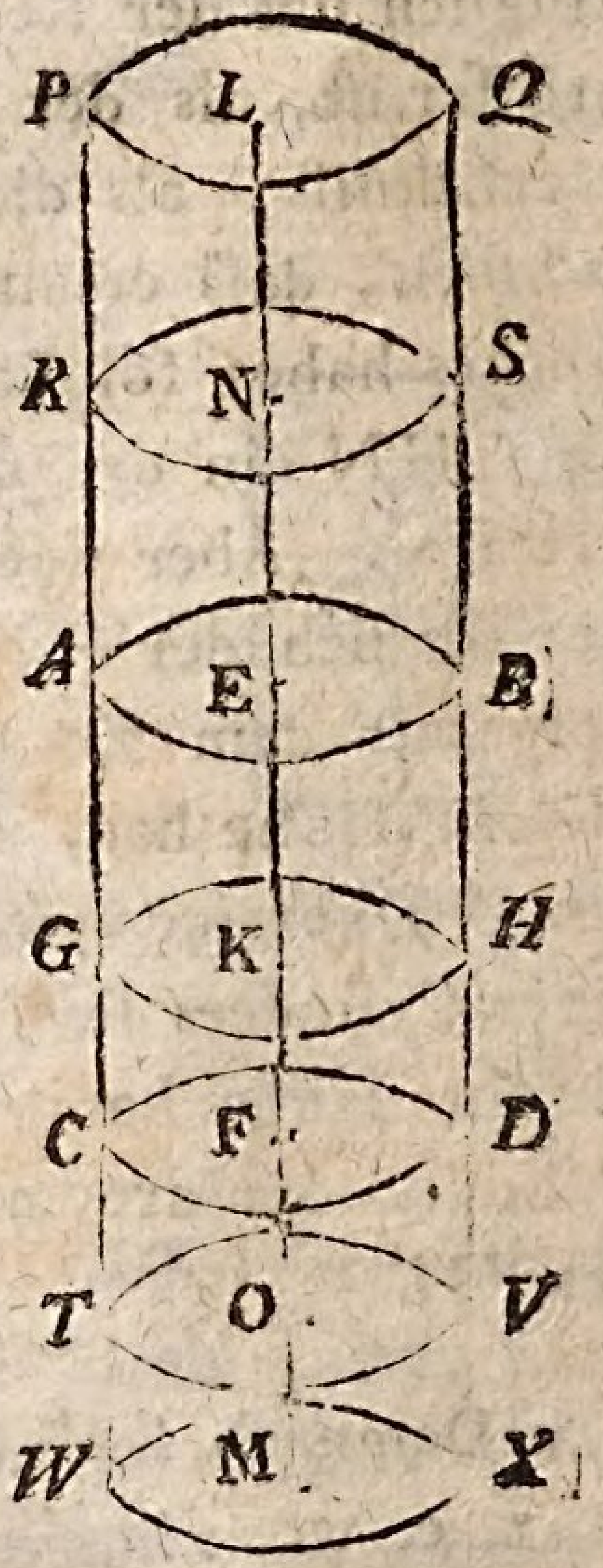
Lehrsaz. Wenn ein Cylinder von einer seinen gegenüberliegenden Flächen parallelen Ebene geschnitten wird, so verhält sich der eine Cylinder zum andern, wie die Axe des einen zur Axe des andern.

Der Cylinder *A* D werde von der Ebene G H, die den gegenüberliegenden Flächen A B, *C* D parallel ist, geschnitten, und der Durchschnitt begegne der *A*xe E F in dem Punkte K, so behaupte ich, dass der Cylinder *B G* zum Cylinder *G D* sich verhalte, wie die Axe E K zur *A*xe *K F*.

Beweis. Man verlängere die Axe E F, auf beyden Seiten nach den Punkten L, M und mache der *A*xe E K beliebig viele Stücke wie E N, N L und der Axe F K beliebig viele Stücke wie F O, O M gleich, hieranf lege man durch die Punkte L, N, O, M Ebenen, den beyden A B, C D parallel, und

in

in den Ebenen durch die Punkte L, N, O, M gedenke man sich um die Mittelpunkte L, N, O, M die Kreise PQ, RS, TV, WX, den beyden AB, CD gleich; endlich gedenke man sich die Cylinder QR, RB, DT, TX errichtet.



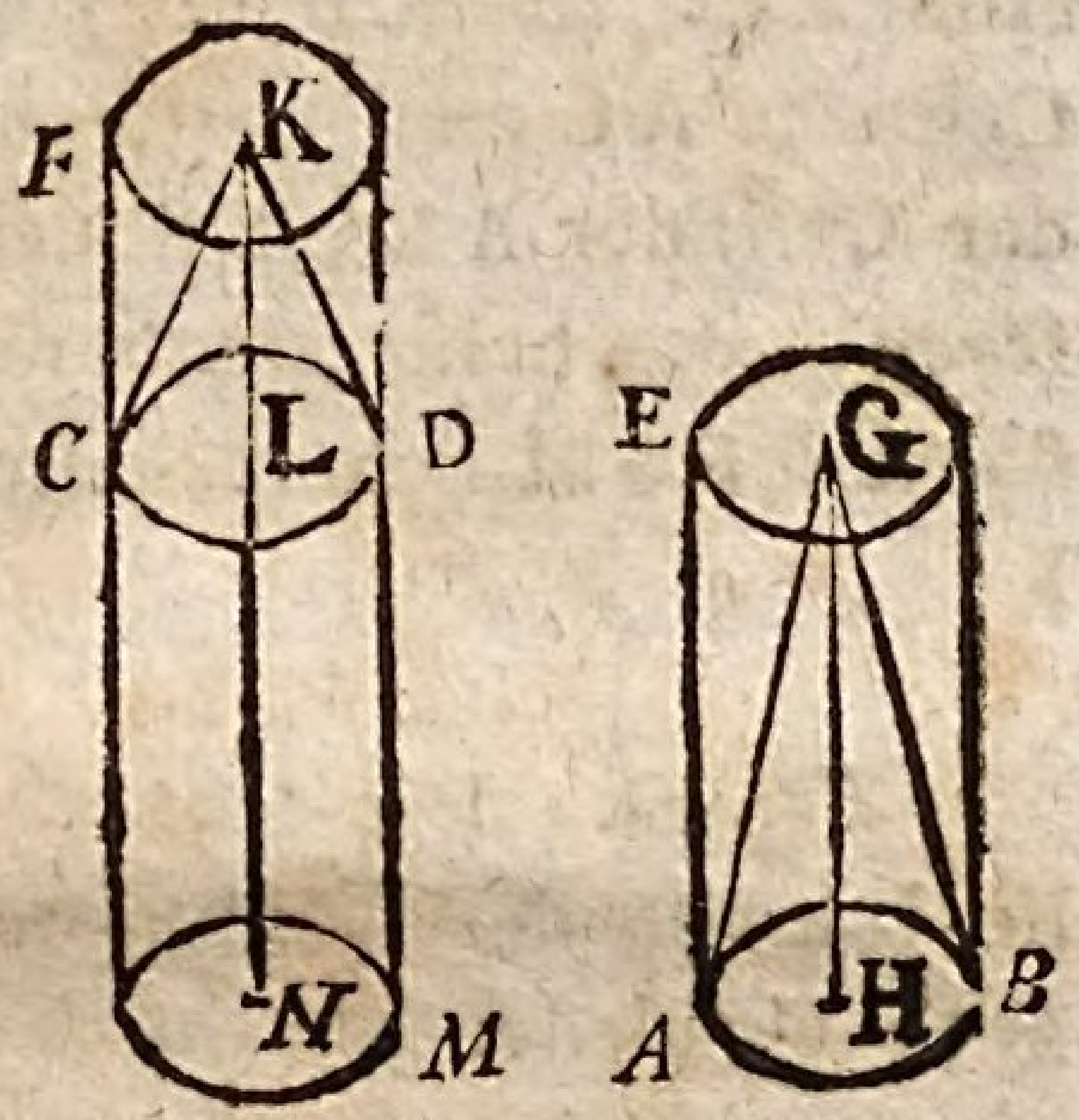
Da nun die Axen LN, NE, EK einander gleich sind, so verhalten sich (12, 11. S.) die Cylinder QR, RB, BG wie ihre Grundflächen. Die Grundflächen aber sind einander gleich, folglich sind auch die Cylinder QR, RB, BG einander gleich. Da nun aber die Axen LN, NE, EK, wie auch die Cylinder QR, RB, BG einander gleich sind, und die Anzahl der Stücke LN, NE, EK der Anzahl der Stücke QR, RB, BG gleich ist, so ist der Cylinder QG von dem Cylinder GB ebensovielfach, als die Axe KL von der Axe EK. Aus gleichen Gründen ist der Cylinder GX von dem Cylinder GD ebensovielfach, als die Axe MK von der Axe KF. Je nachdem nun die Axe KL ebensogross, oder grösser, oder kleiner ist, als die Axe KM, so ist auch der Cylinder QG ebensogross, oder grösser, oder kleiner, als der Cylinder GX. Da man nun von den vier Grössen, nämlich den zwey Axen EK, KF, und den zwey Cylindern BG, GD Gleichvielfache genommen hat, nämlich von der Axe EK und dem Cylinder BG, die Axe KL und den Cylinder QG, von der Axe KF und dem Cylinder GD aber, die Axe KM und den Cylinder GX, und gezeigt worden ist, dass, je nachdem die Axe KL grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die Axe KM, auch der Cylinder QG grösser, ebensogross, oder kleiner sey, als der Cylinder GX, so verhält (5, 4. Erkl.) die Axe EK zur Axe KF wie der Cylinder BG zum Cylinder GD, w. z. e. w.

16. Saz.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Kegel und Cylinder auf gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Es seyen auf den gleichen Grundflächen AB, CD die Cylinder F*D*, EB so behaupte ich, dass der Cylinder EB zum Cylinder FD sich verhalte wie die Axe GH zur Axe KL.



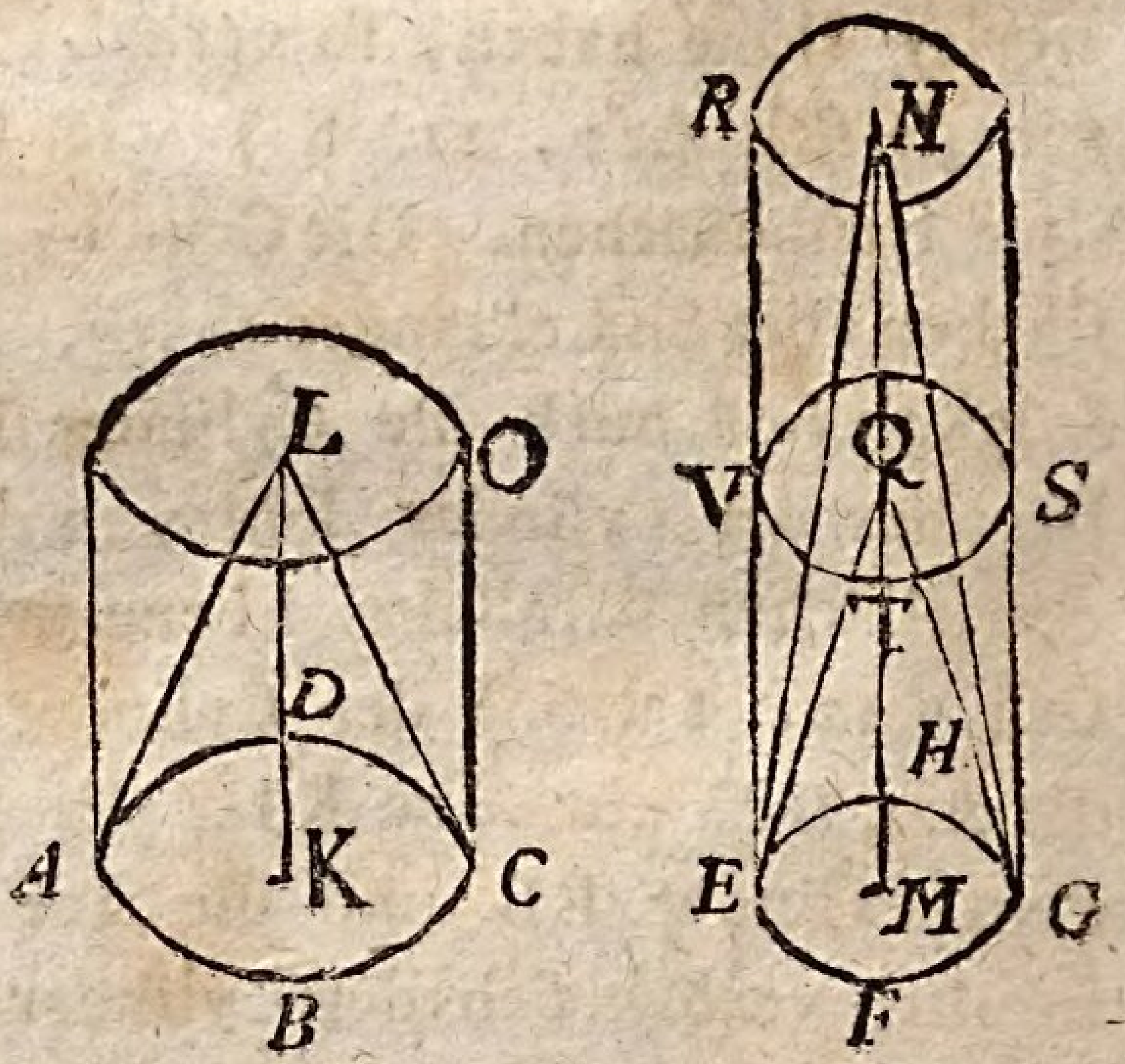
Beweis. Man verlängere die Axe KL nach dem Punkte N, und mache der Axe GH die LN gleich, hierauf gedenke man sich um die Axe LN den Cylinder CM beschrieben. Da nun die Cylinder EB, CM einerley Höhe haben, so verhalten sie sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen. Die Grundflächen aber sind einander gleich, folglich sind auch die Cylinder EB, CM einander gleich. Da aber der Cylinder FM von der seinen gegenüberliegenden Flächen parallelen Ebene geschnitten wird, so verhält sich (12, 13. S.) der Cylinder CM zum Cylinder FD wie die Axe LN zur Axe KL. Es ist aber der Cylinder CM dem Cylinder EB und die Axe LN der Axe GH gleich; folglich verhält sich der Cylinder EB zum Cylinder F*D* wie die Axe GH zur Axe KL. Aber wie der Cylinder EB zum Cylinder F*D* sich verhält, so verhält sich der Kegel ABG zum Kegel CDK, denn (12, 10. S.) sind die Cylinder die Dreyfachen der Kegel; folglich verhält sich auch die Axe GH zur Axe KL wie der Kegel ABG zum Kegel C*D*K, und der Cylinder E*B* zum Cylinder FD, w. z. e. w.

15. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kegeln und Cylindern sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt; und Kegel und Cylinder deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt sind, sind einander gleich.

Es seyen gleiche Kegel und Cylinder, deren Grundflächen die Kreise ABCD, EFGH, und deren Durchmesser AC, EG, die Axen aber KL, MN seyen, welche auch die Höhen der Kegel und Cylinder sind, und man vollende die Cylinder AO, EP, so behaupte ich, dass die Grundflächen der Cylinder AO, EP den Höhen umgekehrt proportionirt seyen, das heisst, dass die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH sich verhalte, wie die Höhe MN zur Höhe KL.

Beweis. Die Höhe KL ist der Höhe MN entweder gleich, oder ungleich. Sie sey ihr *zuerst* gleich; es ist aber auch der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich. Kegel und Cylinder aber, die einerley Höhen haben verhalten sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen; folglich ist die Grundfläche ABCD der Grundfläche EFGH gleich, und mithin sind sie umgekehrt proportionirt, das heisst, die Grundfläche ABCD verhält sich zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe KL.



Es sey aber nun die Höhe MN der Höhe KL nicht gleich, sondern die MN sey grösser, und man nehme von der MN die der Höhe KL gleiche QM weg, und schneide durch

durch den Punkt Q den Cylinder EP mit der den gegenüberliegenden Kreisflächen EFGH, RP parallelen Ebene TVS, und gedenke sich den Cylinder ES errichtet, dessen Grundfläche der Kreis EFGH, und dessen Höhe die QM ist. Da nun der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich, ES aber ein anderer Cylinder ist, so verhält sich (5, 7. S.) der Cylinder AO zum Cylinder ES wie der Cylinder EP zum Cylinder ES. Aber (12, 11. S.) verhält sich der Cylinder AQ zum Cylinder ES wie die Grundfäche ABCD zur Grundfläche EFGH, denn die Cylinder AO, ES haben einerley Höhe. Wie sich aber der Cylinder EP zum Cylinder ES verhält, so verhält sich (12, 13. S.) die Höhe MN zur Höhe MQ, denn der Cylinder EP wird von der seinen gegenüberliegenden Flächen parallelen Ebene TVS geschnitten. Demnach verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe MQ. Es ist aber die Höhe MQ der Höhe KL gleich; folglich verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe KL. Demnach sind in gleichen Cylindern AO, EP die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt.

Es seyen aber nun in den Cylindern AO, EP die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH, wie die Höhe MN zur Höhe KL, so behaupte ich, dass der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich sey.

Da, nach der vorigen Construction, die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH sich verhält wie die Höhe MN zur Höhe KL, die Höhe KL aber der Höhe MQ gleich ist, so verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfiäche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe MQ. Aber (12, 11. S.) verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie der Cylinder AO zum Cylinder ES, denn sie haben einerley Höhe. Wie sich aber die Höhe MN zur Höhe MQ verhält, so verhält sich (12, 13. S.) der Cylinder EP zum Cylinder ES; folglich verhält sich der Cylinder AO zum Cylinder ES wie der Cylinder EP zum

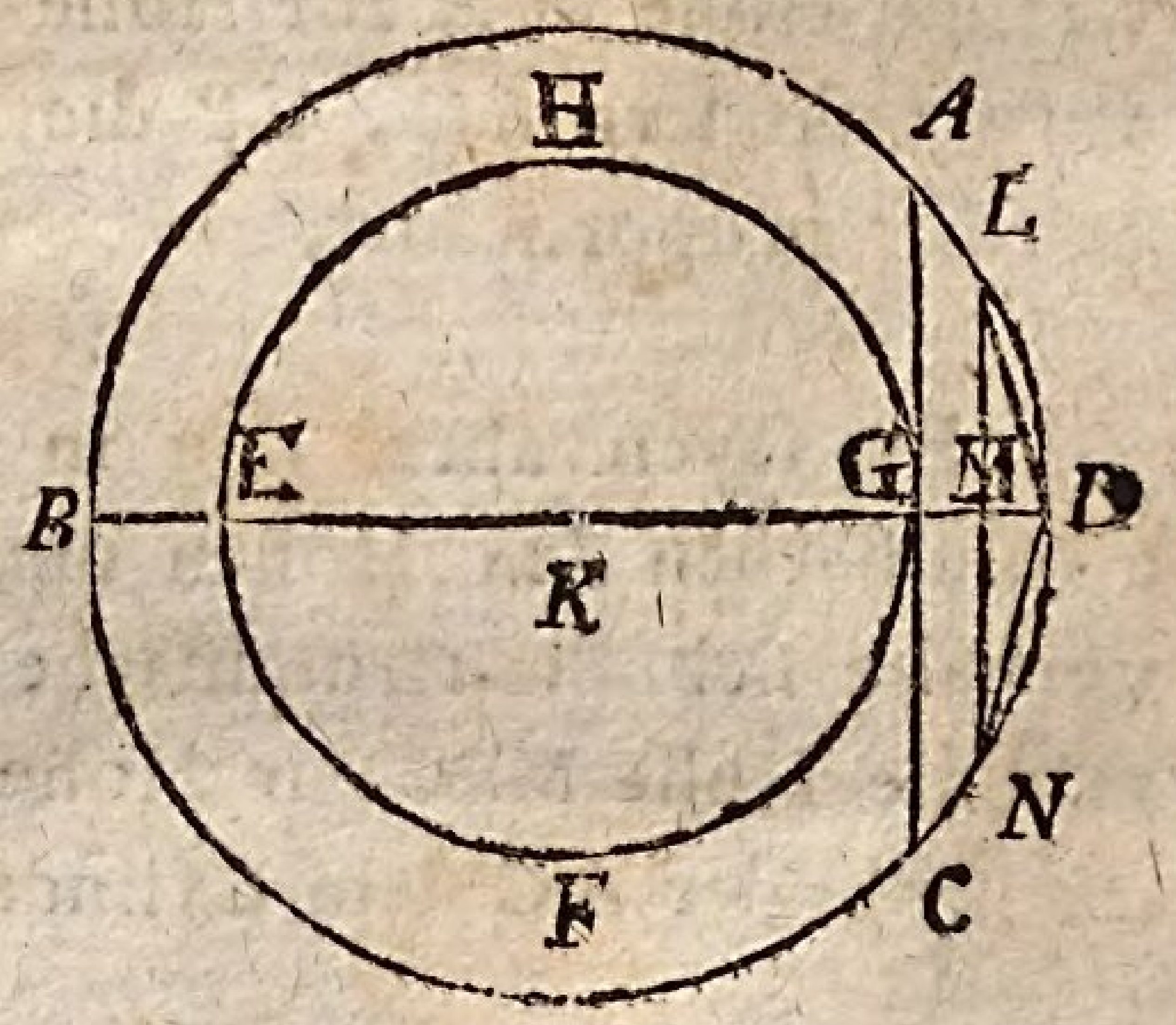
Cy-

Cylinder ES, und mithin ist (5, 9. S.) der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich. *Auf* ähnliche Art wird dies aber auch von Kegeln gezeigt w. z. e. w.

16. *Saz.*

Aufgabe. Wenn man zwey Kreise um einerley Mittelpunkt hat, in den grösseren Kreis ein Polygon von gleichen Seiten, und zwar nach einer geraden Zahl, zu beschreiben, das den kleinern Kreis nicht berühre.

Es seyen die zwey gegebenen Kreise *A*BCD, EFGH, um einerley Mittelpunkt K, man soll in den grössern Kreis *A*BC*D* ein Polygon von gleichen Seiten, und zwar nach einer geraden Zahl, beschreiben, das den kleinern Kreis EFGH nicht berühre.



Auflösung. u. *Beweis.* Man ziehe durch den Punkt *K* die Linie BD, errichte in dem Punkte G auf der *B*D die AG lothrecht, und verlängere sie nach C, so berührt (3, 16. S.) die AC den Kreis EFGH. Halbirt man also den *Bo*gen *B*AD, und seine Hälfte wieder aufs neue, und sezt man dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. *Lehns* 1.) einen Bogen übrig, der kleiner ist, als der Bogen *A*D. Es bleibe ein solcher übrig, und er sey L*D*, so fälle man von dem Punkte L auf die *BD* das Loth LM verlängere es bis nach N, und ziehe die LD, DN, so ist die LD der D*N* gleich. *D*a nun die LN der A*C* parallel ist, die AC aber den Kreis EFGH berührt, so wird die LN den Kreis EFGH nicht berühren, noch viel weniger also werden die LD, DN den Kreis EFGH berühren. Wenn man nun (4, 1. S.) der LD gleiche Linien in dem

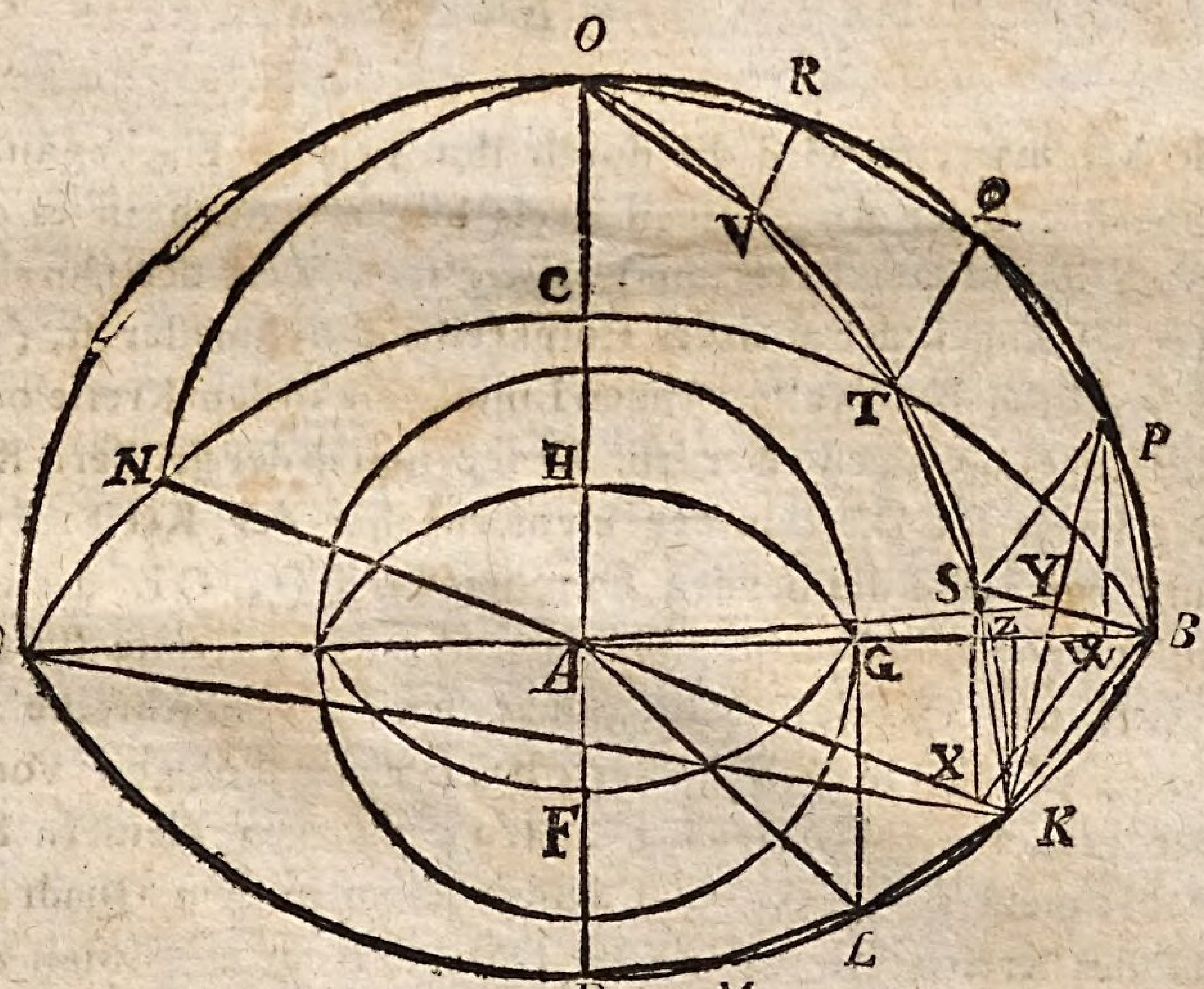
Krei-

Kreise ABCD in Einem fort herumträgt, so wird in demselben ein Polygon von gleichen Seiten, und zwar nach einer geraden Zahl, beschrieben werden, das den kleinern Kreis EFGH nicht berührt, w. z. v. w.

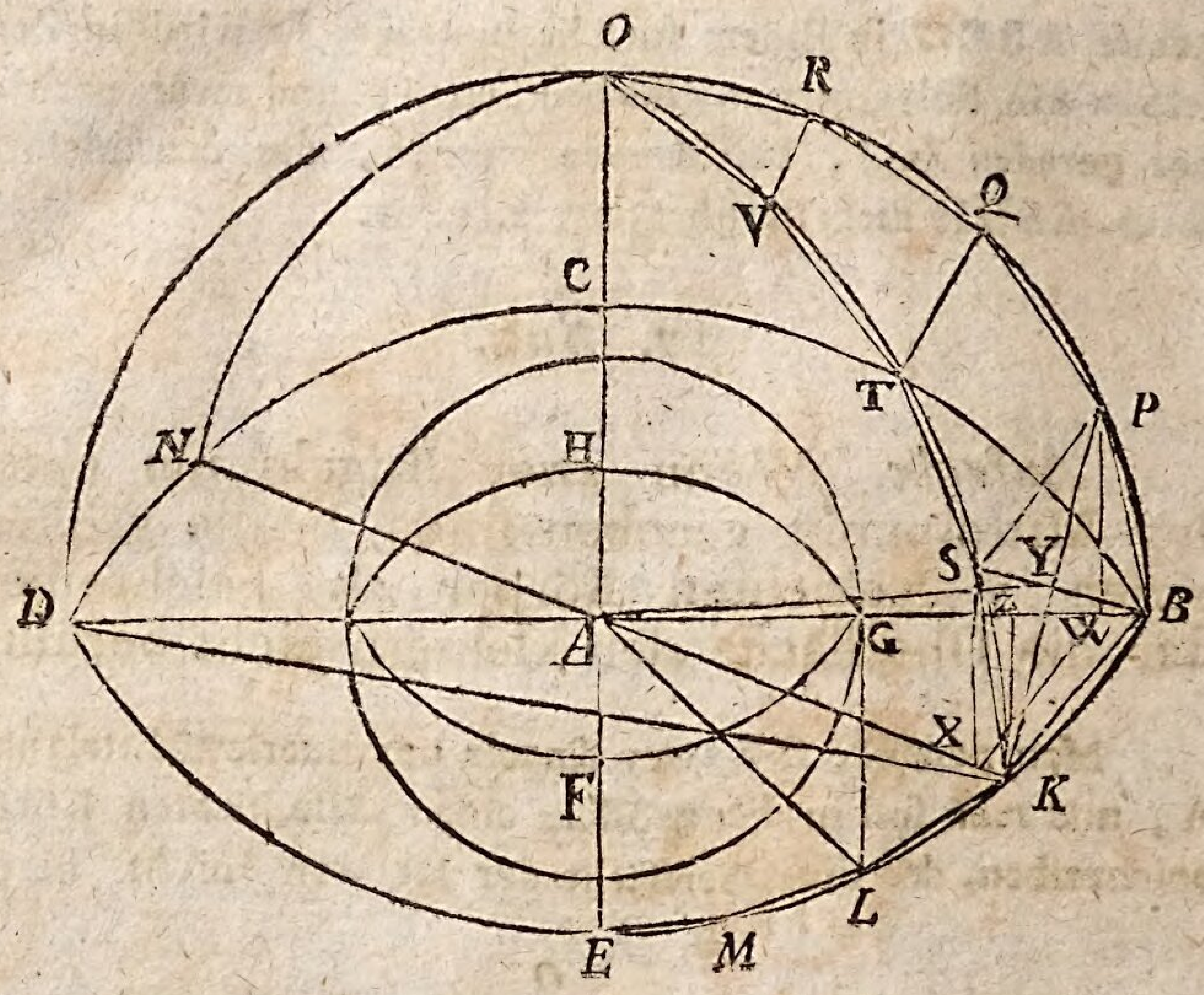
17. *Saz.*

Aufgabe. Wenn zwey Kugeln um einerley Mittelpunkt gegeben sind, in die grössere einen vieleckichten Körper zu beschreiben, der die Oberfläche der kleinern nicht berühre.

Man gedenke sich zwey Kugeln um einerley Mittelpunkt A, und man soll in die grössere einen vieleckichten Körper beschreiben, der die Oberfläche der kleinern nicht berüh



Auflösung. Man schneide die Kugel mit einer Ebene durch den Mittelpunkt, so werden die *Durchschnitte* Kreise seyn, weil (11, 14. Erkl.) durch Umdrehung des Halbkreises um den unverrückten Durchmesser die Kugel entstanden ist. In welcher Lage man also den Halbkreis gedenken

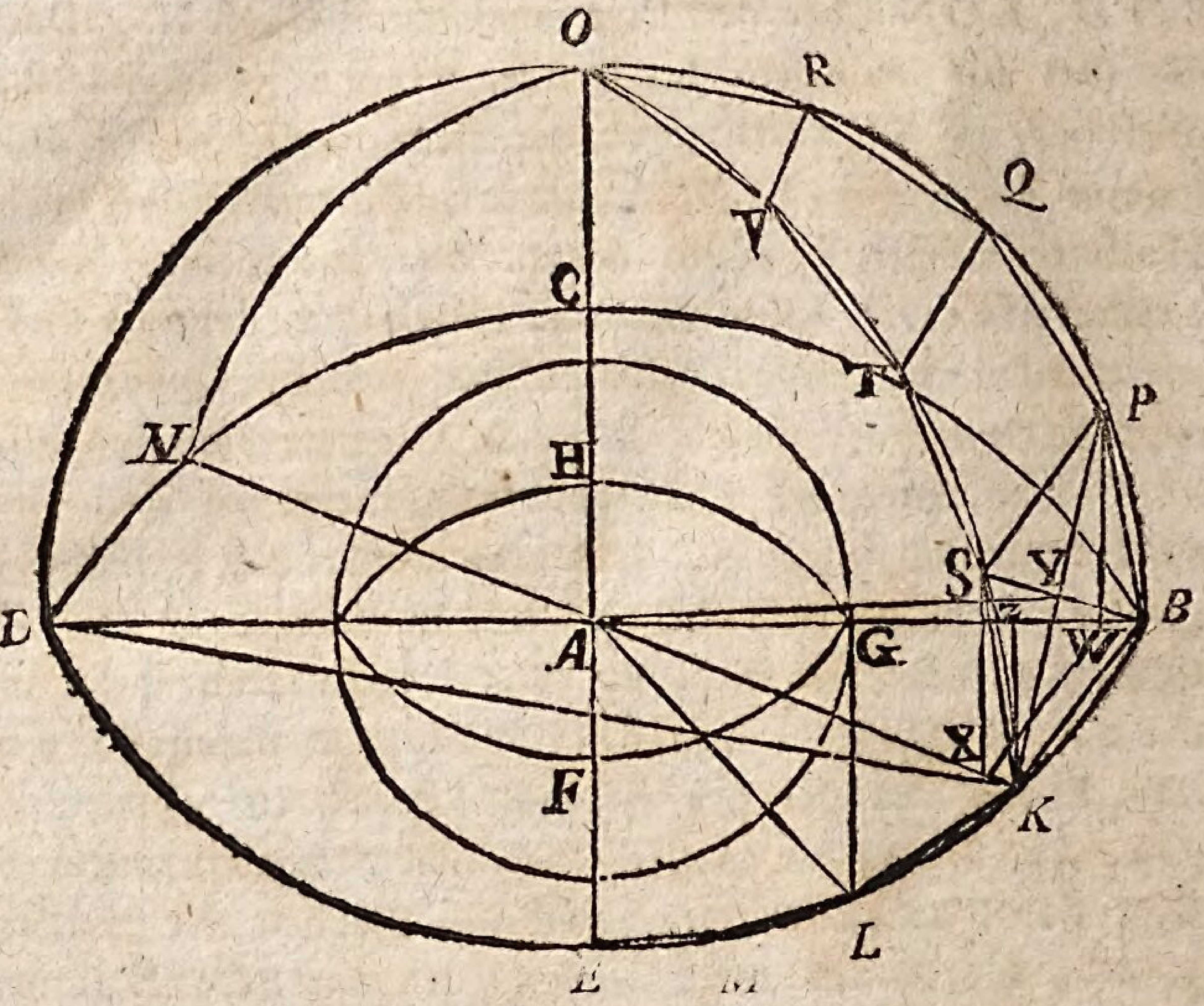


denken mag, so wird die durch ihn gelegte Fläche auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis bilden. Auch ist es offenbar, daſs dieser Kreis ein gröſster sey, weil der *D*urchmesser der Kugel, der auch des Halbkreises Durchmesser ist, (3, 15. S.) gröſser ist, als alle geraden Linien, die in dem Kreise oder in der Kugel gezogen werden. Es sey nun in der gröſsern Kugel der Kreis BCDE, in der kleinern aber der Kreis FGH, und man ziehe die beyden *D*urchmesser BD, CE derselben auf einander lothrecht. Da man nun zwey Kreise BC*D*E, FGH um einerley Mittelpunkt hat, so beschreibe man (12, 16. S.) in den gröſsern BCDE ein Polygon von einer geraden Zahl gleicher Seiten, das den kleinern Kreis FGH nicht berühre, und dessen Seiten in dem Quadranten BE des Kreises die *B*K, KL, LM, ME seyen. Man ziehe hierauf die K*A*, verlängere sie bis nach N, und errichte in dem Punkte A die AO auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht, welche der Oberfläche der Kugel in dem Punkte O begegne. Hierauf lege man durch AO und durch die BD, KN Ebenen, die, nach dem oben Gesagten, auf der Oberfläche der Kugel gröſste Kreise machen werden. Sie machen also solche, und es seyen Halbkreise von ihnen die

BOD,

BOD, KON über den Durchmessern BD, KN. Da nun die OA auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht ist, so sind (11, 18. S.) alle Ebenen, die durch die OA gehen, auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht, und mithin sind auch die Halbkreise BOD, KON auf dieser Ebene lothrecht. Und da die Halbkreise BOD, KON einander gleich sind, denn sie sind auf gleichen Durchmessern BD, KN, so sind auch ihre Quadraten BE, BO, KO einander gleich. Wieviel Seiten des Polygons also in dem Quadranten BE sind, ebensoviele werden auch in den Quadranten BO, KO, jede den BK, KL, LM, ME gleich, seyn. Man beschreibe sie, und sie seyen BP, PQ, QR, RO, KS, ST, TV, VO. Man ziehe nun ferner die SP, TQ, VR, und fälle von den Punkten P, S nach der Ebene des Kreises BCDE Lothe, so werden diese (11, 38. S.) in die gemeinschaftlichen Durchschnitte BD, KN der Flächen fallen, weil die Flächen der Halbkreise BOD, KON auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht sind. Sie fallen alsa dahin, und seyen PW, SX, und man ziehe die WX. Da man nun in gleichen Halbkreisen BOD, KON die gleichen Bogen BP, KS genommen, und die Lothe PW, SX gefällt hat, so ist die PW der SX, die BW aber der KX gleich. Es ist aber auch die ganze BA der ganzen KA, folglich auch der Rest WA dem Reste AX gleich, und es verhält sich also die BW zu der WA wie die KX zu der AX, und mithin ist (6, 2. S.) die WX der KB parallel. Da nun die PW, SX auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht sind, so ist (6, 11. S.) die PW der SX parallel. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch gleich sey, folglich sind (1, 33. S.) die WX, SP gleich und parallel. Und da die WX der SP, aber auch der KB parallel ist, so ist (11, 9. S.) die SP der KB parallel, und beyde werden von den Linien BP, KS verbunden; folglich ist die vierseitigt Figur KBPS in *einer* Ebene. Denn wenn zwey gerade Linien parallel sind, und man nimmt in jeder derselben beliebige Punkte an, so liegt die gerade Linie, die diese Punkte verbindet (11, 7. S.) mit den beyden Parallelen in *einer* Ebene. Aus ebenden Gründen ist auch jede der vierseitigen Figuren SPQT, TQRV in *einer* Ebene. Es ist aber (11, 2. S.) auch das Dreyeck VRO in

einer

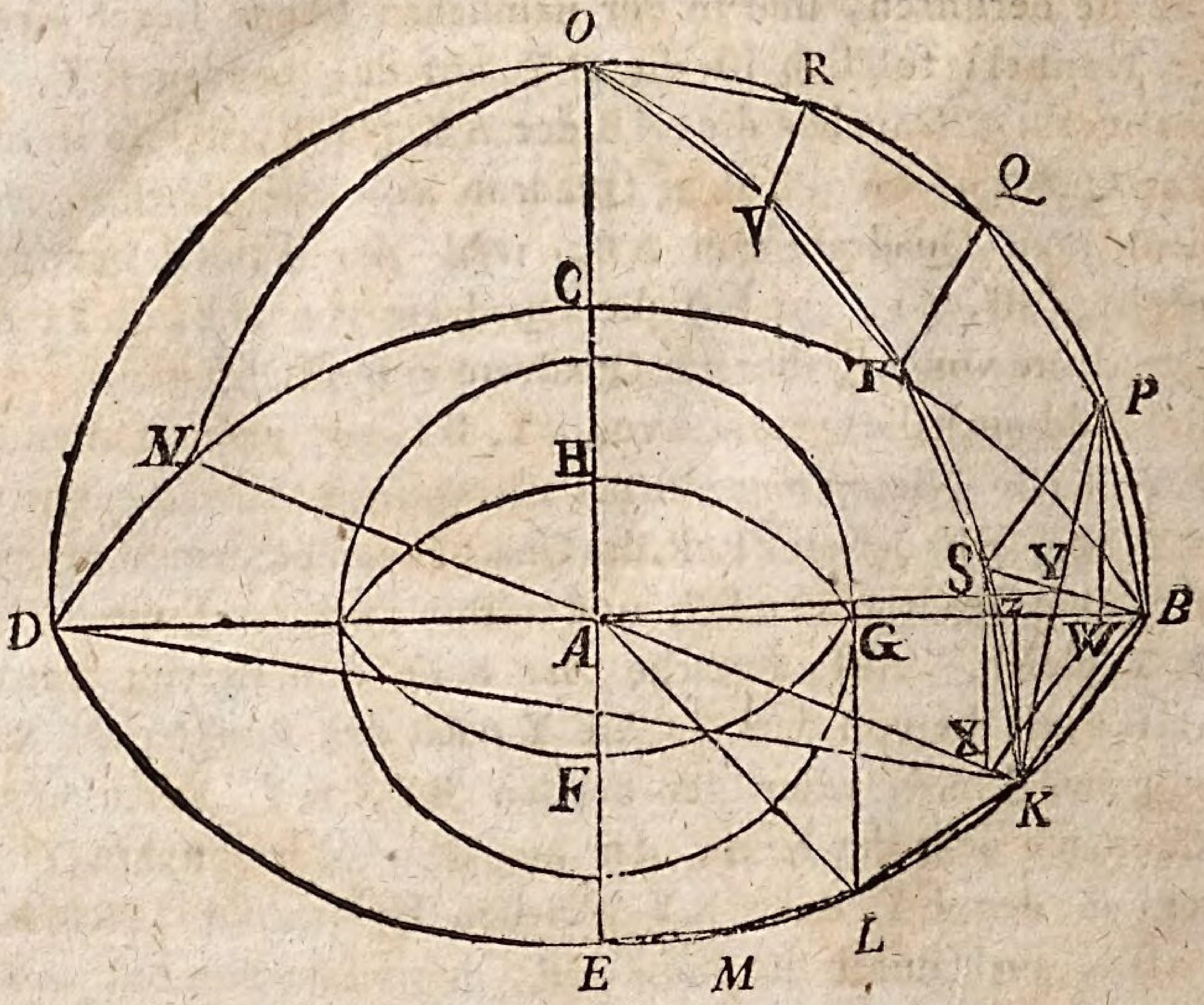


einer Ebene. Gedenkt man sich also von den Punkten P, S, Q, T, R, V nach dem Pnnkte A gerade Linien gezogen, so wird zwischen den Bogen BO, KO ein vieleckichter Körper beschrieben, der aus Pyramiden zusammengesezt ist, deren Grundflächen die vierseitigen Figuren KBPS, SPQT, TQRV, und das Dreyeck VRO sind, die Spize aber der Punkt A ist. Macht man nun auf jeder der Seiten KL, LM, ME eben die Construction wie auf der KB, und verrichtet man dies auch in den drey übrigen Quadranten, und in der andern Halbkugel, so wird in die Kugel ein vieleckichter Körper beschrieben, der aus Pyramiden zusammengesezt ist, deren Grundflächen die oben genannten vierseitigen Figuren und das Dreyeck VRO, und die mit ihnen zusammengehören, sind, die Spize aber der Punkt *A* ist, und ich behaupte, dass der genannte vielseitige Körper die Oberfläche der kleinern Kugel, in welcher der Kreis FGH ist, nicht berühre.

Beweis. Man fälle von dem Punkte A auf die Ebene der vierseitigen Figur KBPS das Loth AY, welches ihr in dem Puukte Y begegne, und ziehe BY, KY. Da nun die AY auf der Ebene der vierseitigen Figur KBPS lothrecht ist, so macht sie (11, 3. Erkl.) mit allen geraden Linien,

die

die sie berühren, und in der nämlichen Ebene liegen, rechte Winkel; folglich ist die *A* Y auf den beyden B Y, K Y lothrecht. Da aber die *A* B der A K gleich ist, so ist auch das Quadrat von A B dem Quadrate von A K gleich. *A*uch sind dem Quadrate von A B, weil der Winkel bey Y ein rechter ist, (1, 47. S.) die Quadrate von *A* Y, B Y, dem Quadrate von AK aber die Quadrate von AY, KY gleich; folglich sind auch die Quadrate von *A*Y, BY den Quadraten von AY, KY gleich Nimmt man also das gemeinschaftliche Quadrat von AY weg, so ist der eine Rest, das Quadrat von BY dem andern Reste, dem Qradrate von KY, und mithin auch die Linie *B* Y der K Y gleich. Auf ähnliche *A*rt kann nun gezeigt werden, dass auch die von dem Punkte Y nach den Punkten P, S gezogenen Linien jeder der beyden BY, KY gleich seyen; demnach geht der Kreis, der aus dem Mittelpunkte Y mit einem der B Y oder K Y gleichen Halbmesser beschrieben wird, auch durch die Punkte P, S, und mithin ist K P B S eine vierseitige Figur im Kreise. Da nun die K B grösser ist, als die W X, die W X aber der SP gleich ist, so ist auch die K B grösser, als die S P. Aber die K B ist jeder der beyden K S, *B* P gleich; folglich ist auch jede der beyden K S, *B* P grösser, als die S P. Da nun K B P S eine vierseitige Figur im Kreise ist, und die K B, *B*P, K S einander gleich sind, die P S aber kleiner, als sie, und die B Y ein Halbmesser des Kreises ist, so ist das Quadrat von K B grösser, als das Doppelte des Quadrats von B Y. Man fälle nun von dem Punkte K auf die B D das Loth K Z. Da nun die B D kleiner ist, als das *D*oppelte von *D* Z, und (6, 1. S.) die D B zu der D Z sich verhält, wie das Rechteck ans D B, B Z zum Rechtecke aus D Z, B Z so ist, wenn man das Quadrat von BZ beschreibt, und das Parallelogramm auf *D*Z vollendet, das Rechteck aus *D* B, B Z kleiner, als das Doppelte des Rechtecks aus *D* Z, B Z. Zieht man nun ferner die K D, so ist (6, 8. S.) das Rechteck aus D*B*, B*Z* dem Quadrate von K B, und das Rechteck aus D Z, B Z dem Quadrate von K Z gleich; folglich ist auch das Quadrat von K B kleiner, als das Doppelte des Quadrats von K Z. *A*ber das Quadrat von K *B* ist grösser, als das Doppelte des Quadrats von B Y;



folglich ist das Quadrat von KZ grösser, als das Quadrat von BY. Da nun die BA der KA gleich ist, so ist auch das Quadrat von BA dem Quadrate von KA gleich, auch sind (1, 47. S.) dem Quadrate von BA die Quadrate von BY, AY, und dem Quadrate von KA die Quadrate von KZ, AZ gleich; folglich sind die Quadrate von BY, AY den Quadraten von KZ, AZ gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von KZ grösser, als das Quadrat von BY; folglich ist das Quadrat von AZ kleiner, als das Quadrat von AY, und mithin die Linie AY grösser, als die Linie AZ, folglich noch vielmehr die AY grösser, als die AG. Es geht aber die AY an die eine Grundfläche des vieleckichten Körpers, die AG aber an die Oberfläche der kleinern Kugel; folglich berührt der vieleckichte Körper die Oberfläche der kleinern Kugel nicht.

Anderer Beweis.

Es kann noch auf eine andere Art kürzer gezeigt werden, dass die AY grösser, als die AG sey.

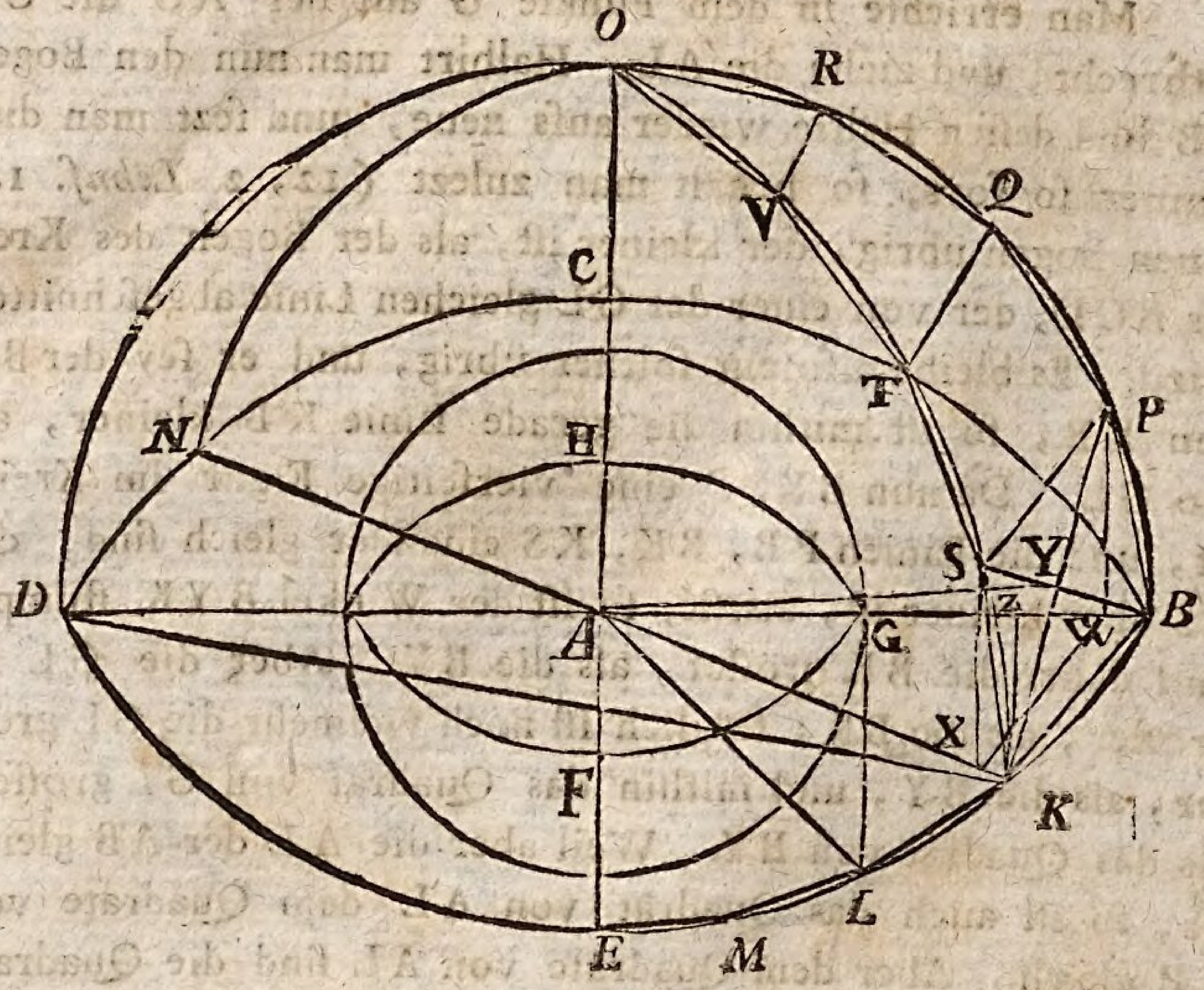
Man

Man errichte in dem Punkte G auf der AG die GL lothrecht, und ziehe die AL. Halbirt man nun den Bogen EB und dessen Hälfte wieder aufs neue, und sezt man dies immer so fort, so behält man zulezt (12, 2. *Lehns.* 1.) einen Bogen übrig, der kleiner ist, als der Bogen des Kreises BCD, der von einer der GL gleichen Linie abgeschnitten wird. Es bleibe also ein solcher übrig, und er sey der Bogen KB, so ist mithin die gerade Linie KB kleiner, als die GL. Da nun BKSP eine vierseitige Figur im Kreise ist, und die Linien PB, BK, KS einander gleich sind, die PS aber kleiner ist, als sie, so ist der Winkel BYK stumpf, und daher die BK grösser, als die BY. Aber die GL ist grösser, als die BK; folglich ist noch vielmehr die GL grösser, als die BY, und mithin das Quadrat von GL grösser, als das Quadrat von BY. Weil aber die AL der AB gleich ist, so ist auch das Quadrat von AL dem Quadrate von AB gleich. Aber dem Quadrate von AL sind die Quadrate von AG, GL, dem Quadrate von AB aber die Quadrate von BY, AY gleich; folglich sind die Quadrate von AG, GL den Quadraten von BY, AY gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von BY kleiner, als das Quadrat von GL; folglich ist das Quadrat von AY grösser, als das Quadrat von AG, und mithin auch die Linie AY grösser, als die AG.

Demnach ist, da zwey Kugeln um einerley Mittelpunkt gegeben waren, in der grösseren ein vieleckichter Körper beschrieben worden, der die Oberfläche der kleinern nicht berührt, w. z. v. w.

Zusaz. Wenn auch in der andern Kugel ein, dem in der Kugel BCDE beschriebenen vieleckichten Körper, ähnlicher vieleckichter Körper beschrieben wird, so hat der vieleckichte Körper in der Kugel BCDE zu dem vieleckichten Körper in der andern Kugel ein dreymal höheres Verhältniss, als der Durchmesser der Kugel BCDE zum Durchmesser der andern Kugel. Denn theilt man die Körper in Pyramiden von gleicher Anzahl, und gleicher Art, so sind

 diese



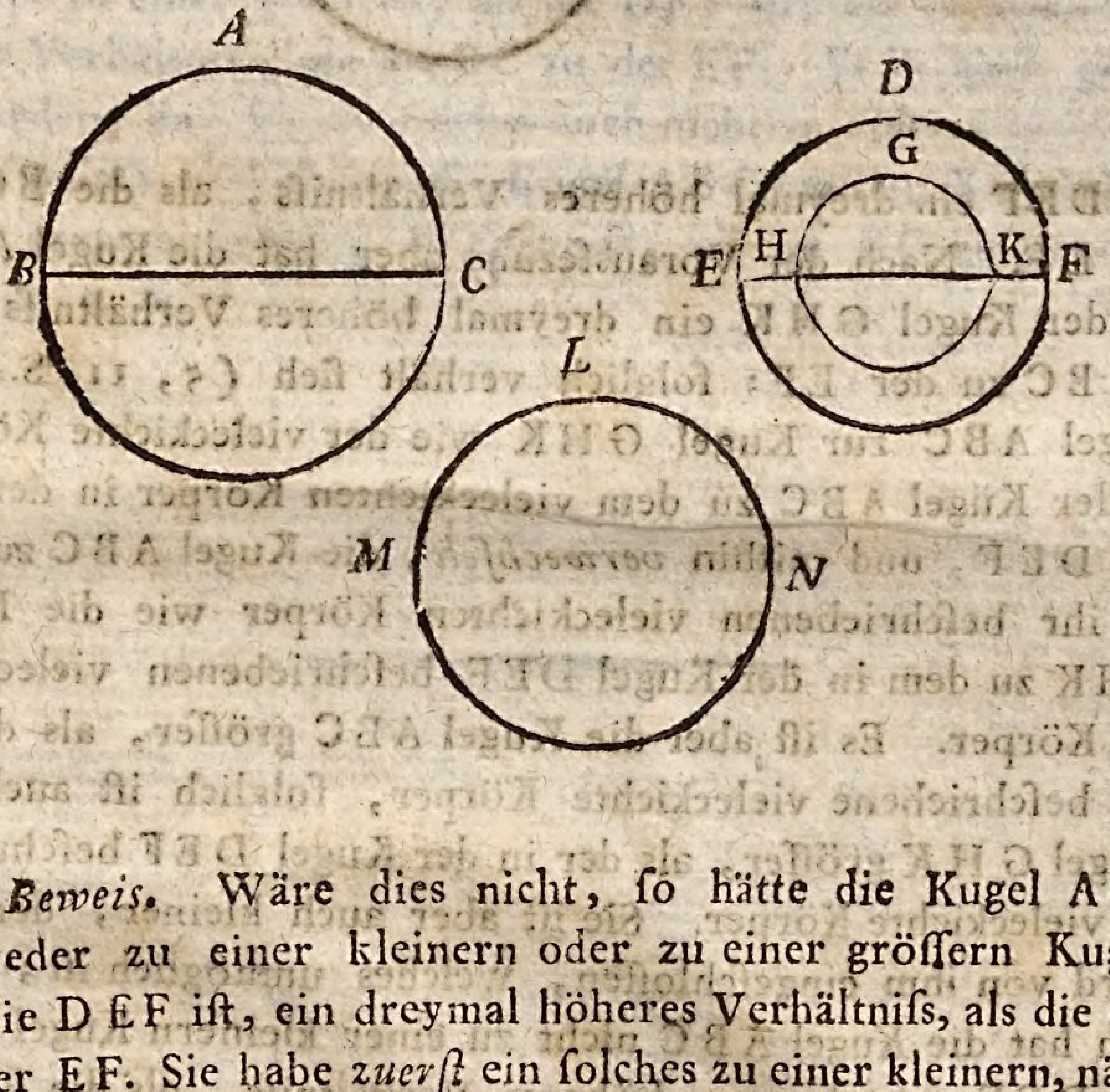
diese Pyramiden einander ähnlich. Aehnliche Pyramiden aber sind (12, 8. Zus.) in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten; folglich hat die Pyramide, deren Grundfläche die vierseitige Figur KBPS, und deren Spize der Punkt A ist, zu der Pyramide in der andern Kugel von der nämlichen Art ein dreymal höheres Verhältniss, als die homologe Seite zu der homologen Seite, das heisst, als der Halbmesser AB der Kugel um den Mittelpunkt A zum Halbmesser der andern Kugel. Ebenso hat auch jede der Pyramiden in der Kugel um den Mittelpunkt A zu jeder der Pyramiden von gleicher Art in der andern Kugel ein dreymal höheres Verhältniss, als die AB zum Halbmesser der andern Kugel. Aber (5, 12. S.) verhält sich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder; folglich hat der ganze vieleckichte Körper in der Kugel um den Mittelpunkt A zu dem ganzen vieleckichten Körper in der andern Kugel ein dreymal höheres Verhältniss, als die AB zum Halbmesser der andern Kugel, das heisst, als der Durchmesser BD zum Durchmesser der andern Kugel w. z. e. w.

18. *Saz.*

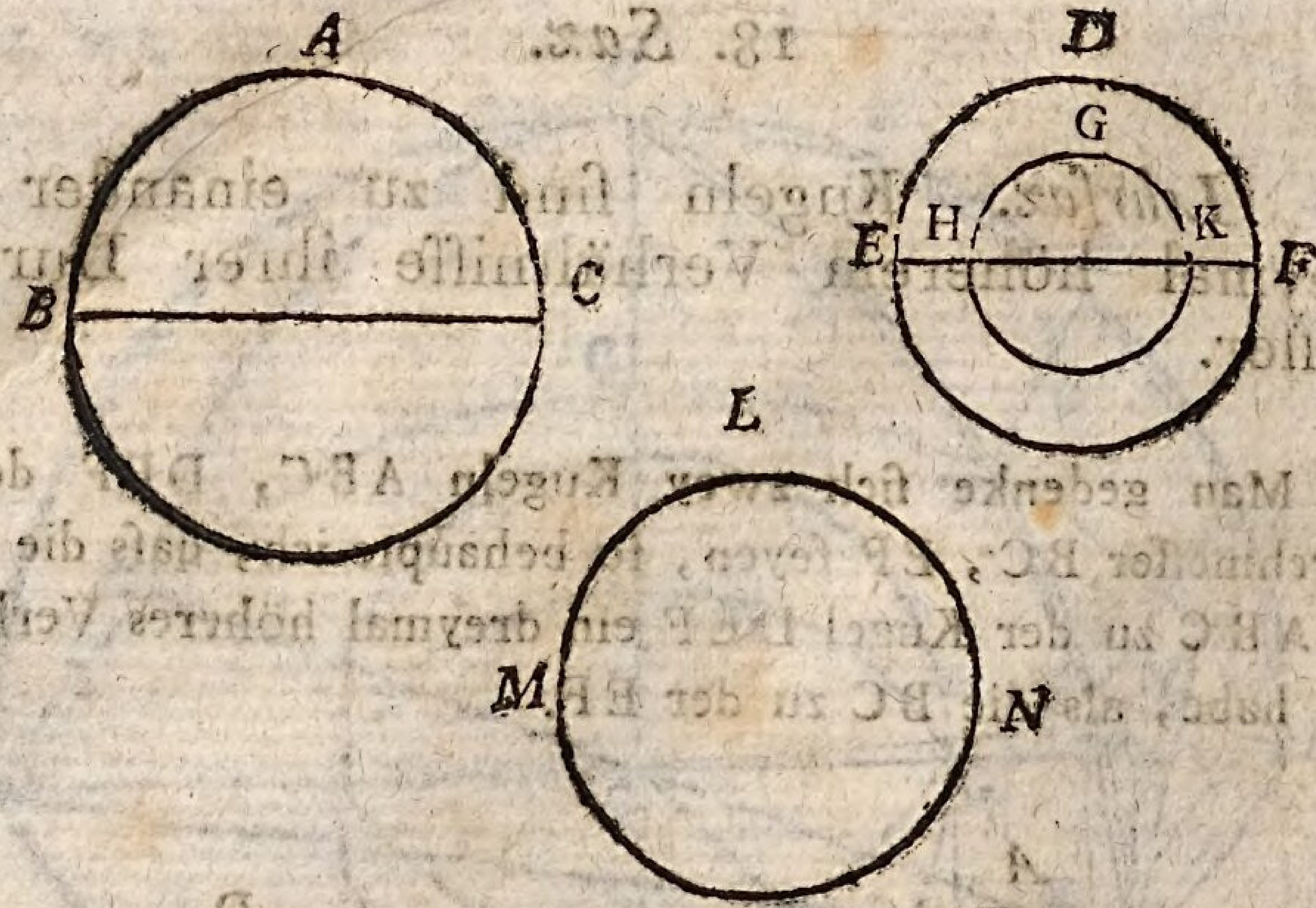
18. *Saz.*

Lehrſaz. Kugeln ſind zu einander in dreymal höherem Verhältniſſe ihrer Durchmeſſer.

Man gedenke ſich zwey Kugeln ABC, DEF deren Durchmeſſer BC, EF ſeyen, ſo behaupte ich, daſs die Kugel ABC zu der Kugel DEF ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die BC zu der EF.



Beweis. Wäre dies nicht, ſo hätte die Kugel ABC entweder zu einer kleinern oder zu einer gröſſern Kugel, als die DEF iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF. Sie habe *zuerſt* ein ſolches zu einer kleinern, nämlich zu der GHK; man gedenke ſich aber die Kugel DEF mit der GHK um einerley Mittelpunkt, und beſchreibe (11, 17. S.) in der gröſſern Kugel DEF einen vieleckichten Körper, der die Oberfläche der kleinern Kugel GHK nicht berühre, und in der Kugel ABC beſchreibe man einen, dem in der Kugel DEF beſchriebenen, ähnlichen vieleckichten Körper, ſo hat (11, 17. *Zuſ.*) der vieleckichte Körper in der Kugel ABC zu dem vieleckichten Körper in der Ku-



gel D E F ein dreymal höheres Verhältniſs, als die B C zu der E F. Nach der Vorausſezung aber hat die Kugel A B C zu der Kugel G H K ein dreymal höheres Verhältniſs, als die B C zu der E F; folglich verhält ſich (5, 11. S.) die Kugel A B C zur Kugel G H K wie der vieleckichte Körper in der Kugel A B C zu dem vieleckichten Körper in der Kugel D E F, und mithin *verwechſelt*, die Kugel A B C zu dem in ihr beſchriebenen vieleckichten Körper wie die Kugel G H K zu dem in der Kugel D E F beſchriebenen vieleckichten Körper. Es iſt aber die Kugel A B C gröſſer, als der in ihr beſchriebene vieleckichte Körper, folglich iſt auch die Kugel G H K gröſſer, als der in der Kugel D E F beſchriebene vieleckichte Körper. Sie iſt aber auch kleiner, denn ſie wird von ihm eingeſchloſſen, welches unmöglich iſt; folglich hat die Kugel A B C nicht zu einer kleinern Kugel, als die D E F, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die B C zu der E F. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die Kugel D E F nicht zu einer kleinern Kugel, als die A B C iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die E F zu der B C.

Ich behaupte aber ferner, daſs auch die Kugel A B C nicht zu einer gröſſern Kugel, als die D E F iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die B C zu der E F. Denn ſie

sie habe, die Möglichkeit angenommen, ein solches zu einer grössern Kugel L M N, so hat umgehehrt die Kugel L M N zur Kugel A B C ein dreymal höheres Verhältniss, als der Durchmesser E F zum Durchmesser B C. Wie sich aber die Kugel L M N zur Kugel A B C verhält, so verhält sich die Kugel D E F zu einer Kugel, die kleiner ist, als die A B C, wie oben (12, 2. Lehns. 2.) gezeigt worden ist, weil die Kugel L M N grösser ist, als die D E F; folglich hat auch die Kugel D E F zu einer Kugel, die kleiner ist, als die A B C, ein dreymal höheres Verhältniss, als die E F zu der B C, wovon die Unmöglichkeit gezeigt worden ist; folglich hat die Kugel A B C nicht zu einer grössern, als die D E F ist, ein dreymal höheres Verhältniss; als die B C zu der E F. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ein solches auch nicht zu einer kleinern Kugel habe; folglich hat die Kugel A B C zu der Kugel D E F ein dreymal höheres Verhältniss, als die B C zu der E F, w. z. e. w.

Druck-

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 6. Zeile 10 von unten: statt AC lies AL.
— 42. Z. 2. v. u. statt AB lies AM.
— 46. Z. 13. v. u. st. DA, l. BA
— 50. Z. 12. v. u. st. Delieben l. Belieben.
— 54. In der Figur fehlt der Buchstabe A, da, wo die von B und K ausgehenden Linien auf der linken Seite zusammentreffen.
— 61. Z. 9 v. o. statt *bey E* l. *bey C.*
— 78. In der Figur fehlt der Buchstabe G dem K gegenüber.
ebend. Z. 7. v. u. statt BC lies BG.
S. 82. Z. 15. v. u. statt ADBC lies ABDC.
— 85. Z. 9. v. u. statt *folle* lies *falle.*
— 89 In der Figur fehlt der Buchstabe E dem D gegenüber.
— 90. Z. 10. v. o. statt nach E lies nach G.
— 94. Z. 10. v. u. nach: *denselben* ist das Wort: *Kreise* wegzustreichen.
ebend. Z. 7. v. O. statt BC lies DC.
S. 95. In der Figur zum 27ten Saze fehlt der Buchstabe K dem G gegenüber.
ebend. Z. 4. v. u statt BCG lies BGC.
S. 98. ist in der Figur B statt C, und C statt B zu sezen.
ebend. Z. 8. v. o. statt ABD lies ACD.
S. 99. Z. 3. v. o. statt ACD lies ACB.
ebend. Z. 19. v. o. statt 23 S. lies 22 S.
S. 100. Z. 9 v. u. ist statt des Buchstabens A der Hacken der Parenthese zu sezen.
— 114. ist in der Figur B statt C, und C statt B zu sezen.
ebend. Z. 3 v. u. statt BF lies EF.
S. 123. Z. 17 v. o. statt *Quadrat von* KC lies *Quadrat von* KF.
— 124. Z. 18 v. o. statt BL lies BK.
ebend Z. 22 v. o. statt GL, GM lies GM, ML.
S. 128. Z. 3. v. o. statt E lies G.
— 141. Z. 15. v. u. ist das Komma zwischen dem Buchstaben A und B durchzustreichen, weil beyde Buchstaben zusammen *eine* Grösse bezeichnen.
— 150. Z. 15 v. o. ist nach dem Worte: *Grössen* einzuschalten: *AG, GH, HB, jede gleich der C, und die DE in die Grössen*
— 159. Z. 14 v. u. statt *Proportionirt* lies *Proportion.*
— 173. Z. 12 v. u statt ACB lies ABC.
— 184. Z. 10 v. u. statt HG lies AG.

S. 191. Z. 15 v. u. statt *des* lies *das.*
ebend. in der lezten Zeile ist nach dem Worte: *sich*, einzuschalten: *das Dreyeck A B M zum Dreyecke M B C, und*
S. 192. müssen die Buchstaben in der kleineren Figur durchgängig so gesezt werden, wie sie in eben dieser Figur auf der 190ten Seite stehen.
— 197. Z. 2. v. u. ist nach dem Worte: *die*, einzuschalten: *HG, folglich auch die QS größer, als die*
— 201. Z. 12 u. 13 v. o. statt *welch* lies *welcher.*
— 208. fehlt in der Figur der Buchstabe P da, wo die verlängerte Linie A E B die O M schneidet.
ebend. Z. 11 v. u. statt D L lies E L.
ebend. Z. 6 v. u. statt G A lies G H.
S. 209. Z. 11 v. u. statt (6, 26. S.) lies (6, 29. S.)
ebend. Z. 1. v. u. statt A F lies B F.
S. 212. Z. 14 v. o. ist nach dem Worte: *mithin* einzuschalten: (5, 24. S.)
— 213. Z. 20. v. o. ist nach dem Worte: *Winkeln* einzuschalten: A B C
— 224. Z. 12 v. u. statt C E lies C B.
— 228. Z. 2 v. o. statt D B lies D A.
— 230. Z. 18 v. o. statt A D B lies A B D
— 235. fehlt in der Figur zum 14ten Saze der Buchstabe A dem B gegenüber.
— 237. Z. 6 v. u. ist statt: *Aufgabe* zu sezen: *Lehrsaz.*
— 239. Z. 11. v. u. sind die Worte: *Zu der OD wie die CF* durchzustreichen.
— 251. Z. 10 v. o. statt QR lies OR.
— 253. Z. 17. v. o. statt D E lies D F.
— 254. Z. 8 u. 9 v. u. sind die Worte: *BF, AE von der Ebene*, und
ebend. Z. 2 v. u. ist die zweyte Sylbe *le* in *Parallelelogramm* durchzustreichen.
S. 265. Z. 16 v. u. statt R T lies R F.
— 266. Z. 8. v. o. ist der Buchstabe L wegzustreichen.
— 268. fehlt in der Figur der Buchstabe K an dem rechter Hand liegenden Endpunkte der verlängerten Linie AE, und der Buchstabe L an dem rechter Hand liegenden Endpunkte der verlängerten Linie GE.
— 271. Z. 10 v. u. statt *denn die Körper* lies *denn die Höhen der Körper*
— 272. Z. 3 v. o. statt MQ lies NQ.
ebend. Z. 7 v. o. ist nach dem Worte: *lothrecht*, einzuschalten: *und die Grundflächen beyder Körper einander gleich.*

S. 275.

S. 275. Z. 10. v. o. nach dem Worte: *Körpers* ist einzuschalten: CD, *zur Höhe des Körpers*.
— 276. sind in der Figur noch die Linien HC und MF zu ziehen.
— 277. Z. 16 v. u. statt AL lies AK.
— 288. Z. 11. v. u. statt *daher* lies *nämlich*.
— 289. Z. 10 v. o. statt *größer* lies *kleiner*.
— 290. Z. 7. v. o. statt CD lies BD.
ebend. Z. 10. v. o. statt AB lies BD.
S. 292. Z. 18. v. o. statt EH lies EA.
— 296. Z. 11 v. u. statt *daher* lies *nämlich*.
— 301. Z. 3 v. o. statt (11, 33. S.) lies (11, 32. S.)
— 303. Z. 15 v. o. statt *eben* lies *oben*, und nach diesem Worte schalte ein: (12, 2. Lehns. 2.)
— 304. Z. 15 v. o. statt ABCM lies ACDM.
— 305. Z. 2 v. u. statt D lies C.
— 306. Z. 14 v. o. statt (11, 5. S.) lies (12, 5. S.)
— 313. Z. 3 v. o. nach dem Worte: *aufgerichteten* ist einzuschalten: *Parallelepipeden*
— 327. Z. 11. v. u. nach dem Worte: *Ebene* ist einzuschalten: CD.
— 328. fehlt in der Figur der Buchstabe P dem R gegenüber.
— 331. in der Figur ist die kleine Linie SY auszulöschen.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euclides,

Euklids Elemente Das Erste Bis Zum Sechsten, sammt dem Eilften Und Zwoelften Buche

Marburg 1797

Bamberg, Staatsbibliothek -- L.gr.o.252
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11725248-6
VD18 15344533